LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL

SERIES III OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE VOLUMEN IV

LEONHARDI EULERI

DIOPTRICA

EDIDIT

EMIL CHERBULIEZ

VOLUMEN POSTERIUS

LIPSIAE ET BEROLINI

TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI

MCMXII

LEONHARDI EULERI

OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL

SERIES TERTIA
OPERA PHYSICA MISCELLANEA EPISTOLAE
VOLUMEN QUARTUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

LEONHARDI EULERI

DIOPTRICA

EDIDIT

EMIL CHERBULIEZ

VOLUMEN POSTERIUS

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXII

DIOPTRICAE

VOLUMEN POSTERIUS

CONTINENS

LIBRI SECUNDI SECTIONEM TERTIAM ET APPENDICEM

LIBRUM TERTIUM

DIOPTRICAE
PARS SECVNDA,
CONTINENS
LIBRVM SECVNDVM,
DE
CONSTRVCTIONE TELESCOPIORVM DIOPTRICORVM
CVM
APPENDICE
DE
CONSTRVCTIONE TELESCOPIORVM CATOPTRICO-DIOPTRICORVM.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

PETROPOLI
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum
1770.

INDEX CAPITUM
IN TOMO II CONTENTORUM

IN SECTIONE PRIMA[1])

DE TELESCOPIIS PRIMI GENERIS QUAE LENTE OCULARI CONCAVA INSTRUCTA OBIECTA SITU ERECTO REPRAESENTANT

IN SECTIONE SECUNDA

DE TELESCOPIIS SECUNDI GENERIS QUAE LENTE OCULARI CONVEXA INSTRUCTA OBIECTA SITU INVERSO REPRAESENTANT

1) Sectiones prima et secunda in volumine priore insunt. F. R.

IN SECTIONE TERTIA

DE TELESCOPIIS TERTII GENERIS QUIBUS OBIECTA ITERUM SITU ERECTO REPRAESENTANTUR

IN APPENDICE

DE CONSTRUCTIONE TELESCOPIORUM CATOPTRICO-DIOPTRICORUM

LIBRI SECVNDI,

DE

CONSTRVCTIONE TELESCOPIORVM

SECTIO TERTIA.

DE

TELESCOPIIS TERTII GENERIS,

QVIBVS

OBIECTA ITERVM SITV ERECTO

REPRAESENTANTVR.

CAPUT I

DE TELESCOPIIS SIMPLICIORIBUS TERTII GENERIS EX UNICA VITRI SPECIE PARATIS

PROBLEMA 1

294. *Telescopium simplicissimum huius generis, quod tribus tantum constat lentibus, construere, quod obiecta secundum datam rationem aucta et situ erecto repraesentet.*

SOLUTIO

Pro duobus intervallis, quae hic occurrunt, ponamus ut semper fractiones $\frac{\alpha}{b} = P$ et $\frac{\beta}{c} = -Q$, et quia hic duae imagines reales habentur, quarum altera in prius intervallum cadens est inversa, altera vero in posterius intervallum cadens erecta, ita ut sit semidiameter illius $= \alpha\Phi$, huius vero $= B\alpha\Phi$, ambae litterae P et Q debent esse negativae, unde statuamus $-P = k$ et $-Q = k'$, ut sit multiplicatio $m = kk'$. Hinc elementa nostra ita se habebunt:

$$b = \frac{\alpha}{k}, \quad \beta = \frac{B\alpha}{k} \quad \text{et} \quad c = \frac{B\alpha}{kk'}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{\mathfrak{B}\alpha}{k} \quad \text{et} \quad r = \frac{B\alpha}{kk'} = \frac{B\alpha}{m},$$

tum vero bina intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \beta + c = \frac{B\alpha}{k}\left(1 + \frac{1}{k'}\right),$$

quae per se sunt positiva, siquidem esse debet $B > 0$ ideoque et $\mathfrak{B}$. Pro

campo porro apparente, cum sit eius semidiameter $\Phi = \frac{-\pi + \pi'}{m-1}$, ponamus

$$\pi = -i\xi \quad \text{et} \quad \pi' = \xi$$

denotante ξ maximum valorem, quem litterae π et π' recipere possunt, et i fractionem unitate minorem, eritque

$$\Phi = \frac{i+1}{m-1}\xi$$

atque hinc pro loco oculi fiet

$$O = \frac{\pi'}{\Phi} \cdot \frac{r}{m} = \frac{m-1}{i+1} \cdot \frac{B\alpha}{mm},$$

quae distantia etiam per se est positiva. His positis aequationes pro litteris π, π' supra datae dabunt

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = k \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B} \cdot \frac{-i(m-1)}{i+1} = k+1,$$

unde

$$i = \frac{-k-1}{k+1+(m-1)\mathfrak{B}},$$

qui valor debet esse unitate minor. Cum igitur hinc valor ipsius i necessario sit negativus et unitate minor, erit campi semidiameter

$$\Phi = \frac{\mathfrak{B}\xi}{k+1+(m-1)\mathfrak{B}},$$

quae certe eo minor est quam $\frac{\xi}{m-1}$, quo k est maius et quo minus est $\mathfrak{B}$. Quo igitur campum maiorem obtineamus, in id est incumbendum, ut litterae k quam minimus, litterae $\mathfrak{B}$ vero quam maximus valor concilietur; at cum sit $B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$ et debeat esse $B > 0$, hinc evidens est $\mathfrak{B}$ non ultra unitatem augeri posse. Casu autem, quo fit $\mathfrak{B} = 1$, fit $\Phi = \frac{\xi}{k+m}$. Tum vero ob $B = \infty$ longitudo tubi fieret infinita. Diminutio vero numeri k quum parum conferat ad campum augendum, videamus nunc etiam, an margo coloratus destrui possit, quem in finem esse deberet [§ 49]

$$0 = \frac{\pi}{\Phi} \cdot \frac{b}{p} + \frac{\pi'}{\Phi} \cdot \frac{c}{Bp}, \qquad 0 = -i \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{kk'},$$

quae aequatio ob $i < 0$ nullo modo subsistere potest; unde haec telescopiorum species vitio marginis colorati quam maxime laborabit. Ceterum pro semidia-

metro confusionis habebimus hanc aequationem [§ 42]:

$$\frac{\mu m x^3}{\alpha^3}\left(\lambda + \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{\lambda''}{B^3 m}\right) = \frac{1}{k^3}\text{[1]},$$

unde colligitur

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m\left(\lambda + \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3 k} + \frac{\lambda''}{B^3 m} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}k}\right)},$$

qui sumto $x = \frac{m}{50}$ dig. et [extra radicem] $k = 50$ abit in hunc valorem:

$$\alpha = m\sqrt[3]{\mu m\left(\lambda + \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3 k} + \frac{\lambda''}{B^3 m} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}k}\right)},$$

in qua expressione cum omnia membra sint positiva, nullum est dubium, quin distantia focalis α multo fiat maior quam casu duarum lentium.

COROLLARIUM 1

295. Cum iam sit animadversum, si $\mathfrak{B}$ caperetur $= 1$, longitudinem instrumenti in infinitum excrescere ideoque $\mathfrak{B}$ capi debere minus unitate, secundum membrum in aequatione valde increscet pariter ac ultimum, ex quo distantia α augebitur.

COROLLARIUM 2

296. Sin autem huic incommodo mederi vellemus augendo numerum k, tunc campus apparens restringeretur.

SCHOLION 1

297. Nullum igitur est dubium, quin haec prima istiusmodi telescopiorum species penitus sit repudianda, non solum, quod nimis exiguum campum ostendat tubusque fiat valde longus, sed eam ob causam praecipue, quod repraesentatio margine colorato sit inquinata; neque etiam reperimus huiusmodi telescopia unquam usu fuisse recepta. Interim tamen casum quendam in sequente exemplo proponamus.

---

1) Notandum est litteram k dextro latere aequationis adhibitam plane differre a quantitate k sinistro latere aequationis posita. E. Ch.

EXEMPLUM

298. Si sumatur $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$ et $k = 2$, telescopium huius generis describere pro multiplicatione quacunque m.

Cum igitur hinc sit $B = 4$, erunt elementa

$$b = \frac{1}{2}\alpha, \quad \beta = 2\alpha, \quad c = \frac{4\alpha}{m}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{2}{5}\alpha \quad \text{et} \quad r = \frac{4\alpha}{m}$$

et [intervalla]

$$\alpha + b = \frac{3}{2}\alpha, \quad \beta + c = 2\alpha + \frac{4\alpha}{m},$$

quorum summa $\frac{7}{2}\alpha + \frac{4\alpha}{m}$ dat tubi longitudinem.

Tum vero reperitur $i = \frac{-15}{11 + 4m}$ et semidiameter campi $\Phi = \frac{4\xi}{11 + 4m}$ seu in mensura anguli $\Phi = \frac{3437}{11 + 4m}$ minut., qui non multo est minor quam campus ordinarius. Pro loco oculi vero erit $O = \frac{4m + 11}{mm} \cdot \alpha$. Denique vero pro distantia focali α habebimus

$$\alpha = m\sqrt[3]{\mu m}\left(\lambda + \frac{\lambda' \cdot 125}{128} + \frac{\lambda''}{64m} + \frac{5\nu}{32}\right),$$

ubi circiter est $\mu = 1$ et $\nu = \frac{1}{5}$; quare, si litteris λ, λ', λ'' valor minimus, scilicet 1, tribuatur, erit

$$\alpha = m\sqrt[3]{m}\left(2 + \frac{1}{128} + \frac{1}{64m}\right),$$

$$\alpha = m\sqrt[3]{\left(\left(2 + \frac{1}{128}\right)m + \frac{1}{64}\right)} \text{ dig.};$$

hinc, si esset $m = 25$, erit

$$\alpha = 25\sqrt[3]{50\tfrac{27}{128}} = 92{,}23 \text{ dig.}$$

hincque tota longitudo erit $= 340$ dig. $= 28$ ped. 4 dig., quae longitudo ratione multiplicationis utique tam est magna, ut in praxi nullo modo admitti possit, etiamsi vitium marginis colorati non adesset.

SCHOLION 2

299. Cum igitur hinc nihil in usum practicum trahi possit haecque species simplicissima penitus reiici debeat, ad species simpliciores progrediamur, quae scilicet oriuntur, si tribus lentibus insuper una lens quarta adiungatur, ex quo variae species nascentur, prouti haec nova lens vel inter obiectivam et priorem imaginem vel inter priorem et posteriorem vel inter hanc posteriorem et lentem ocularem constituatur; quos ergo casus seorsim hic evolvi conveniet.

PROBLEMA 2

300. *Si inter lentem obiectivam et primam imaginem nova lens ponatur, indolem horum telescopiorum indagare eorumque constructionem describere.*

SOLUTIO

Cum hic quatuor lentes sint, statuantur ternae fractiones ut semper

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{d} = -R,$$

et quia in primum intervallum nulla imago cadit, retinebit P valorem positivum, reliquae vero Q et R fient negativae.

Quare ponatur $Q = -k$ et $R = -k'$, ut fiat multiplicatio $m = Pkk'$ elementaque nostra sint

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \quad c = -\frac{B\alpha}{Pk}, \quad d = -\frac{BC\alpha}{Pkk'} = -\frac{BC\alpha}{m}, \quad \beta = -\frac{B\alpha}{P}, \quad \gamma = -\frac{BC\alpha}{Pk};$$

$$p = \alpha, \quad q = -\frac{\mathfrak{B}\alpha}{P}, \quad r = -\frac{B\mathfrak{C}\alpha}{Pk}, \quad s = -\frac{BC\alpha}{m},$$

unde prodeunt intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \gamma + d = -\frac{BC\alpha}{Pk}\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$$

sicque patet $B\alpha$ esse debere negativum ut et $BC\alpha$, ideoque C debet esse positivum; unde, si $\alpha > 0$, debet esse $P > 1$, $B < 0$ et $C > 0$, sin autem $\alpha < 0$, debet esse $P < 1$, $B > 0$ et $C > 0$.

Nunc, cum pro campo apparente sit

$$\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m-1},$$

statuatur

$$\pi = -\omega\xi, \quad \pi' = i\xi, \quad \pi'' = -\xi,$$

ut sit

$$\Phi = \frac{\omega + i + 1}{m-1}\xi = M\xi$$

existente $M = \frac{\omega + i + 1}{m-1}$. Atque statim pro loco oculi sequitur

$$O = -\frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{s}{m} = -\frac{1}{M}\cdot\frac{BC\alpha}{mm},$$

quae distantia per conditiones superiores iam est positiva. Aequationes autem pro litteris π supra datae praebent

$$\frac{\mathfrak{B}\pi}{\Phi} - 1 = -\frac{\mathfrak{B}\omega}{M} - 1 = -P, \quad \frac{\mathfrak{C}i}{M} + \frac{\omega}{M} + 1 = -Pk,$$

unde colligitur

$$\omega = \frac{(P-1)(i+1)}{\mathfrak{B}(m-1) - P + 1},$$

ut maneat $\mathfrak{B}$ indefinitum, et

$$\mathfrak{C} = \frac{-(1+Pk)M - \omega}{i};$$

quae quantitas cum debeat esse positiva, debet esse vel i negativum vel, si esset i positivum, deberet esse

$$-(1+Pk)M - \omega > 0 \quad \text{sive} \quad -(1+Pk)\left(\frac{\omega + i + 1}{m-1}\right) - \omega > 0$$

seu

$$-\omega(m + Pk) - (1+Pk)(i+1) > 0,$$

unde patet fractionem ω negativam esse debere, ita ut hinc campus apparens diminuatur.

Videamus iam, an marginem coloratum tollere vel huic aequationi satisfacere possimus:

$$0 = +\omega\cdot\frac{1}{P} - \frac{i}{Pk} + \frac{1}{Pkk'},$$

unde colligimus

$$0 = \omega - \frac{i}{k} + \frac{1}{kk'} \quad \text{adeoque} \quad k' = \frac{-1}{k\omega - i} = \frac{1}{i - k\omega},$$

qui valor debet esse positivus adeoque $k\omega - i < 0$, de quo deinceps videbimus. Nunc adhuc aequationem pro confusione aperturae tollenda contemplemur, quae sequenti modo exhibebitur:

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m}\left(\lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{1}{B^3\mathfrak{C}Pk}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) - \frac{\lambda'''}{B^3Cm}\right),$$

pro qua expressione hactenus sumsimus $x = \frac{m}{50}$ dig. et [extra radicem] $k = 50$.

COROLLARIUM 1

301. Pro diiudicandis litteris ω et i, utrum valores habere queant positivos, considerandae sunt hae duae formulae:

$$\text{I.} \quad \mathfrak{C} = \frac{-(1 + Pk)M - \omega}{i},$$

$$\text{II.} \quad k' = \frac{1}{i - k\omega},$$

ex quarum prima patet ambas litteras i et ω simul positivas esse non posse, quia alioquin $\mathfrak{C}$ foret negativum, quae littera tamen valorem positivum habere debet. Ex secunda vero evidens est fieri non posse, ut sit $\omega > 0$ et $i < 0$, quia alioquin k' prodiret negativum.

COROLLARIUM 2

302. Ex his duobus casibus sequitur litteram ω nunquam positivam esse posse, quae conditio ita enunciari potest, ut secunda lens semper campum apparentem imminuere debeat.

COROLLARIUM 3

303. Cum igitur ω semper debeat esse negativum, ponatur $\omega = -\zeta$, ut sit $\mathfrak{B}\zeta = (1 - P)M$ et $M = \frac{1 + i - \zeta}{m - 1}$. Nostrae vero formulae, necessario

positivae, erunt

$$\text{I.}\quad \mathfrak{C} = \frac{-(1+Pk)M+\zeta}{i},$$

$$\text{II.}\quad k' = \frac{1}{i+k\zeta},$$

unde, si sit i fractio positiva, debet esse $\zeta > (1+Pk)M$. Sin autem i sit fractio negativa, puta $i = -y$, per primam debet esse $\zeta < (1+Pk)M$ et simul $\zeta > \frac{y}{k}$.

COROLLARIUM 4

304. Praeterea etiam manifestum est fractionem $\zeta = -\omega$ nunquam evanescere posse; si enim sit $i > 0$, debet esse $\zeta > (1+Pk)M$. Sin autem sit $i < 0$ seu $i = -y$, debet esse $\zeta > \frac{y}{k}$.

COROLLARIUM 5

305. Quia casu $i = -y$ duplicem invenimus conditionem, priorem $\zeta < (1+Pk)M$ et posteriorem $\zeta > \frac{y}{k}$, ex earum comparatione necesse est, ut sit $(1+Pk)M > \frac{y}{k}$ seu $y < (1+Pk)kM$.

SCHOLION

306. Tot autem casus diversi ideo potissimum habent locum, quod in solutione problematis non definitur, utrum lens obiectiva habeat suam distantiam focalem α positivam an negativam. Utrumque autem usu venire potest, siquidem circa litteram P nihil aliud praecipitur, nisi quod sit positiva ideoque eius valor a ciphra usque in infinitum augeri queat.

Quamdiu autem littera P intra limites 0 et 1 continetur, α valorem habere debet negativum seu lens obiectiva erit concava et littera B positiva ideoque et $\mathfrak{B}$; unde fit $\zeta = \frac{(1-P)M}{\mathfrak{B}}$ adeoque positivum. Sin autem statuatur $P = 1$, quo casu binae lentes priores sibi immediate iunguntur, fit $\zeta = 0$, qui casus, uti vidimus, penitus excluditur, ita ut lens obiectiva duplicata esse nequeat. At si sit P maior unitate, necessario fit α positivum seu lens obiectiva convexa; unde B fit negativum neque vero hinc definitur $\mathfrak{B}$. At quia novimus esse ω negativum seu ζ positivum, ob $\zeta = -\frac{(P-1)M}{\mathfrak{B}}$ patet litteram

$\mathfrak{B}$ negativam esse debere, hincque porro concluditur $-B$ esse unitate minus. Si denique P sit numerus infinitus, secunda lens in ipso loco prioris imaginis constituetur et ex eius distantia focali q concluditur

$$\mathfrak{B} = -P \cdot \frac{q}{\alpha} = -\infty \quad \text{hincque} \quad B = -1;$$

atque sic contemplati sumus obiter omnes casus pro littera P, qui autem nunc diligentius perpendi merentur. Ante omnia autem notari convenit sumi non posse $P = 0$, quia iam primum intervallum fieret infinitum, nisi distantia α esset infinite parva, quod autem foret aeque absurdum, quia prima lens aperturam definitam admittere debet.

I. EVOLUTIO CASUS QUO $P < 1$

307. Pro hoc casu iam animadvertimus fore $\alpha < 0$; quae negatio ne turbet, ponamus $\alpha = -a$ eritque

$$b = \frac{a}{P}, \quad c = \frac{Ba}{Pk}, \quad d = \frac{BCa}{m}, \quad \beta = \frac{Ba}{P}, \quad \gamma = \frac{BCa}{Pk},$$

unde patet ambas litteras B et C debere esse positivas; unde litterae germanicae $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ non solum erunt quoque positivae, sed etiam unitate minores; quare, cum sit $\mathfrak{B}\zeta = (1 - P)M$, manifesto sequitur fore $\zeta > (1 - P)M$. Deinde ob

$$\mathfrak{C} = \frac{-(1 + Pk)M + \zeta}{i} \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{i + k\zeta}$$

non solum esse debet $\frac{-(1 + Pk)M + \zeta}{i} > 0$, sed etiam $\frac{-(1 + Pk)M + \zeta}{i} < 1$; quod quo clarius explicetur, duos casus examinari conveniet.

1. Si i sit positivum, ex valore $\mathfrak{C}$ nanciscimur has conditiones:

$$\zeta > (1 + Pk)M \quad \text{et} \quad \zeta < (1 + Pk)M + i;$$

conditio autem litterae k' sic sponte impletur. Quia autem iam invenimus $\zeta > (1 - P)M$, nunc inde patet esse debere

$$(1 + Pk)M + i > (1 - P)M \quad \text{ideoque} \quad i > -P(k + 1)M;$$

id quod semper est verum, dummodo i sit positivum, uti supponimus.

2. Si i sit negativum, ponatur $i=-y$ eritque

$$\mathfrak{C}=\frac{(1+Pk)M-\xi}{y}, \quad k'=\frac{1}{k\xi-y}.$$

Inde igitur sequuntur hae conditiones:

$$\zeta<(1+Pk)M, \quad \zeta>(1+Pk)M-y, \quad \text{hinc vero} \quad \zeta>\frac{y}{k};$$

at supra iam invenimus $\zeta>(1-P)M$, unde sequitur fore

$$(1+Pk)M>\frac{y}{k} \quad \text{sive} \quad y<(1+Pk)kM.$$

Isto igitur casu, quo $P<1$, fractio i tam positive capi poterit quam negative, ac si positive accipiatur, eius valor nulla limitatione restringi. Quare, cum i unitatem superare nequeat, poterit sine haesitatione statim poni $i=1$, ita ut pro campo apparente fiat $\Phi=\frac{2-\xi}{m-1}\cdot\xi$, dummodo ζ non superet unitatem.

Nulla autem ratio suadet capere i negativum, quia tum campus nimium diminueretur.

II. EVOLUTIO CASUS QUO $P>1$

308. Quia hic est α quantitas positiva ideoque b negativa, debet esse B negativum, at C ut ante positivum. Deinde etiam vidimus esse $\mathfrak{B}$ negativum ideoque $-B<1$; unde fit $\zeta=\frac{(1-P)M}{\mathfrak{B}}$ adeoque positivum, ubi tantum notetur $\mathfrak{B}$ tam parvum accipi non debere, ut ζ superet unitatem. Deinde habetur

$$\mathfrak{C}=\frac{-(1+Pk)M+\xi}{i} \quad \text{et} \quad k'=\frac{1}{i+k\xi};$$

ex quibus formulis plane eadem sequuntur, quae in casu praecedente sunt allata; unde videtur etiam statui posse $i=1$, dummodo ex valore pro ζ ante dato sit

$$\frac{1-P}{\mathfrak{B}}>1+Pk \quad \text{sive} \quad -\mathfrak{B}<\frac{P-1}{Pk+1} \quad \text{et} \quad -\mathfrak{B}>\frac{(P-1)M}{(1+Pk)M+1}.$$

III. EVOLUTIO CASUS QUO $P=\infty$

309. Hoc ergo casu, ut iam supra notavimus, erit

$$B=-1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}=-\frac{Pq}{\alpha}.$$

Nunc autem evidens est statui debere $k = 0$, ita tamen, ut sit $Pk = \theta$, ex quo elementa erunt

$$b = 0, \quad \beta = 0, \quad c = \frac{\alpha}{\theta}, \quad \gamma = \frac{C\alpha}{\theta}, \quad d = \frac{C\alpha}{m}.$$

Deinde, cum sit $\mathfrak{B}\zeta = (1 - P)M$, habebitur nunc $\zeta = \frac{M\alpha}{q}$, unde $q = \frac{M\alpha}{\xi}$. Deinde binae nostrae formulae erunt

$$\mathfrak{C} = \frac{-(1+\theta)M + \xi}{i} \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{i},$$

ubi, cum nihil impediat, quominus ponatur $i = 1$, erit hoc casu $k' = 1$ et $Pk = \theta = m$, ita ut sit $\mathfrak{C} = -(1 + m)M + \zeta$; ex quo valore hi limites colliguntur:

$$\zeta > (1 + m)M, \quad \zeta < (1 + m)M + 1;$$

at vero est

$$M = \frac{2 - \xi}{m - 1} \quad \text{ideoque} \quad \zeta > \frac{(1 + m)(2 - \xi)}{m - 1} \quad \text{ideoque} \quad \zeta > \frac{m + 1}{m},$$

qui valor, etsi unitatem superat, tamen in praxi locum habere potest, dummodo littera ξ in eadem ratione diminuatur, ita ut $\zeta\xi$ non superet valorem $\frac{1}{4}$, siquidem $\frac{1}{4}$ pro apertura maxima accipiatur. Sin autem sumsissemus $i = \frac{1}{2}$, prodiisset $k' = 2$ hincque $m = 2\theta$ seu $\theta = \frac{m}{2}$ sicque haberemus

$$\zeta > \left(1 + \frac{1}{2}m\right)M \quad \text{et} \quad \zeta < \left(1 + \frac{1}{2}m\right)M + \frac{1}{2};$$

quia autem est $M = \frac{3 - 2\xi}{2(m - 1)}$, prior conditio dat

$$\zeta > \left(1 + \frac{1}{2}m\right)\left(\frac{3 - 2\xi}{2(m - 1)}\right) \quad \text{sive} \quad \zeta > \frac{2 + m}{2m}$$

ideoque multo magis $\zeta > \frac{1}{2}$. Ex quo patet campum apparentem ob valorem ζ magis imminui quam ob valorem i augeri sicque eum semper aliquanto minorem fieri quam in tubis astronomicis communibus. Supra iam observavimus talem lentis locum in praxi vitari oportere.

IV. EVOLUTIO CASUS PRORSUS SINGULARIS QUO $i=0$

310. Cum sit $i=0$ et $\mathfrak{C}$ unitatem superare nequeat, ob

$$\mathfrak{C}i=-(1+Pk)M+\zeta$$

erit

$$\zeta=(1+Pk)M \quad \text{hincque} \quad Pk=\frac{\zeta}{M}-1;$$

at est $k'=\frac{1}{k\zeta}$; ob $Pkk'=m$ erit $Pk=mk\zeta$ ideoque $P=m\zeta$. Quare ille valor pro Pk inventus huic aequalis positus dabit

$$mk\zeta=\frac{\zeta}{M}-1$$

hincque

$$k=\frac{1}{Mm}-\frac{1}{m\zeta},$$

ex quo porro habetur

$$k'=\frac{Mm}{\zeta-M};$$

quia vero est $M=\frac{1-\zeta}{m-1}$, nascetur

$$k=\frac{m-1}{(1-\zeta)m}-\frac{1}{m\zeta}=\frac{m\zeta-1}{m(1-\zeta)\zeta}, \quad k'=\frac{m(1-\zeta)}{m\zeta-1}$$

et

$$P=m\zeta \quad \text{atque} \quad Pk=\frac{m\zeta-1}{1-\zeta};$$

qui valores cum neutiquam a $\mathfrak{C}$ pendeant, hoc insigne lucrum iam sumus adepti, ut littera C penitus arbitrio nostro relinquatur, sicque efficere poterimus, ut posteriores distantiae determinatrices ipsaeque lentes posteriores, quae hactenus plerumque nimis parvae sunt repertae, nunc datae magnitudinis fieri queant, in quo certe maximum commodum consistit; quod denique ad litteras $\mathfrak{B}$ et B attinet, duos casus considerari oportet, prouti $P=m\zeta$ fuerit vel unitate minor vel unitate maior.

I. Sit igitur $m\zeta<1$ seu $\zeta<\frac{1}{m}$ et habebitur

$$\mathfrak{B}=\frac{(1-m\zeta)M}{\zeta}=\frac{(1-m\zeta)(1-\zeta)}{(m-1)\zeta};$$

ibi autem vidimus $\mathfrak{B}$ esse debere positivum et unitate minus; quocirca hoc

casu, quo $\zeta < \frac{1}{m}$, ob $\mathfrak{B} = \frac{(1-m\zeta)(1-\zeta)}{(m-1)\zeta}$ debet esse

$$(1-m\zeta)(1-\zeta) < (m-1)\zeta \quad \text{seu} \quad m\zeta^2 - 2m\zeta + 1 < 0;$$

unde colligitur ζ capi debere intra limites $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{2m}$.

Cum autem litterae k et k' necessario sint positivae, ad hoc necessario requiritur, ut sit $m\zeta > 1$ seu $\zeta > \frac{1}{m}$; ob quam conditionem casus primus statim excludi debuisset.

II. Sit igitur $P (= m\zeta) > 1$ seu $\zeta > \frac{1}{m}$, prouti valores k et k' postulant, atque ad casum secundum recurrere debemus; pro quo cum iterum sit

$$\mathfrak{B} = \frac{(1-m\zeta)(1-\zeta)}{(m-1)\zeta}$$

simulque notetur $\mathfrak{B}$ esse debere negativum sine ulla alia conditione, nisi quod esse debeat $\zeta < 1$, uti quidem ratio campi absolute postulat, ita ut iam contineatur intra limites 1 et $\frac{1}{m}$, manifestum autem est expedire, ut ζ quam minime limitem $\frac{1}{m}$ superet. Ex quo operae pretium videtur duo exempla adiungere, in quorum altero ζ limiti priori $\frac{1}{m}$, in altero vero limiti posteriori 1 propius accipiatur.

EXEMPLUM 1

311. Pro casu postremo, quo $i = 0$, si statuatur $\zeta = \frac{2}{m}$, telescopium inde oriundum describere.

Hoc igitur casu habebimus

$$\mathfrak{B} = \frac{-(m-2)}{2(m-1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-(m-2)}{3m-4}.$$

Porro

$$P = 2, \quad k = \frac{m}{2(m-2)}, \quad k' = m-2, \quad M = \frac{m-2}{m(m-1)},$$

unde distantiae nostrae determinatrices ob α positivum erunt

$$b = \frac{-\alpha}{2}, \quad c = \frac{(m-2)^2}{m(3m-4)}\alpha, \quad d = \frac{m-2}{m(3m-4)}C\alpha,$$

$$\beta = \frac{m-2}{2(3m-4)}\alpha, \quad \gamma = \frac{(m-2)^2}{m(3m-4)}C\alpha$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{m-2}{4(m-1)}\alpha, \quad r = \frac{(m-2)^2}{m(3m-4)}\mathfrak{C}\alpha, \quad s = \frac{m-2}{m(3m-4)}C\alpha.$$

Tum vero intervalla lentium

$$\alpha + b = \frac{1}{2}\alpha, \quad \beta + c = \frac{(m-2)(3m-4)}{2m(3m-4)}\alpha = \frac{m-2}{2m}\alpha,$$

$$\gamma + d = \frac{(m-1)(m-2)}{m(3m-4)}C\alpha$$

et distantia oculi

$$O = \frac{m-1}{m(3m-4)}C\alpha$$

et campi semidiameter

$$\Phi = \frac{m-2}{m(m-1)}\cdot\xi;$$

quae si in mensura angulorum desideretur, sumi potest $\xi = 859$ min. ob $\xi = \frac{1}{4}$.

Distantia denique focalis lentis obiectivae α definiri debet ex formula in problemate data [p. 13], ubi notandum est ipsius λ' coëfficientem circiter fore 4, et ipsius λ'' coëfficiens semper maior erit quam 27; qui termini cum omnes sint positivi, evidens est pro α semper ingentem valorem reperiri, ita ut haec telescopia valde longa evadant.

EXEMPLUM 2

312. Pro casu postremo, quo $i = 0$, si sumatur $\zeta = \frac{1}{2}$, telescopium inde oriundum describere.

Hoc igitur casu erit

$$\mathfrak{B} = \frac{-(m-2)}{2(m-1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-(m-2)}{3m-4},$$

$$P = \frac{m}{2}, \quad k = \frac{2(m-2)}{m}, \quad k' = \frac{m}{m-2}, \quad M = \frac{1}{2(m-1)},$$

unde distantiae determinatrices

$$b = -\frac{2\alpha}{m}, \quad c = \frac{\alpha}{3m-4}, \quad \beta = \frac{2(m-2)\alpha}{m(3m-4)}, \quad \gamma = \frac{C\alpha}{3m-4}, \quad d = \frac{m-2}{(3m-4)m}C\alpha$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{m-2}{m(m-1)}\alpha, \quad r = \frac{\mathfrak{C}\alpha}{3m-4}, \quad s = \frac{m-2}{(3m-4)m} C\alpha$$

et intervalla

$$\alpha + b = \frac{m-2}{m}\alpha, \quad \beta + c = \frac{\alpha}{m}, \quad \gamma + d = \frac{2(m-1)C\alpha}{m(3m-4)}$$

et

$$O = \frac{2(m-1)(m-2)C\alpha}{mm(3m-4)};$$

nunc vero campi semidiameter erit tantum

$$\Phi = \frac{430}{m-1} \text{ minut.}$$

In formula autem pro distantia α definienda notandum est coëfficientem λ' fore $\frac{16}{m}$, ipsius vero $\lambda'' > \frac{27}{m\mathfrak{C}^3}$, siquidem multiplicatio sit praemagna; unde patet pro α valorem multo minorem prodire, ita ut hinc telescopia satis idonea obtinerentur, si modo campus non esset tam exiguus.

COROLLARIUM 1

313. Quia pro lente tertia sumsimus i hincque et $\pi' = 0$, eius apertura ex formulis generalibus [§ 23] definiri debet, cuius semidiameter erit $= \frac{rx}{B\mathfrak{C}\alpha}$, quae ergo pro priori exemplo fit $\frac{m-2}{m}x$, pro secundo autem $\frac{x}{m-2}$; unde, si sumatur $x = \frac{m}{50}$ dig., hic semidiameter erit circiter $\frac{1}{50}$ dig., quae ergo lens commodissime locum diaphragmatis tenebit.

COROLLARIUM 2

314. Si quasi medium sumendo inter duo exempla allata statuatur $\zeta = \frac{1}{\sqrt{m}}$, erit

$$P = \sqrt{m} \quad \text{et} \quad k = 1 \quad \text{et} \quad k' = \sqrt{m},$$

porro

$$\mathfrak{B} = -\frac{(\sqrt{m}-1)}{\sqrt{m}+1}, \quad B = \frac{-(\sqrt{m}-1)}{2\sqrt{m}}, \quad M = \frac{1}{m+\sqrt{m}}$$

atque hinc

$$b = -\frac{\alpha}{\sqrt{m}}, \quad \beta = \frac{+(\sqrt{m}-1)\alpha}{2m}, \quad c = \frac{\sqrt{m}-1}{2m}\alpha,$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{m}-1}{2m}C\alpha, \quad d = \frac{\sqrt{m}-1}{2m\sqrt{m}}C\alpha,$$

$$\alpha + b = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\alpha, \quad \beta + c = \frac{\sqrt{m}-1}{m}\alpha,$$

$$\gamma + d = \frac{\sqrt{m}-1}{2m}C\alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \frac{m-1}{2m\sqrt{m}}C\alpha$$

et distantia oculi

$$O = +\frac{(m-1)}{2mm}\alpha;$$

quare longitudo telescopii erit

$$\frac{m-1}{m}\left(1 + \frac{1+\sqrt{m}\cdot C}{2m}\right)\alpha$$

ac denique semidiameter campi

$$\Phi = \frac{\xi}{m+\sqrt{m}} = \frac{859}{m+\sqrt{m}} \text{ minut.}$$

et semidiameter aperturae tertiae lentis

$$= \frac{x}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{50} \text{ dig.}$$

SCHOLION

315. Simili modo, quo hic casum $i = 0$ expedivimus, etiam quaestio in genere pro quovis valore ipsius i resolvi poterit; ex aequatione enim $\mathfrak{C}i = -(1 + Pk)M + \zeta$ quum deducatur

$$Pk = \frac{\zeta - \mathfrak{C}i}{M} - 1$$

et quia est $M = \frac{1+i-\zeta}{m-1}$, fiet

$$Pk = \frac{-\mathfrak{C}i(m-1) + m\zeta - i - 1}{1+i-\zeta}.$$

Verum ob $k' = \frac{1}{i + k\zeta}$ erit etiam

$$Pk = \frac{m}{k'} = m(i + k\zeta),$$

unde colligimus

$$-\frac{\mathfrak{C}i}{M} + \frac{m\zeta - i - 1}{1 + i - \zeta} = mi + mk\zeta$$

hincque

$$k = -\frac{\mathfrak{C}i}{Mm\zeta} + \frac{m\zeta + mi\zeta - mii - mi - i - 1}{(1 + i - \zeta)m\zeta},$$

et quia est

$$i + k\zeta = -\frac{\mathfrak{C}i}{Mm} + \frac{m\zeta - i - 1}{(1 + i - \zeta)m},$$

erit

$$k' = \frac{m(1 + i - \zeta)}{m\zeta - \mathfrak{C}i(m-1) - i - 1}$$

ideoque

$$Pk = \frac{m\zeta - \mathfrak{C}i(m-1) - i - 1}{1 + i - \zeta} \quad \text{et} \quad P = \frac{m}{kk'};$$

quia nunc k' debet esse quantitas positiva, necesse est, ut sit

$$m\zeta > \mathfrak{C}i(m-1) + i + 1;$$

unde facto calculo semper reperietur esse $P > 1$, ita ut, etiamsi non sit $i = 0$, tamen solus casus secundus supra memoratus locum habeat. Quia autem hypothesis $i = 0$ tam commodam et concinnam suppeditavit resolutionem, nulla plane est ratio, cur litteram i sive positivam sive negativam assumere vellemus, cum pro commodo nullum inde lucrum sit exspectandum. Praeter concinnitatem calculi autem duo commoda, quae nobis ista hypothesis $i = 0$ largitur, maximi sunt momenti, quorum alterum, uti vidimus, in hoc consistit, ut litterae $\mathfrak{C}$ et C arbitrio nostro permittantur hocque modo nimia lentis ocularis parvitas evitari queat; alterum vero commodum huic nihil cedere est censendum, propterea quod tam exigua apertura lenti tertiae sine ullo sive campi sive claritatis detrimento tribui possit, ut omne lumen peregrinum tutius quam per diaphragmata ordinaria excludatur.

PROBLEMA 3

316. *Si telescopium huius generis ita ex quatuor lentibus sit componendum, ut binae mediae ambae inter imaginem priorem et posteriorem constituantur, indolem eius indagare eiusque constructionem describere.*

SOLUTIO

Positis igitur ut ante nostris fractionibus

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R$$

hic litterae P et R debent esse negativae manente Q positiva; quare si ponatur $P = -k$ et $R = -k'$, ut sit $m = Qkk'$, elementa nostra ita se habebunt:

$$b = \frac{\alpha}{k}, \quad \beta = \frac{B\alpha}{k}, \quad c = \frac{-B\alpha}{Qk}, \quad \gamma = \frac{-BC\alpha}{Qk}, \quad d = \frac{-BC\alpha}{Qkk'} = \frac{-BC\alpha}{m}$$

hincque intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{ideoque} \quad \alpha > 0,$$

$$\beta + c = \frac{B\alpha}{k}\left(1 - \frac{1}{Q}\right), \quad \text{hinc} \quad B\left(1 - \frac{1}{Q}\right) > 0,$$

$$\gamma + d = \frac{-BC\alpha}{Qk}\left(1 + \frac{1}{k'}\right), \quad \text{hinc} \quad BC < 0.$$

Pro campo apparente statuamus

$$\pi = -\omega\xi, \quad \pi' = +i\xi \quad \text{et} \quad \pi'' = -\xi,$$

ut fiat

$$\Phi = \frac{\omega + i + 1}{m - 1} \cdot \xi = M\xi$$

existente

$$M = \frac{\omega + i + 1}{m - 1},$$

atque hinc primo erit distantia oculi

$$O = \frac{-\pi''}{\Phi} \cdot \frac{d}{m} = \frac{d}{Mm};$$

deinde margo coloratus evanescet, si fuerit

$$0 = \frac{\omega}{P} + \frac{i}{PQ} + \frac{1}{PQR} \quad \text{seu} \quad 0 = -\frac{\omega}{k} - \frac{i}{Qk} + \frac{1}{Qkk'},$$

unde concludimus

$$k' = \frac{1}{i + Q\omega} \quad \text{et} \quad m = \frac{Qk}{i + Q\omega};$$

tum vero considerari oportet sequentes aequationes:

$$-\frac{\mathfrak{B}\omega}{M} = 1 + k, \quad \frac{\mathfrak{C}i}{M} + \frac{\omega}{M} = -1 - Qk$$

seu

$$\mathfrak{C}i = -(1 + Qk)M - \omega$$

et

$$\mathfrak{B}\omega = -(1 + k)M,$$

quarum evolutio commode generaliter institui non potest, sed casus magis particulares contemplari conveniet. Verum casus extremi duo habentur, alter, quo lens in ipsam imaginem priorem, alter vero, quo in imaginem posteriorem cadit. Illo scilicet fit $Q = 0$, hoc vero $Q = \infty$; inter hos autem quasi medius quidam praecipue perpendi meretur oriundus ex valore $Q = 1$; quos casus deinceps seorsim evolvamus. Hic igitur tantum superest formulam adiungere pro confusione destruenda, ex qua scilicet distantia α determinatur,

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m\left(\lambda + \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{1}{B^3\mathfrak{C}Qk}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) - \frac{\lambda'''}{B^3C^3m}\right)}\text{[1]}.$$

COROLLARIUM 1

317. Quoniam invenimus $k' = \frac{1}{i + Q\omega}$, ob $Q > 0$ evidens est ambas litteras i et ω simul negativas esse non posse. Neque vero etiam ambae possunt esse positivae; si enim ω esset positivum, foret $\mathfrak{B}$ ideoque et B negativum hincque ob $BC < 0$ deberet esse C positivum ideoque et $\mathfrak{C}$ positivum ac proinde $\mathfrak{C}i$ positivum, id quod fieri non posse ex valore pro $\mathfrak{C}i$ supra dato manifestum est.

1) Confer, quae de vario valore litterae k p. 9 adnotaverimus. E. Ch.

COROLLARIUM 2

318. Cum igitur ambae litterae ω et i nec positivae nec negativae esse queant, necesse est alteram esse positivam, alteram negativam. Si sit $\omega > 0$, modo vidimus esse debere $\mathfrak{B} < 0$ et $B < 0$ hincque $C > 0$. Sin autem sit $\omega < 0$, erit $\mathfrak{B} > 0$; de B vero hinc nihil definitur. Ex altera vero aequatione posito $\omega = -\zeta$ erit

$$\mathfrak{C}i = -(1 + Qk)M + \zeta,$$

unde intelligitur, si fuerit $\zeta > (1 + Qk)M$, fore $\mathfrak{C} > 0$, sin autem sit $\zeta < (1 + Qk)M$, fore $\mathfrak{C} < 0$. Prius autem evenit, si fuerit $1 + k > (1 + Qk)\mathfrak{B}$ seu $\mathfrak{B} < \frac{1+k}{1+Qk}$, posterius vero, si $\mathfrak{B} > \frac{1+k}{1+Qk}$; hoc ipso autem posteriori casu cum sint $\mathfrak{C}$ et C negativa, debet esse B positivum ideoque $\mathfrak{B} < 1$, ex quo sequitur fore $Q > 1$.

EVOLUTIO CASUS PRIMI QUO $Q = 0$

319. Quia est $Q = 0$, erit secundum intervallum $= -\frac{B\alpha}{Qk} - c$ ideoque $\beta = 0$, ergo vel $B = 0$ vel $k = \infty$. At prius fieri nequit; foret enim $\mathfrak{B} = 0$ et q seu distantia focalis secundae lentis $= 0$, quod est absurdum. Restat ergo, ut sit $k = \infty$, et cum sit $q = \frac{\mathfrak{B}\alpha}{k}$, erit $\mathfrak{B} = \frac{kq}{\alpha} = \infty$ atque hinc $B = -1$. Ex quo sequitur ob $BC < 0$ fore $C > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$. Cum vero sit $Q = 0$ et $k = \infty$, productum Qk debet esse finitum; quare statuatur $Qk = l$, ut sit

$$b = 0, \quad \beta = 0, \quad c = \frac{+\alpha}{l}, \quad \gamma = -\frac{C\alpha}{l}, \quad d = \frac{C\alpha}{m} \quad \text{porroque} \quad O = \frac{C\alpha}{Mm^2}.$$

Destructio vero marginis colorati postulat $k' = \frac{1}{i}$, ita ut iam i certo sit fractio positiva et $m = \frac{l}{i}$. Ambae autem aequationes nostrae fundamentales dabunt, prior

$$\mathfrak{B}\omega = -kM \quad \text{sive} \quad \frac{kq\omega}{\alpha} = -kM \quad \text{ideoque} \quad \omega = -\frac{M\alpha}{q},$$

posterior vero

$$\mathfrak{C}i = -(1 + l)M + \frac{M\alpha}{q};$$

quod cum debeat esse positivum, oportet esse $\frac{\alpha}{q} > l + 1$ sive $q < \frac{\alpha}{1 + l}$. Quia $\omega < 0$, scribatur $\omega = -\zeta$ et litteras i et ζ in calculo retineamus eritque

$$l = mi, \quad q = \frac{M\alpha}{\zeta} \quad \text{ac proinde} \quad \mathfrak{C}i = -(1+mi)M + \zeta.$$

Unde, cum sit $\mathfrak{C} > 0$ simulque $\mathfrak{C} < 1$, nanciscimur hos limites:

$$1.\ \zeta > (1+mi)M, \qquad 2.\ \zeta < (1+mi)M + i;$$

cum iam sit

$$M = \frac{1+i-\zeta}{m-1},$$

hoc valore substituto ex istis limitibus colliguntur sequentes:

$$1.\ \zeta > \frac{1+mi}{m}$$

et

$$2.\ \zeta < \frac{1+mi}{m} + \frac{(m-1)i}{m(1+i)} \quad \text{sive} \quad \zeta < \frac{1+2mi+mii}{m(1+i)},$$

ex quibus, si littera i pro lubitu capiatur indeque ζ debite assumatur, omnia pro telescopio erunt determinata; quo autem melius de campo iudicare possimus, loco ζ seorsim utrumque limitem substituamus, ac prior quidem limes dabit $M = \frac{1}{m}$, alter vero limes maior $M = \frac{1}{m(1+i)}$; inter quos valores littera M ideoque et campus apparens continebitur.

Pro definienda autem distantia α formula superior hanc induet formam

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m\left(\lambda + * + \frac{1}{\mathfrak{C}l}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) + \frac{\lambda'''}{C^3 m}\right)}^{1)}.$$

De hoc autem casu iterum valet, quod supra [§ 232] commemoravimus, scilicet ob impuritates minimas lentis in loco imaginis constitutae repraesentationem obiectorum inquinari.

De cetero autem campus semper maior est semissi campi simplicis, quem vero defectum nova lente adiicienda facile supplere licet.

EVOLUTIO CASUS QUO $Q = \infty$

320. Hoc ergo casu fit secundum intervallum $\beta + c = \frac{B\alpha}{k}$; unde sequitur B positivum ideoque C negativum. Tum vero, quia $c = -\frac{\beta}{Q}$, erit $c = 0$ et

1) Littera k ante radicem designat numerum 50; signo $*$ denotatur membrum $\frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right)$ ob $\mathfrak{B} = \infty$ et $k = \infty$ evanescere. E. Ch.

$\gamma = 0$. Cum autem huius lentis distantia focalis sit $r = \mathfrak{C}c$, erit $\mathfrak{C} = \infty$ hincque $C = -1$, et quia $B > 0$, fiet $\mathfrak{B} > 0$ at < 1.

Cum porro sit $m = QkK'$ neque vero $k = 0$, necesse est, ut sit $k' = 0$, ex quo ponatur $Qk' = l$, ut fiat $m = kl$. Iam vero ex margine colorato habemus $k' = \frac{1}{i + Q\omega} = \frac{l}{Q}$; unde sequitur $\omega = \frac{1}{l}$ hincque positivum. Cum autem $\mathfrak{B}$ sit positivum, ex prima aequatione fundamentali sequitur

$$\omega = \frac{-(1+k)M}{\mathfrak{B}},$$

unde oporteret esse ω quantitatem negativam; quod cum illi conclusioni adversetur, manifestum est hunc casum esse impossibilem seu potius hoc casu marginem coloratum destrui non posse. Ceterum hoc casu lens tertia in ipso loco secundae imaginis foret constituta; quod cum contradictionem involvat, hinc facile intelligitur tertiam lentem notabili intervallo ante imaginem posteriorem constitutam esse debere.

EVOLUTIO CASUS PRORSUS SINGULARIS QUO $Q = 1$ ET RADII PER BINAS LENTES PRIORES TRANSMISSI ITERUM FIUNT PARALLELI

321. Hoc ergo casu telescopium erit quasi ex duobus tubis astronomicis compositum certo quodam intervallo ab eodem axe a se invicem remotis, ad quod genus vulgaria telescopia terrestria dicta sunt referenda. Cum igitur sit $Q = 1$, ne intervallum secundum $\beta + c$ ob $\beta = -Qc$ evanescat, debet esse tam β quam c infinitum, id quod eveniret, tam si $k = 0$, quam si $B = \infty$; prius autem hic locum habere nequit, quia intervallum primum etiam fieret infinitum; ex quo necesse est, ut sit $B = \infty$ et $\mathfrak{B} = 1$. Ne autem tertium intervallum evadat $= \infty$, productum BC debet esse quantitas finita et negativa; quare statuatur $BC = -\theta$ ideoque $C = -\frac{\theta}{B} = 0$. Ut autem intervallum medium valorem finitum, puta $= \eta\alpha$, obtineat, quantitas B non tanquam vere infinita, sed tantum praegrandis considerari debet, donec scilicet conditionibus praescriptis satisfecerimus, unde etiam valor ipsius Q aliquantillum ab unitate discrepare reperietur; quoniam enim esse debet

$$\frac{B\alpha}{k}\left(1 - \frac{1}{Q}\right) = \eta\alpha,$$

inde fit

$$Q = \frac{B}{B - \eta k} = 1 + \frac{\eta k}{B};$$

tum vero etiam erit

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} \quad \text{et} \quad C = -\frac{\theta}{B} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{-\theta}{B-\theta} = \frac{-\theta}{B}.$$

His notatis nostrae aequationes fundamentales erunt

$$\omega = \frac{-(1+k)M(1+B)}{B} \quad \text{et} \quad +\frac{\theta i}{B} = +(1+k)M + \frac{\eta k^2 M}{B} + \omega,$$

in qua si loco ω ex priore substituatur valor inventus, obtinebitur

$$\frac{\theta i}{B} = \frac{\eta k^2 M - (1+k)M}{B} \quad \text{hincque} \quad i = \frac{(\eta k^2 - k - 1)M}{\theta}$$

et nunc licebit ponere $B = \infty$, $\mathfrak{B} = 1$, $C = \mathfrak{C} = 0$, ita tamen, ut sit $BC = -\theta$.

Destructio autem marginis colorati praebet $k' = \frac{1}{i+\omega}$, et ob $kk' = m$ colligetur $i + \omega = \frac{k}{m}$; quia deinde est $M = \frac{1+i+\omega}{m-1}$, fiet nunc $M = \frac{m+k}{m(m-1)}$, et si valores pro i et ω inventi substituantur in formula $i + \omega = \frac{k}{m}$, orietur haec aequatio:

$$\frac{k}{m} = \frac{(\eta k^2 - (1+k)(1+\theta))M}{\theta}$$

et pro M substituto valore

$$\theta(m-1)k = (\eta k^2 - (1+k)(1+\theta))(m+k),$$

unde colligitur

$$\theta = \frac{(\eta k^2 - k - 1)(m+k)}{k^2 + 2mk + m},$$

et quia θ debet esse numerus positivus, necesse est, ut sit $\eta > \frac{k+1}{k^2}$ et quidem ita, ut θ non fiat nimis exiguum; quandoquidem nunc elementa nostra ita exprimentur:

$$b = \frac{\alpha}{k}, \quad \beta = \infty, \quad c = \infty, \quad \gamma = \frac{\theta\alpha}{k}, \quad d = \frac{\theta\alpha}{m},$$

$$\alpha + b = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \beta + c = \eta\alpha, \quad \gamma + d = \theta\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)$$

indeque distantia oculi

$$O = \frac{\theta\alpha}{Mm^2} = \frac{(m-1)\theta\alpha}{m(m+k)}$$

atque distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{\alpha}{k}, \quad r = \frac{\theta\alpha}{k}, \quad s = \frac{\theta\alpha}{m}.$$

Distantia autem α definiri debet ex aequatione sequente:

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m}\left(\lambda + \frac{\lambda'}{k} + \frac{\lambda''}{\theta^3 k} + \frac{\lambda'''}{\theta^3 m}\right)^{1)},$$

quare, ne valor ipsius α nimis fiat magnus, convenit k [sub radice] magnum assumi, tum vero θ non multo minus unitate; quod ad prius attinet, etiam campus apparens suadet litterae k quam maximum valorem dare, quia tum M continuo magis crescit; verum probe notandum est in formula $\Phi = M\xi$ pro littera ξ eatenus tantum valorem $\frac{1}{4}$ assumi posse, quatenus litterae i et ω unitatem non superant, ita ut, si vel i vel ω unitatem superaret, tum ξ in eadem ratione diminui deberet. Quam ob causam maximi momenti est in eum valorem ipsius k inquirere, unde prodeat $i = 1$. Posito autem $i = 1$ reperimus

$$1 + \omega = \frac{k}{m} \quad \text{seu} \quad m(m-2) = k^2 + 2mk,$$

cuius aequationis resolutio praebet

$$k = -m + \sqrt{2m(m-1)}.$$

Hic scilicet valor ipsius k nobis praebet $i = 1$ et

$$\omega = \frac{k-m}{m} = \frac{-2m + \sqrt{2m(m-1)}}{m},$$

qui valor est negativus et unitate minor, unde pro campo apparente habebitur

$$\Phi = \frac{\sqrt{2m(m-1)}}{m(m-1)}\cdot\xi = \sqrt{\frac{2}{m(m-1)}}\cdot\xi;$$

sin autem k adhuc maiorem adipisceretur valorem, prodiret quidem i maius unitate, sed tum ξ ita sumi deberet, ut fieret $i\xi = \frac{1}{4}$ seu $\xi = \frac{1}{4i}$, sicque pro campo prodiret $\Phi = \frac{1+i+\omega}{m-1}\cdot\frac{1}{4i}$; unde calculum instituenti innotescit campum continuo diminui eo magis, quo valor ipsius k illum terminum superaverit. Maxime igitur hic casus lucrosus est, si capiatur

$$k = -m + \sqrt{2m(m-1)},$$

unde fit

$$k' = \frac{m + \sqrt{2m(m-1)}}{m-2}.$$

1) Vide notam p. 9. E. Ch.

SCHOLION

322. Quia in antecedente problemate casus maxime memorabilis est deductus ponendo $i = 0$, suspicari quis posset etiam hic talem positionem institui convenire. Quamobrem hic ostendamus in hoc problemate neque positionem $i = 0$ neque $\omega = 0$ locum habere posse.

Primo enim si esset $\omega = 0$, ob $k' = \frac{1}{i + Q\omega}$ deberet esse $i > 0$; at ob $\omega = 0$ prima aequatio

$$\mathfrak{B}\omega = -(1 + k)M$$

subsistere nequit, nisi sit $\mathfrak{B} = \infty$ ideoque $B = -1$; iam ob $BC < 0$ debet esse C positivum ideoque $\mathfrak{C}$ etiam > 0, ex quo patet alteram aequationem

$$\mathfrak{C}i = -(1 + Qk)M$$

plane subsistere non posse; sicque evictum est sumi non posse $\omega = 0$.

Simili modo ostendetur numerum i evanescere non posse; tum enim ob $k' = \frac{1}{i + Q\omega}$ deberet esse $\omega > 0$ hincque posterior aequatio

$$\mathfrak{C}i = -(1 + Qk)M - \omega$$

subsistere nequit, nisi sit $\mathfrak{C}i$ quantitas finita negativa ideoque $\mathfrak{C} = \infty$; unde fit $C = -1$ et hinc ob $BC < 0$ fiet $B > 0$ simulque $\mathfrak{B} > 0$, id quod primae aequationi

$$\mathfrak{B}\omega = -(1 + k)M$$

manifesto contradicit; ex quo perspicuum est etiam numerum i non posse capi $= 0$.

Neque ergo praeter tres casus hic commemoratos ullus alius hic perpendi meretur atque postremus adeo tantis commodis reliquos omnes antecedit, ut is solus dignus videatur, qui in praxin deducatur; non solum enim maximum campum aperit, sed etiam pro α valorem non nimis magnum largitur, quoniam in illa formula radicali cubica termini post λ sequentes omnes fiunt valde parvi eoque minores, quo maior fuerit multiplicatio, quoniam proxime fit $k = m(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}m$. Tum vero hic etiam numerus θ arbitrio nostro permittitur, quo efficere possumus, ut lentes postremae non fiant nimis exiguae; sumto autem θ pro lubitu quantitas η sequenti aequatione definietur; quia enim supra invenimus

$$\theta = \frac{(\eta k^2 - k - 1)(m + k)}{k^2 + 2mk + m},$$

ob $m(m-2) = 2mk + k^2$ et $m + k = \sqrt{2m(m-1)}$ erit

$$\theta = \frac{(\eta k^2 - k - 1)\sqrt{2}}{\sqrt{m(m-1)}}$$

hincque

$$\eta = \frac{k+1}{k^2} + \frac{\theta\sqrt{m(m-1)}}{k^2\sqrt{2}},$$

ex quo valore intervallum secundae et tertiae lentis innotescit.

PROBLEMA 4

323. *Si telescopium huius generis ita ex quatuor lentibus sit componendum, ut una lens inter imaginem secundam et ocularem constituatur, indolem eius indagare eiusque constructionem describere.*

SOLUTIO

Quia igitur hic prima imago inter lentem primam et secundam, secunda vero imago inter lentem secundam et tertiam cadit, litterae P et Q erunt negativae manente sola R positiva. Quare si statuatur $P = -k$ et $Q = -k'$, erunt elementa nostra

$$b = \frac{\alpha}{k}, \quad \beta = \frac{B\alpha}{k}, \quad c = \frac{B\alpha}{kk'}, \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{kk'} \quad \text{et} \quad d = \frac{-BC\alpha}{kk'R} = \frac{BC\alpha}{m}.$$

Hincque intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{ideoque } \alpha \text{ positivum,}$$

$$\beta + c = \frac{B\alpha}{k}\left(1 + \frac{1}{k'}\right), \quad \text{ergo } B > 0 \text{ et } \mathfrak{B} > 0 \text{ et simul } \mathfrak{B} < 1.$$

$$\gamma + d = \frac{BC\alpha}{kk'}\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad \text{ergo} \quad C\left(1 - \frac{1}{R}\right) > 0.$$

Pro loco autem oculi erit $O = \frac{d}{Mm}$; quae ut sit positiva, debet esse $d > 0$, unde haec nova resultat conditio, ut sit $C < 0$, quae conditio cum antecedente

coniuncta dat $1-\frac{1}{R}<0$ ideoque $R<1$. Quodsi iam ponamus

$$\pi=-\omega\xi,\quad \pi'=i\xi \text{ et } \pi''=-\xi,$$

ut fiat

$$\Phi=\frac{\omega+i+1}{m-1}\cdot\xi=M\xi$$

existente

$$M=\frac{\omega+i+1}{m-1},$$

aequationes nostrae fundamentales erunt

$$\mathfrak{B}\omega=-(1+k)M \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}i=-(1+kk')M-\omega,$$

ex quarum priore statim ob $\mathfrak{B}>0$ liquet fore $\omega<0$.

Destructio autem marginis colorati postulat, ut sit

$$0=\frac{\omega}{P}+\frac{i}{PQ}+\frac{1}{PQR}$$

ideoque

$$0=-\frac{\omega}{k}+\frac{i}{kk'}+\frac{1}{kk'R}, \quad \text{unde} \quad R=\frac{1}{\omega k'-i};$$

ut ergo R prodeat positivum, i necessario debet esse numerus negativus. Statuamus ergo $\omega=-\zeta$ et $i=-y$, ut iam sit pro campo apparente

$$M=\frac{1-y-\zeta}{m-1} \quad \text{ideoque} \quad y+\zeta<1.$$

Cum igitur sit

$$R=\frac{1}{y-k'\zeta} \quad \text{atque hinc} \quad m=\frac{kk'}{y-k'\zeta},$$

notandum est ob $R<1$ et $R=\frac{m}{kk'}$ esse debere $kk'>m$; hinc, quia est $y=k'\zeta+\frac{kk'}{m}$, erit $y>1$ ideoque multo magis $y+\zeta>1$; quod cum sit absurdum, patet huius problematis casum locum habere non posse.

SCHOLION

324. Cum igitur hoc problema penitus sit excludendum, cum aeque parum conditioni marginis colorati satisfacere possit atque primum tribus tantum lentibus adhibitis, relinquuntur nobis tantum problema secundum ac tertium. Quia autem ex secundo casus prorsus singularis ibi annotatus

maxime reliquis omnibus antecellit, quemadmodum etiam ex tertio casus ultimus prae ceteris maximam attentionem meretur, hinc constituemus duas praecipuas species telescopiorum tertii generis easque seorsim ita pertractabimus, ut primo ostendamus, quemadmodum utraque una vel pluribus lentibus ex eodem vitro adiiciendis, deinde etiam ex diverso vitro, ad maiorem perfectionis gradum evehi queant. Harum duarum vero specierum posterior ideo potissimum est notanda, quia telescopia communia terrestria dicta quasi in se complectitur; revera enim ab iis differt plurimum, quatenus a vitiis, quibus haec instrumenta, uti vulgo fabricari solent, laborant, est liberata; unde si etiam plures lentes in subsidium vocare nolimus, hinc regulae dari poterunt haec telescopia terrestria ita perficiendi, ut maior perfectio exspectari nequeat. Prior autem species, quae longe aliam lentium ocularium dispositionem postulat, olim prorsus fuit ignota ac nuper demum a solertissimo DOLLONDO in praxin introduci est coepta. Quatenus scilicet lentibus minima apertura praeditis est usus; neque tamen a sola experientia summus perfectionis gradus, cuius haec species est capax, sperari poterat. Hoc tamen facile est animadversum, nisi insuper una lens adiungatur, campum nimis fore parvum, quam ut ei acquiescere queamus. Vidimus enim campum semper aliquanto esse minorem quam in tubis astronomicis vulgaribus, ad quod remedium etiam in sequentibus recurremus. Denique circa hanc speciem annotari convenit nos in posterum iis mensuris esse usuros, quae in paragrapho 314 sunt statutae, ubi scilicet posuimus $\zeta = \frac{1}{\sqrt{m}}$, cum inde aptissimae ad praxin determinationes obtineri videantur.

CAPUT II

DE TELESCOPIIS TERRESTRIBUS COMMUNIBUS EORUMQUE PERFECTIONE

DEFINITIO

325. *Character huiusmodi telescopiorum in hoc consistit, quod radii per duas priores lentes transmissi iterum inter se fiant paralleli, ita ut haec telescopia ex duobus tubis astronomicis sint composita.*

COROLLARIUM 1

326. Cum haec telescopia ex quatuor lentibus constent, quarum tam binae priores quam binae posteriores secundum rationem tuborum astronomicorum sibi sunt iunctae, multiplicatio telescopii est in ratione composita ambarum multiplicationum, quas ambo isti tubi astronomici producerent.

COROLLARIUM 2

327. Scilicet si lentis primae ponatur distantia focalis $= p$, secundae $= q$, tertiae $= r$ et quartae $= s$, binae priores lentes ad intervallum $= p + q$ dispositae multiplicationem praebent $= \frac{p}{q}$, binae posteriores vero ad intervallum $= r + s$ dispositae multiplicationem $= \frac{r}{s}$; telescopium compositum multiplicationem producet $= \frac{pr}{qs}$.

SCHOLION 1

328. Statim ab initio binae lentes posteriores inter se factae sunt aequales et quidem eiusdem distantiae focalis ac lens secunda, quae tres

lentes oculares vocari solent, ita ut tum tubus posterior nullam plane multiplicationem producat ob $r = s = q$. Quanto autem intervallo hi duo tubi sive lentes secunda et tertia a se invicem debeant esse remotae, auctores non satis definiunt; plerumque autem hoc spatium fieri iubent $= 2q$, ita ut, cum etiam sit $r = s = q$, tota longitudo futura sit $= p + 5q$. Deinde autem artifices observarunt haec telescopia meliorem effectum producere, si tres lentes posteriores continuo certa ratione diminuantur, id quod egregie convenit cum iis, quae supra de hoc telescopiorum genere annotavimus, ubi non solum multo maiorem campum iis conciliavimus, quam vulgaris constructio suppeditat, sed etiam id inprimis effecimus, ut margo coloratus penitus evanesceret. Quocirca praecepta pro constructione ante inventa hic ordine proponi conveniet.

Constructio telescopiorum terrestrium ex quatuor lentibus compositorum pro quavis multiplicatione m

Quanta statui debeat lentis obiectivae distantia focalis, deinceps definiemus, quando pro singulis lentibus sequentibus numeros λ, λ', λ'', λ''' assignaverimus.

I. Si igitur $p = \alpha$ denotet distantiam focalem lentis obiectivae, eius figuram utique ex numero $\lambda = 1$ peti conveniet, ita ut, si ratio refractionis sit $n = 1{,}55$, habeatur:

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma} = 0{,}6145\,p \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho} = 5{,}2438\,p; \end{cases}$$

pro eius apertura semidiameter hactenus posita est $\frac{m}{50}$ dig. Sin autem vel maior claritas desideretur vel minor sufficiat, loco 50 vel numerus maior vel minor assumi poterit.

Intervallum lentis secundae a prima debet esse $= p + q$, ubi valor ipsius q mox indicabitur.

II. Pro lente secunda, si eius distantia focalis ponatur $= q$, in superiore capite vidimus sumi convenire $q = \frac{p}{k}$ existente $k = -m + \sqrt{2m(m-1)}$; et quia pro eius apertura debet esse $\omega = \frac{-(1+k)(m+k)}{m(m-1)}$, qui valor pro maioribus multiplicationibus erit circiter $\omega = -\frac{3}{8}$, unde haec apertura non fit

maxima, etiam non opus est, ut haec lens fiat utrinque aeque convexa, sed sufficiet, ut pro ea sumatur $\lambda' = 1$, unde huius lentis constructio erit:

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{q}{\varrho} = 5{,}2438\,q\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{q}{\sigma} = 0{,}6145\,q.\end{cases}$$

Et aperturae semidiameter si capiatur $= \frac{1}{4}\cdot\frac{q}{\sigma}$, conditioni praescriptae satisfaciet.

Distantia autem tertiae lentis a secunda, quae supra est posita $= \eta\alpha$, definita est

$$\eta = \frac{k+1}{k^2} + \frac{\theta\sqrt{m(m-1)}}{k^2\sqrt{2}},$$

ubi numerus θ arbitrio nostro relinquitur, quem autem neque multo maiorem neque minorem unitate sumi conveniet.

III. Pro tertia lente, quoniam ea maximam aperturam recipere debet ob $i = 1$ ideoque utrinque aeque convexa confici debet, erit $\lambda'' = 1{,}6299$, et cum eius distantia focalis sit $r = \frac{\theta p}{k}$, erit radius utriusque faciei $= 1{,}10\,r$, cuius pars quarta dabit semidiametrum aperturae.

Ab hac lente distantia ad quartam est

$$= r + s = \theta\alpha\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right).$$

IV. Quia quarta lens etiam maximam aperturam admittere ideoque etiam utrinque aequaliter convexa esse debet, pro ea etiam erit $\lambda''' = 1{,}6299$; unde, cum eius distantia focalis sit $s = \frac{\theta\alpha}{m}$, erit radius utriusque faciei $= 1{,}10\,s$ et $\frac{1}{4}s$ dabit semidiametrum eius aperturae; tum vero distantia ab hac lente ad oculum erit

$$= \frac{s}{Mm} = \frac{s(m-1)}{\sqrt{2m(m-1)}} = \frac{s\sqrt{(m-1)}}{\sqrt{2m}}.$$

V. Hocque telescopium campum ostendet, cuius semidiameter est

$$\Phi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m(m-1)}}\cdot\xi$$

seu in mensura angulorum

$$\Phi = \frac{1215}{\sqrt{m(m-1)}}\ \text{min.}$$

VI. Tota autem huius instrumenti longitudo ad oculum usque erit

$$=\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}+\frac{\theta(m-1)\sqrt{2(m-1)}}{k^2\sqrt{m}}\right)p.$$

VII. Pro distantia autem focali p, si desideretur claritas $y=\frac{1}{50}$ dig. et pro gradu distinctionis $k=50$[1]), ut sit $kx=m$, ob litteram μ parum ab unitate deficientem debebit sumi in digitis

$$p=m\sqrt[3]{m}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1{,}6299}{\theta^3}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)\right);$$

ac si tam minore claritate, puta $y=\frac{1}{70}$, et minore gradu distinctionis, puta $k=35$, acquiescere velimus, iste valor ipsius p ad semissem redigi poterit.

EXEMPLUM

329. Si huiusmodi telescopium tantum novies multiplicare debeat, ut sit $m=9$, reperietur $k=3$ hincque

$$q=\frac{p}{3},\quad r=\frac{\theta p}{3}\quad \text{et}\quad s=\frac{\theta p}{9},$$

unde erit totius telescopii longitudo $=\left(\frac{16}{9}+\frac{32}{27}\theta\right)p$ et semidiameter campi $=2^0 23'$.

Tum vero distantia focalis p ita assumi debebit

$$p=9\sqrt[3]{9}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1{,}6299}{\theta^3}\right);$$

sumto ergo $\theta=1$, ut longitudo fiat $=\frac{80}{27}p$ seu propemodum $=3p$, colligetur $p=9\sqrt[3]{18{,}5196}$ seu propemodum $p=24$ dig., unde longitudo tota $=72$ dig. $=6$ ped.; quae longitudo, uti animadvertimus, ad semissem reduci posset.

SCHOLION 2

330. Verum etiam longitudo trium pedum pro tam exigua multiplicatione enormis videbitur, praecipue cum vulgo eiusmodi telescopia circumferantur multo breviora magisque amplificantia. At praecipua causa huius longitudinis in campo apparente est sita, quem maximum producere sumus conati; qui

1) Hic valor attinet ad eam litteram k, quae in formula pro α § 321 ante radicem est posita. E. Ch.

sine dubio multo maior est, quam in vulgaribus eiusmodi instrumentis deprehenditur. Interim tamen destructio marginis colorati non parum ad longitudinem confert perinde ac insignis claritatis et distinctionis gradus, qui nobis erat propositus, ex quo instrumenta secundum haec praecepta parata plurimum antecellent iis, quae vulgo circumferuntur et quae plerumque tot tantisque vitiis laborant, ut in praxi vix tolerari queant. Non mediocriter autem eorum longitudo diminui posset, si loco lentis obiectivae sive lens duplicata sive etiam triplicata, quales supra ex principio minimi sunt inventae, substituantur, siquidem tum valor ipsius λ priori casu ad $\frac{1}{5}$, posteriore vero ad $\frac{1}{24}$ reduceretur; ita, si in nostro exemplo λ fuisset $=\frac{1}{5}$, invenissemus $p=20$ dig. et telescopii longitudo adhuc ad 5 pedes excrevisset. Sin autem lente obiectiva triplicata usi essemus, ut fuisset $\lambda=\frac{1}{24}$, prodiisset $p=19\frac{1}{3}$ dig.; unde patet a lentibus illis duplicatis et triplicatis, quales supra sunt descriptae, atque adeo a lentibus perfectis, ubi foret $\lambda=0$, haud notabile decrementum longitudinis exspectari posse, saltem pro minoribus multiplicationibus, ubi post signum radicale cubicum termini λ sequentes admodum sunt notabiles; pro maioribus autem multiplicationibus maius lucrum esset futurum, quod vix tamen ad semissem redire posset. Quare pro hac specie telescopiorum praecipue in id est incumbendum, ut lens obiectiva ita duplicetur vel triplicetur, ut non solum confusio ab ipsa oriunda, sed et ea, quae a sequentibus lentibus omnibus nascitur, ad nihilum redigatur; tum enim distantiam p maiorem statui non erit necesse, quam apertura ob claritatem requisita postulat; quem casum in sequente problemate ita evolvamus, ut exiguum spatium intra lentes priores admittamus.

PROBLEMA 1

331. *In hac telescopiorum specie loco lentis obiectivae eiusmodi binas lentes ex eodem vitro parandas substituere, ut omnis confusio etiam a reliquis lentibus oriunda ad nihilum redigatur sicque his telescopiis minima longitudo concilietur.*

SOLUTIO

Cum igitur hic habeantur quinque lentes, statuamus nostras fractiones

$$\frac{\alpha}{b}=-P,\quad \frac{\beta}{c}=-Q,\quad \frac{\gamma}{d}=-R \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{e}=-S.$$

Quarum litterarum prima P proxime erit $=1$; secunda Q erit negativa

$= -k$; tertia R etiam erit $= 1$, sed ita tamen, ut intervallum tertium $\gamma + d$ fiat quantitas finita, scilicet $\eta\alpha$; denique vero erit $S = -k'$, ita ut nostra elementa futura sint

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \quad c = -\frac{B\alpha}{Pk}, \quad d = \frac{BC\alpha}{PkR} = -\infty, \quad e = \frac{BCD\alpha}{PkRk'} = \frac{BCD\alpha}{m},$$

$$\beta = -\frac{B\alpha}{P}, \quad \gamma = -\frac{BC\alpha}{Pk} = \infty, \quad \delta = \frac{BCD\alpha}{PkR}.$$

Hincque intervalla

$$1. \quad \alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \frac{\alpha}{50},$$

uti supra [§ 292] iam assumsimus, ita ut sit $P = 1\frac{1}{49}$,

$$2. \quad \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$3. \quad \gamma + d = -\frac{BC\alpha}{Pk}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = \eta\alpha,$$

ubi scilicet est $C = \infty$ hincque $\frac{1}{R} = 1 + \frac{\eta Pk}{BC}$.

4. Quia erat $C = \infty$, debet esse D infinite parvum, ita ut sit $CD = -\theta$, eritque hoc intervallum

$$\delta + e = -\frac{B\theta\alpha}{PkR}\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$$

existente multiplicatione $m = PkRk'$ seu proxime $m = kk'$.

Quia autem fieri posset, ut distantiam α negativam capi expediret, statuamus primum intervallum $\alpha + b = \zeta\alpha$ fietque $P = \frac{1}{1-\zeta}$, ubi notandum, si α esset quantitas negativa, tam ζ quam η negative accipi debere; semper autem necesse erit, ut sit $-B\alpha > 0$ seu $B\alpha < 0$ et $\theta > 0$, uti initio iam assumsimus, ubi posuimus $CD = -\theta$.

Cum nunc pro campo apparente sit

$$\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m-1},$$

statuamus

$$\pi = -v\xi, \quad \pi' = \omega\xi, \quad \pi'' = -\xi \quad \text{et} \quad \pi''' = \xi,$$

ut sit

$$\Phi = \frac{v + \omega + 2}{m-1}\xi = M\xi$$

existente

$$M = \frac{v + \omega + 2}{m - 1};$$

ex quibus pro loco oculi colligimus

$$O = \frac{e}{Mm}$$

existente

$$e = \frac{-B\theta\alpha}{m}.$$

Consideremus nunc nostras formulas fundamentales

$$1.\quad \mathfrak{B}v = (P - 1)M,$$
$$2.\quad \mathfrak{C}\omega = -(1 + Pk)M - v,$$
$$3.\quad \mathfrak{D} = -(1 + PkR)M - v - \omega,$$

de quibus observari oportet fore primam $\mathfrak{B}v = \frac{\zeta}{1-\zeta}M$; sicque valor v ob duplicem causam fiet quantitas minima, ita ut etiam mv adhuc sit valde parvum. Pro secunda autem, quia est $C = \infty$, erit $\mathfrak{C} = \frac{C}{C+1} = 1 - \frac{1}{C}$; pro tertia autem, quia est $D = 0$ seu potius $D = -\frac{\theta}{C}$, erit $\mathfrak{D} = \frac{-\theta}{C-\theta} = \frac{-\theta}{C}$; deinde etiam hic recordari oportet esse

$$R = \frac{BC}{BC + \eta Pk} = 1 - \frac{\eta Pk}{BC};$$

quia igitur ex secunda aequatione ob $\mathfrak{C} = \frac{C}{1+C}$ est

$$\omega = -(1 + Pk)M\left(1 + \frac{1}{C}\right) - v\left(1 + \frac{1}{C}\right),$$

si hic valor in tertia aequatione substituatur, erit

$$-\frac{\theta}{C} = -(1 + Pk)M + \frac{\eta P^2k^2M}{BC} - v + (1 + Pk)M\left(1 + \frac{1}{C}\right) + v\left(1 + \frac{1}{C}\right),$$

ubi, cum termini finiti se mutuo destruant, ex infinite parvis concluditur fore

$$\theta = -\frac{\eta P^2k^2M}{B} - (1 + Pk)M - v,$$

unde fit

$$\eta = -\frac{(1+Pk)B}{P^2k^2} - \frac{B\theta}{P^2k^2M} - \frac{Bv}{P^2k^2M},$$

ubi terminus ultimus tuto omitti potest.

Destructio porro marginis colorati postulat hanc aequationem:

$$0 = \frac{v}{P} + \frac{\omega}{PQ} + \frac{1}{PQR} + \frac{1}{PQRS},$$

quae pro nostro casu fit

$$0 = v - \frac{\omega}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{kk'},$$

unde neglecto termino primo deducitur

$$k' = \frac{1}{\omega + 1},$$

et ob $m = Pkk'$ erit

$$m = \frac{Pk}{\omega + 1}.$$

Cum autem sit

$$\omega = -(1 + Pk)M \quad \text{et} \quad M = \frac{\omega + 2}{m - 1},$$

neglecto termino v fiet

$$(m - 1)\omega = -(1 + Pk)(\omega + 2)$$

hincque

$$\omega = \frac{-2(1 + Pk)}{m + Pk} \quad \text{atque} \quad M = \frac{2}{m + Pk}.$$

Quare, cum sit $m = \frac{Pk}{\omega + 1}$, substituto valore ipsius ω obtinemus

$$m - \frac{2m(1 + Pk)}{m + Pk} = Pk$$

hincque

$$mm - 2m = P^2k^2 + 2Pkm,$$

quae m^2 utrinque addito praebet $2m(m - 1) = (Pk + m)^2$ ideoque

$$Pk = -m + \sqrt{2m(m - 1)}.$$

Hoc ergo valore pro Pk assumto pro campo apparente adipiscemur maximum

valorem, qui erit

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{2m(m-1)}}\cdot \xi,$$

et in mensura angulorum ob $\xi = \frac{1}{4}$ erit

$$\Phi = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ min.}$$

Nunc autem praecipuum opus superest in eo consistens, ut binae priores lentes ita definiantur, ut formula pro semidiametro confusionis inventa penitus evanescat, unde sequens aequatio erit resolvenda:

$$0 = \lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{\lambda''}{B^3Pk} - \frac{\lambda'''}{B^3\theta^3Pk} - \frac{\lambda''''}{B^3\theta^3m}$$

seu

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3P} - \frac{\lambda''}{B^3Pk} - \frac{\lambda'''}{B^3\theta^3Pk} - \frac{\lambda''''}{B^3\theta^3m} - \frac{\nu}{\mathfrak{B}BP},$$

in qua aequatione, ut ante iam vidimus, sumi potest $\lambda'' = 1$, et quia duae postremae lentes debent esse utrinque aequaliter convexae, erit pro vitro communi $\lambda''' = \lambda'''' = 1{,}6299$. Ex hac vero aequatione vel λ vel λ' definiri debet, prouti coefficiens ipsius λ' maior est unitate sive minor. Ceterum notandum est omnes quantitates hic praeter litteras B et $\mathfrak{B}$ satis esse determinatas, ita ut in hoc negotio tantum litterae B et $\mathfrak{B}$ arbitrio nostro permittantur; in quo duo casus sunt perpendendi, alter, quo $\mathfrak{B}$ est fractio unitate maior, puta $\frac{1+i}{i}$, alter vero, quo est unitate minor, puta $= \frac{i}{1+i}$.

Primo si sit $\mathfrak{B} = \frac{1+i}{i}$, erit $B = -1-i$ ideoque numerus negativus; quo ergo casu α debet esse positivum seu prima lens convexa, secunda vero concava, pro qua valor λ' determinari debet et quidem ex hac aequatione:

$$\lambda' = \frac{(1+i)^3P\lambda}{i^3} + \frac{\lambda''}{i^3k} + \frac{\lambda'''}{i^3\theta^3k} + \frac{P\lambda''''}{i^3\theta^3m} + \frac{(1+i)\nu}{i^2},$$

ubi sumto $\lambda = 1$ evidens est λ' fieri unitate maius.

At secundo si sit $\mathfrak{B} = \frac{i}{1+i}$, erit $B = i$ ideoque positivum; unde distantia α fiet negativa sive prima lens concava, secunda vero convexa, quo casu numerus λ definiri oportet per hanc aequationem:

$$\lambda = \frac{(1+i)^3\lambda'}{i^3P} + \frac{\lambda''}{i^3Pk} + \frac{\lambda'''}{i^3\theta^3Pk} + \frac{\lambda''''}{i^3\theta^3m} + \frac{(1+i)\nu}{i^2P}$$

atque hic sumi poterit $\lambda' = 1$; λ vero unitate maius fiet.

Perspicuum igitur est simili fere modo, quo in priore casu λ' definitur, in secundo casu litteram λ definiri, propterea quod proxime est $P=1$, quandoquidem invenimus $P=\frac{1}{1-\zeta}$; ubi notetur priore casu, quo α est positivum, sumi posse $\zeta=\frac{1}{50}$, ut sit $P=\frac{50}{49}$; eodemque modo etiam η erit positivum, quemadmodum etiam nostra formula posito $B=-1-i$ declarat, scilicet

$$\eta=\frac{(1+Pk)(1+i)}{P^2k^2}+\frac{(1+i)\theta}{P^2k^2M}.$$

Pro altero autem casu, quo α est quantitas negativa, sumi debet $\zeta=-\frac{1}{50}$, ut sit $P=\frac{50}{51}$; ob eandemque rationem etiam η fiet negativum, scilicet

$$\eta=-\frac{i(1+Pk)}{P^2k^2}-\frac{\theta i}{P^2k^2M}.$$

COROLLARIUM 1

332. Cum tollendo marginem coloratum pervenerimus ad hanc aequationem:

$$Pk=-m+\sqrt{2m(m-1)},$$

qua ob P datum valor ipsius k determinatur, hinc habebimus

$$M=\frac{2}{\sqrt{2m(m-1)}} \quad \text{et} \quad \omega=\frac{-2(1+Pk)}{\sqrt{2m(m-1)}}$$

atque hinc

$$\eta=\frac{-(1+Pk)B}{P^2k^2}-\frac{B\theta\sqrt{2m(m-1)}}{2P^2k^2}.$$

COROLLARIUM 2

333. Cum sit $C=\infty$, $D=0$ et $CD=-\theta$, fient nostra elementa

$$b=\frac{-\alpha}{P},\quad c=\frac{-B\alpha}{Pk},\quad d=-\infty,\quad e=\frac{-B\theta\alpha}{m},$$

$$\beta=\frac{-B\alpha}{P},\quad \gamma=\infty,\quad \delta=\frac{-B\theta\alpha}{Pk}$$

hincque distantiae focales

$$p=\alpha,\quad q=\frac{-\mathfrak{B}\alpha}{P},\quad r=\frac{-B\alpha}{Pk},\quad s=\delta=\frac{-B\theta\alpha}{Pk},\quad t=\frac{-B\theta\alpha}{m};$$

tum vero lentium intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \zeta\alpha, \quad \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\gamma + d = \eta\alpha, \quad \delta + e = -B\theta\alpha\left(\frac{1}{Pk} + \frac{1}{m}\right)$$

ac denique distantia oculi

$$O = \frac{-B\theta\alpha\sqrt{2m(m-1)}}{2m^2},$$

ubi notetur litteram θ arbitrio nostro permitti, quo caveri poterit, ne ultimae lentes fiant nimis parvae.

COROLLARIUM 3

334. Ex his perspicitur, quo maior capiatur littera B, eo maius prodire secundum intervallum cum sequentibus hincque longitudinem telescopii eo magis augeri; at littera B eo maior evadit, quo propius littera $\mathfrak{B}$ ad unitatem accedit; sive enim sit $\mathfrak{B} = \frac{1+i}{i}$ sive $\mathfrak{B} = \frac{i}{1+i}$, aucto numero i augetur numerus B; quare, cum littera $\mathfrak{B}$ etiam nunc arbitrio nostro permittatur, neutiquam expediet eam unitati nimis propinquam statui neque tamen etiam conveniet pro i numerum valde parvum assumi, veluti dimidium vel fractionem adhuc minorem; tum enim ex ultima aequatione numerus vel λ vel λ' prodiret nimis magnus, scilicet adeo maior quam 27. Unde concluditur numerum i ad minimum unitate maiorem capi debere.

COROLLARIUM 4

335. Hic igitur commodum cum incommodo compensatur; si enim i unitate minus caperetur, obtineremus commodum brevitatis tubi, contra vero nimis magnus valor numeri λ vel λ' insigne esset incommodum; sin autem numerum i unitate multo maiorem sumeremus, obtineremus quidem commodum, ut λ vel λ' parum unitatem excederent, contra vero tubus fieret nimis longus.

COROLLARIUM 5

336. Sin autem optio detur inter valores $\frac{1+i}{i}$ et $\frac{i}{1+i}$ pro $\mathfrak{B}$ assumendos retinente i in utroque eundem valorem, tunc λ vel λ' eundem fere valorem

nancisceretur. Verum priore casu cum fiat $B = -1 - i$, longitudo tubi maior prodiret, quam altero casu, quo esset $B = i$; quam ob rem semper consultius est posteriorem casum eligere, quo lens prima est concava et secunda convexa, quam priorem, ubi vicissim lens prima esset convexa, secunda vero concava.

SCHOLION 1

337. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus $i = 2$ et $\mathfrak{B} = \frac{2}{3}$, ut fiat $B = 2$; tum igitur erit $P = \frac{50}{51}$ et elementa nostra sequenti modo se habebunt existente α quantitate negativa:

$$b = \frac{-51}{50}\alpha, \quad c = \frac{-2\alpha}{Pk}, \quad d = -\infty, \quad e = \frac{-2\theta\alpha}{m},$$

$$\beta = \frac{-2\alpha}{P} = \frac{-51\,\alpha}{25}, \quad \gamma = \infty, \quad \delta = \frac{-2\theta\alpha}{Pk}$$

existente $Pk = -m + \sqrt{2m(m-1)}$; tum vero distantiae focales erunt

$$p = \alpha, \quad q = \frac{-51\,\alpha}{75}, \quad r = \frac{-2\alpha}{Pk}, \quad s = \frac{-2\theta\alpha}{Pk} \quad \text{et} \quad t = \frac{-2\theta\alpha}{m},$$

at intervalla lentium

$$\alpha + b = -\frac{1}{50}\alpha, \quad \beta + c = -\frac{51}{25}\alpha - \frac{2\alpha}{Pk},$$

$$\gamma + d = \eta\alpha = \frac{-2(1+Pk)\alpha}{P^2k^2} - \frac{\theta\sqrt{2m(m-1)}}{P^2k^2}\alpha,$$

$$\delta + e = \frac{-2\theta\alpha}{m} - \frac{2\theta\alpha}{Pk} = \frac{-2\theta\alpha}{Pkm}\sqrt{2m(m-1)}$$

et distantia oculi

$$O = \frac{-\theta\alpha\sqrt{2m(m-1)}}{mm},$$

quibus factis campi semidiameter erit

$$\Phi = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ min.}$$

Pro apertura autem tertiae lentis notandum est esse $\omega = \frac{-2(1+Pk)}{\sqrt{2m(m-1)}}$, ita ut, si m sit numerus satis magnus, fiat $\omega = -\frac{10}{17}$; unde, cum haec lens non

maximam aperturam, sed minorem, quae sit ad maximam ut 10 : 17, requirat, sufficiet pro hac lente sumsisse $\lambda'' = 1$; quare, si et $\lambda' = 1$, at $\lambda''' = \lambda'''' = 1{,}6299$, pro lente obiectiva inveniemus

$$\lambda = \frac{27\cdot 51}{8\cdot 50} + \frac{1}{8\,Pk} + \frac{1{,}6299}{8\,\theta^3 Pk} + \frac{1{,}6299}{8\,\theta^3 m} + \frac{153\nu}{200}$$

existente $\nu = 0{,}2326$ pro refractione scilicet $n = 1{,}55$.

Hinc autem invento numero λ prima lens obiectiva concava ita construi debet, ut fiat

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{\alpha}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}}\\[2ex] \text{posterioris vero} & = \dfrac{\alpha}{\sigma + \tau\sqrt{\lambda - 1}}\end{cases}$$

existente $\varrho = 0{,}1907$, $\sigma = 1{,}6274$, $\tau = 0{,}9051$.

Pro secunda autem lente capi debebit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{2b}{2\varrho + \sigma}\\[2ex] \text{et posterioris} & = \dfrac{2b}{2\sigma + \varrho}\end{cases}$$

existente $b = -\frac{51}{50}\alpha$.

Pro tertia lente erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{c}{\varrho}\\[2ex] \text{et posterioris} & = \dfrac{c}{\sigma}\end{cases}$$

existente $c = \frac{-2\alpha}{Pk}$.

Pro quarta vero lente

$$\text{radius utriusque faciei} = 1{,}10\,s$$

et pro quinta lente

$$\text{radius faciei utriusque} = 1{,}10\,t.$$

Ad mensuras vero absolutas inveniendas consideretur in constructione lentium primae et secundae minimus radius, qui sit $= \mathfrak{m}\alpha$, cuius pars quarta $\frac{1}{4}\mathfrak{m}\alpha$ aequetur semidiametro aperturae ob claritatem requisitae, quae sit

$\frac{m}{50}$ dig., hincque fit $\alpha = \frac{-2m}{25m}$ dig., quae mensura si forte det ultimas lentes nimis exiguas, ut supra usu venit, tantum litterae θ tribuatur valor unitate pro lubitu maior, cum hinc longitudo telescopii vix augeatur. Colligitur autem tota haec longitudo ad oculum usque

$$= -\alpha\left(2\frac{3}{50} + \frac{2(1+2Pk)}{P^2k^2} + \frac{(m+Pk)^3\theta}{m^2P^2k^2}\right).$$

EXEMPLUM 1

338. Si fuerit $m = 9$, erit $Pk = 3$ et $k = \frac{153}{50}$ ob $P = \frac{50}{51}$; unde elementa telescopii erunt

$$b = -\frac{51}{50}\alpha, \quad \beta = -\frac{51}{25}\alpha, \quad c = -\frac{2\alpha}{3}, \quad \gamma = \infty,$$

$$d = -\infty, \quad \delta = -\frac{2\theta\alpha}{3}, \quad e = -\frac{2\theta\alpha}{9}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -\frac{17}{25}\alpha, \quad r = -\frac{2}{3}\alpha, \quad s = -\frac{2\theta\alpha}{3}, \quad t = -\frac{2\theta\alpha}{9}$$

et intervalla

$$\alpha + b = -\frac{1}{50}\alpha, \quad \beta + c = -\frac{203}{75}\alpha, \quad \gamma + d = -\frac{(8+12\theta)}{9}\alpha, \quad \delta + e = -\frac{8\theta\alpha}{9}$$

et distantia oculi

$$O = -\frac{4\theta\alpha}{27}.$$

Tum vero campi apparentis semidiameter

$$\Phi = 143 \text{ min.} = 2^0 23'.$$

Nunc vero habebimus

$$\begin{aligned} \lambda = 3{,}4425 &+ 0{,}04166 + \frac{0{,}09055}{\theta^2} \\ &+ 0{,}1779 \\ &3{,}6204 \\ &0{,}0416 \\ \lambda = 3{,}6620 &+ \frac{0{,}09055}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Sumamus nunc $\theta = 1$, ut fiat

$$\lambda = 3{,}75255, \quad \lambda - 1 = 2{,}75255 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1{,}50162.$$

Quare constructio lentis primae ita se habebit:

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{\alpha}{0{,}1258} = 7{,}9491\,\alpha\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{\alpha}{1{,}6923} = 0{,}5909\,\alpha.\end{cases}$$

Pro secunda autem lente erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{2b}{2{,}0088} = -\,1{,}0155\,\alpha\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{2b}{3{,}4455} = -\,0{,}5921\,\alpha.\end{cases}$$

Pro tertia autem lente erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{c}{0{,}1907} = -\,3{,}4959\,\alpha\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{c}{1{,}6274} = -\,0{,}4097\,\alpha.\end{cases}$$

Pro lente quarta

$$\text{radius faciei utriusque} = -\,0{,}7333\,\alpha.$$

Pro lente denique quinta

$$\text{radius faciei utriusque} = -\,0{,}2444\,\alpha.$$

Iam in duabus prioribus lentibus occurrit radius minimus $= 0{,}5909\,\alpha$, ut sit $\mathfrak{m} = 0{,}5909$ adeoque

$$\alpha = -\,\frac{72}{59{,}09}\ \text{dig.} \quad \text{seu} \quad \alpha = -\,1\frac{1}{4}\ \text{dig.}$$

Unde sequens prodibit constructio huius telescopii pro multiplicatione $m = 9$, lentibus ex vitro communi factis.

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -\,9{,}93\ \text{dig.}\\ \text{posterioris} & = -\,0{,}73\ \text{dig.}\end{cases}$$

Cuius distantia focalis $= -1\frac{1}{4}$ dig.

Semidiameter aperturae $= 0{,}18$ dig.

Distantia ad lentem secundam $= 0{,}025$ dig.

II. Pro secunda lente

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 1{,}27 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 0{,}74 \text{ dig.} \end{cases}$

Cuius distantia focalis $= 0{,}85$ dig.

Semidiameter aperturae ut ante $= 0{,}18$ dig.

Distantia ad lentem tertiam $= 3{,}38$ dig.

III. Pro tertia lente

Radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} & = 4{,}37 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 0{,}51 \text{ dig.} \end{cases}$

Cuius distantia focalis $= 0{,}83$ dig.

Semidiameter aperturae $= 0{,}13$ dig.

Distantia ad quartam $= 2{,}78$ dig.

IV. Pro quarta lente

Radius utriusque faciei $= 0{,}92$ dig.

Cuius distantia focalis $= 0{,}83$ dig.

Semidiameter aperturae $= 0{,}23$ dig.

Intervallum ad quintam $= 1{,}11$ dig.

V. Pro quinta lente

Radius utriusque faciei $= 0{,}30$ dig.

Cuius distantia focalis $= 0{,}28$ dig.

Semidiameter aperturae $= 0{,}07$ dig.

et distantia ad oculum $= 0{,}19$ dig.

sicque tota instrumenti longitudo $= 7{,}49$ dig.

et semidiameter campi $= 2^{\circ}23'$.

Hac ergo perfectione adhibita telescopium, quod ante erat 6 ped., reductum est ad $7\frac{1}{2}$ dig.

EXEMPLUM 2

339. Si multiplicatio sit $m = 50$, erit $Pk = 20$ et $k = \frac{102}{5}$; unde elementa nostra erunt

$$b = -\frac{51}{50}\alpha, \quad \beta = -\frac{51}{25}\alpha, \quad c = -\frac{\alpha}{10}, \quad \gamma = \infty,$$

$$d = -\infty, \quad \delta = -\frac{\theta\alpha}{10}, \quad e = -\frac{\theta\alpha}{25}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -\frac{17}{25}\alpha, \quad r = -\frac{\alpha}{10}, \quad s = -\frac{\theta\alpha}{10} \quad \text{et} \quad t = -\frac{\theta\alpha}{25}$$

et intervalla lentium

$$\alpha + b = -\frac{1}{50}\alpha, \quad \beta + c = -\frac{107}{50}\alpha,$$

$$\gamma + d = \frac{-(21 + 35\theta)\alpha}{200}, \quad \delta + e = \frac{-7\theta\alpha}{50}$$

atque distantia oculi

$$O = -\frac{7\theta\alpha}{250}$$

et campi apparentis semidiameter erit $= 24\frac{1}{2}$ min.

Nunc vero prodibit

$$\begin{aligned} \lambda &= 3{,}4425 + \frac{0{,}0143}{\theta^3} \\ &+ 0{,}0063 \\ & \underline{0{,}1779} \\ \lambda &= 3{,}6267 + \frac{0{,}0143}{\theta^3}. \end{aligned}$$

Sumatur nunc $\theta = 2$ eritque

$$\lambda = 3{,}6285, \quad \lambda - 1 = 2{,}6285 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}4674,$$

unde fiet:

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{\alpha}{0{,}1600} = 6{,}2500\,\alpha \\ \text{posterioris} & = \dfrac{\alpha}{1{,}0581} = 0{,}6031\,\alpha. \end{cases}$$

II. Pro secunda lente

$$\text{Uti ante radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -1{,}0155\,\alpha \\ \text{posterioris} & = -0{,}5921\,\alpha. \end{cases}$$

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{c}{0{,}1907} = -0{,}5244\,\alpha \\ \text{posterioris} & = \dfrac{c}{1{,}6274} = -0{,}0615\,\alpha. \end{cases}$$

IV. Pro quarta lente

Radius faciei utriusque $= -0{,}2200\,\alpha$.

V. Pro quinta lente

Radius faciei utriusque $= -0{,}0880\,\alpha$.

Iam cum sit in duabus prioribus lentibus radius minimus $0{,}5921\,\alpha$, erit $m = 0{,}5921$ adeoque $\alpha = -\frac{400}{59{,}21}$ dig., ita ut capi posset $= -7$ dig.

Unde sequens prodibit constructio huius telescopii pro multiplicatione $m = 50$.

I. Pro prima lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -43{,}75 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 4{,}22 \text{ dig.} \end{cases}$$

Cuius distantia focalis $= -7$ dig.

Semidiameter aperturae $= 1{,}05$ dig.

Distantia ad lentem secundam $= 0{,}14$ dig.

II. Pro secunda lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 7{,}11 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 4{,}14 \text{ dig.} \end{cases}$$

Cuius distantia focalis est $= 4{,}76$ dig.

Semidiameter aperturae ut ante $= 1{,}05$ dig.

Intervallum ad tertiam lentem $= 14{,}98$ dig.

III. Pro tertia lente

$$\text{Radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 3{,}67 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 0{,}43 \text{ dig.} \end{cases}$$

Distantia focalis est $= 0{,}7$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0{,}11$ dig.
Intervallum ad quartam $= 3{,}18$ dig.

IV. Pro quarta lente

Radius utriusque faciei $= 1{,}54$ dig.

Cuius distantia focalis est $= 1{,}40$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0{,}38$ dig.
Intervallum ad quintam lentem $= 1{,}96$ dig.

V. Pro quinta lente

Radius utriusque faciei $= 0{,}61$ dig.

Cuius distantia focalis $= 0{,}56$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0{,}15$ dig.
Distantia ad oculum $= 0{,}39$ dig.
Sicque longitudo tota $= 20\frac{2}{3}$ dig. propemodum
et semidiameter campi $= 24\frac{1}{2}$ min.

SCHOLION 2

340. Hoc ergo etiam postremum telescopium facile per tubos ductitios ita parari potest, ut commode quis secum id portare possit, cum lente illa concava omissa hoc telescopium ultra viginti pedes excrevisset. Circa tubos autem ductitios hic notari oportet, dum ductus ad oculum accommodatur, solam lentem ocularem mobilem esse debere, reliquas vero lentes omnes in locis hic assignatis perpetuo consistere debere, id quod in perpetuum de omnibus telescopiis, quae hic tractantur, est tenendum; ceterum non opus est, ut perfectioni, quam variae vitri species largiuntur, caput peculiare tribuamus, ut hactenus fecimus, sed solutio praecedentis problematis paucis mutandis ad hunc scopum accommodari potest, uti in problemate sequente ostendemus.

PROBLEMA 3

341. *Si prima lens obiectiva concava ex vitro crystallino paretur, dum reliquae ex vitro coronario conficiuntur, constructionem telescopii describere, in quo non margo solum coloratus, sed etiam tota confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda penitus destruatur.*

SOLUTIO

Hoc problema, ut hactenus fecimus, ex principiis supra stabilitis si resolvere vellemus, omnia plane eodem modo se essent habitura uti in problemate praecedente usque ad eum locum, ubi marginem coloratum sustulimus, atque etiam haec ipsa aequatio non esset discrepatura ab ea, quam in praecedenti problemate tractavimus, quoniam in ea prima lens non in computum venit, ita ut hinc etiam eaedem determinationes obtinerentur atque hucusque litterae $\mathfrak{B}$ et B etiam nunc mansurae essent indeterminatae; iam autem demum ultimae aequationis, qua confusio penitus e medio tollitur, ratio erit habenda, et aequatio eo pertinens [§ 53], si pro prima lente formulam differentialem $\frac{dn}{n-1}$ littera N, pro sequentibus autem lentibus litteris N' denotemus per hasque aequationem dividamus, erit

$$0 = \frac{N}{N'} - \frac{1}{\mathfrak{B}P} - \frac{1}{B\mathfrak{C}^2 Pk} - \frac{1}{BP\theta k} - \frac{1}{B\theta m},$$

in qua aequatione terminus tertius cum sequentibus prae duobus primis tam sunt exigui, ut sine errore negligi queant, praecipue cum, uti iam saepius notavimus, natura rei non permittat, ut haec aequatio adcurate resolvatur neque id etiam scopus noster postulet. Quare sumtis tantum duobus terminis prioribus colligemus

$$\mathfrak{B} = \frac{N'}{NP},$$

scilicet ob hanc conditionem lentis primae e vitro crystallino parandae totum discrimen in resolutione in hoc tantum consistit, ut nunc, cum littera $\mathfrak{B}$ ante arbitrio nostro mansisset relicta, definiatur; quocirca, quia ex DOLLONDI experimentis habemus $N : N' = 10 : 7$ ac praeterea sit $P = \frac{50}{51}$, consequimur nunc $\mathfrak{B} = \frac{357}{500}$, qui valor proxime reducitur ad hunc $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$ sive etiam $\mathfrak{B} = \frac{2}{3}$, qui est ipse valor, quem in praecedentibus iam exemplis ipsi $\mathfrak{B}$ tribuimus;

quicunque autem valor ipsi $\mathfrak{B}$ tribuatur, in aequationem ultimam, ex qua numerus λ definitur, leve quoddam discrimen ingreditur; cum enim nunc primus terminus per μ, sequentes vero per μ' sint multiplicandi, divisione per μ' facta haec aequatio fiet

$$\frac{\mu}{\mu'}\lambda = \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3 P} + \frac{\lambda''}{B^3 Pk} + \frac{\lambda'''}{B^3\theta^3 Pk} + \frac{\lambda''''}{B^3\theta^3 m} + \frac{\nu'}{\mathfrak{B}BP},$$

ubi ut ante sumi potest $\lambda' = 1$ et $\lambda'' = 1$; at quia lentes posteriores ex vitro coronario, quo $n = 1{,}53$, conficiuntur, pro duabus postremis lentibus, quae utrinque aequaliter convexae esse debent, erit $\lambda''' = \lambda'''' = 1{,}60006$, litterae autem eo pertinentes erunt

$$\mu' = 0{,}9875, \quad \nu' = 0{,}2196, \quad \varrho' = 0{,}2267 \quad \text{et} \quad \sigma' = 1{,}6601, \quad \tau' = 0.9252.$$

Pro prima autem lente crystallina erit

$$\mu = 0{,}8724, \quad \nu = 0{,}2529, \quad \varrho = 0{,}1414, \quad \sigma = 1{,}5827 \quad \text{et} \quad \tau = 0{,}8775.$$

COROLLARIUM 1

342. Nunc igitur demum intelligitur, cur praestet primam lentem ex vitro crystallino parare quam secundam; si enim prima est crystallina, fit $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$ et $B = \frac{5}{2}$. Sin autem secundam crystallinam faceremus, foret $\mathfrak{B} = \frac{7}{5}$ et $B = -\frac{7}{2}$. Quare, cum omnes sequentes distantiae multiplicatae sint per B, eae ac propterea tota longitudo tubi prodiret posteriore casu maior quam primo idque in ratione $7:5$.

COROLLARIUM 2

343. Si discrimen dispersionis ambarum vitri specierum minus esset, quam hic secundum Dollondi experimenta assumimus, tunc fractio pro $\mathfrak{B}$ assumenda propius ad unitatem accederet indeque B maiorem nancisceretur valorem sicque instrumentum longius evaderet; ex quo ad praxin plurimum expedit, ut duae vitri species ratione dispersionis maxime inter se differentes eligantur, siquidem hoc modo telescopia multo breviora redderentur.

SCHOLION 1

344. Quoniam igitur hic primam lentem ex vitro crystallino, reliquas ex coronario fieri assumimus, experimentis DOLLONDIANIS innixi statuamus $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$, ut sit $B = \frac{5}{2}$, ac posito $\theta = 2$, ne lens ocularis fiat nimis parva, elementa nostra sequenti modo se habebunt:

$$b = -\frac{51}{50}\alpha, \quad c = -\frac{5\alpha}{2Pk}, \quad d = -\infty, \quad e = -\frac{5\alpha}{m},$$

$$\beta = -\frac{51}{20}\alpha, \quad \gamma = \infty, \quad \delta = -\frac{5\alpha}{Pk}$$

et distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -\frac{51}{70}\alpha, \quad r = -\frac{5\alpha}{2Pk}, \quad s = -\frac{5\alpha}{Pk}, \quad t = -\frac{5\alpha}{m}$$

hincque intervalla

$$\alpha + b = -\frac{1}{50}\alpha, \quad \beta + c = -\frac{51}{20}\alpha - \frac{5\alpha}{2Pk},$$

$$\gamma + d = \eta\alpha = -\frac{5(1+Pk)\alpha}{2P^2k^2} - \frac{5\sqrt{2m(m-1)}\,\alpha}{2P^2k^2},$$

$$\delta + e = -\frac{5\alpha\sqrt{2m(m-1)}}{mPk}$$

et distantia oculi

$$O = -\frac{5\sqrt{2m(m-1)}}{2m^2}\,\alpha$$

existente

$$Pk = -m + \sqrt{2m(m-1)};$$

tum autem semidiameter campi

$$\Phi = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ min.}$$

Ut igitur hinc constructionem pro quavis multiplicatione m investigemus, methodo iam saepius adhibita utentes primo evolvamus casum, quo $m = 25$, tum vero casum, quo $m = \infty$.

EXEMPLUM 1

345. Sit multiplicatio $m = 25$ ac reperietur

$$\sqrt{2m(m-1)} = 34{,}64101 \quad \text{hincque} \quad Pk = 9{,}64101,$$

unde intervalla ita se habebunt:

$$\alpha + b = -0{,}02\alpha, \quad \beta + c = -2{,}80930\alpha, \quad \gamma + d = -1{,}21770\alpha,$$
$$\delta + e = -0{,}71860\alpha$$

et distantia oculi $= -0{,}13844\alpha$.

His praemissis quaeratur λ ex aequatione supra data et invenietur

$$\lambda = 3{,}16815 + 0{,}007514 + 0{,}001502 + 0{,}000579 + 0{,}14198$$

seu

$$\lambda = 3{,}31972,$$

unde fit

$$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}33648.$$

Hinc igitur, si F et G denotent radios anterioris et posterioris faciei, habebimus

I. Pro prima lente crystallina

$$F = \frac{\alpha}{\sigma - 1{,}3365} = \frac{\alpha}{0{,}2462} = 4{,}0617\alpha, \quad G = \frac{\alpha}{\varrho + 1{,}3365} = \frac{\alpha}{1{,}4779} = 0{,}6766\alpha.$$

II. Pro secunda autem lente coronaria erit

$$F = \frac{5b}{5\varrho' + 2\sigma'} = \frac{5b}{4{,}4537} = -1{,}1451\alpha, \quad G = \frac{5b}{5\sigma' + 2\varrho'} = \frac{5b}{8{,}7539} = -0{,}5826\alpha,$$

quae constructio pro omni multiplicatione valet.

III. Pro tertia lente coronaria habebimus

$$F = \frac{c}{\varrho'} = \frac{c}{0{,}2267} = -\frac{11{,}0278\alpha}{Pk} = -1{,}1438\alpha,$$
$$G = \frac{c}{\sigma'} = \frac{c}{1{,}6601} = -\frac{1{,}5059\alpha}{Pk} = -0{,}1562\alpha,$$

ubi valores penultimi pro omni multiplicatione valent.

IV. Pro quarta lente itidem coronaria, cuius distantia focalis $= s = -\frac{5\alpha}{Pk}$, erit

$$F = G = 1{,}06s = -\frac{5{,}30\alpha}{Pk} = -0{,}5497\alpha,$$

ubi valor penultimus pro omni multiplicatione valet.

V. Pro quinta lente etiam coronaria, cuius distantia focalis est $t = -\frac{5\alpha}{m}$, erit

$$F = G = 1{,}06\,t = -\frac{5{,}3\,\alpha}{m} = -0{,}212\,\alpha,$$

ubi iterum forma penultima pro omni multiplicatione valet.

EXEMPLUM 2

346. Si fit multiplicatio m infinita seu praegrandis, erit

$$\sqrt{2m(m-1)} = m\sqrt{2} = 1{,}41421\,m \quad \text{hincque} \quad Pk = 0{,}41421\,m,$$

unde intervalla erunt

$$\alpha + b = -0{,}02\,\alpha, \quad \beta + c = -2{,}55\,\alpha - 6{,}0356 \cdot \frac{\alpha}{m},$$

$$\gamma + d = -26{,}6425 \cdot \frac{\alpha}{m}, \quad \delta + e = -17{,}0712 \cdot \frac{\alpha}{m}$$

et distantia oculi

$$O = -3{,}5355 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

His praemissis quaeratur λ ex aequatione data et habebitur

$$\lambda = 3{,}16815 + 0{,}14198 = 3{,}31013,$$

unde fit

$$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}3337;$$

quare habebitur:

I. Pro prima lente

$$F = \frac{\alpha}{\sigma - 1{,}3337} = \frac{\alpha}{0{,}2490} = 4{,}0160\,\alpha, \quad G = \frac{\alpha}{\varrho + 1{,}3337} = \frac{\alpha}{1{,}4751} = 0{,}6779\,\alpha.$$

II. Secunda lens convenit cum exemplo praecedente.

III. Pro tertia lente erit

$$F = \frac{-11{,}0278\,\alpha}{Pk} = -26{,}6237 \cdot \frac{\alpha}{m}, \quad G = \frac{-1{,}5059\,\alpha}{Pk} = -3{,}6357 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

IV. Pro quarta lente erit

$$F = G = \frac{-5,3\alpha}{Pk} = -12,7955 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

V. Pro quinta denique lente

$$F = G = -5,3 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

Elementa autem sequenti modo se habebunt:

$$b = -1,02\alpha, \quad c = -6,0355 \cdot \frac{\alpha}{m}, \quad d = -\infty, \quad e = -5 \cdot \frac{\alpha}{m},$$
$$\beta = -2,55\alpha, \quad \gamma = \infty, \quad \delta = -12,0710 \cdot \frac{\alpha}{m}$$

hincque distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -0,72857\,\alpha, \quad r = -6,0355 \cdot \frac{\alpha}{m},$$
$$s = -12,0710 \cdot \frac{\alpha}{m}, \quad t = -5 \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

EXEMPLUM 3

347. Ex collatione praecedentium exemplorum pro quavis multiplicatione maiore m constructionem huiusmodi telescopiorum describere.

Primo elementa sequenti modo expressa reperientur:

$$b = -1,02\alpha, \quad \beta = -2,55\,\alpha, \quad c = -\left(6,0355 + \frac{11,1750}{m}\right)\frac{\alpha}{m}, \quad \gamma = \infty,$$
$$d = -\infty, \quad \delta = -\left(12,0710 + \frac{22,3500}{m}\right)\frac{\alpha}{m}, \quad e = -5 \cdot \frac{\alpha}{m}$$

hincque distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = -0,72857\,\alpha, \quad r = -\left(6,0355 + \frac{11,1750}{m}\right)\frac{\alpha}{m},$$
$$s = -\left(12,0710 + \frac{22,3500}{m}\right)\frac{\alpha}{m}, \quad t = -5 \cdot \frac{\alpha}{m}$$

et intervalla lentium

$$\alpha + b = -0,02\alpha, \quad \beta + c = -2,55\alpha - \left(6,0355 + \frac{11,1750}{m}\right)\frac{\alpha}{m},$$
$$\gamma + d = -\left(26,6425 + \frac{95}{m}\right)\frac{\alpha}{m}, \quad \delta + e = -\left(17,0710 + \frac{22,3500}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$$

et distantia oculi

$$O = -\left(3{,}5355 - \frac{1{,}8625}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$$

et tandem semidiameter campi semper est

$$\Phi = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}}\,\text{min.}$$

Lentium vero constructio ipsa ita se habebit:

I. Pro prima lente crystallina

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \left(4{,}0160 + \dfrac{1{,}14}{m}\right)\alpha\\[2ex] \text{posterioris} = \left(0{,}6779 - \dfrac{0{,}0325}{m}\right)\alpha.\end{cases}$$

II. Pro secunda lente coronaria

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -\,1{,}1451\,\alpha\\ \text{posterioris} = -\,0{,}5826\,\alpha.\end{cases}$$

III. Pro tertia lente coronaria

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -\left(26{,}6237 + \dfrac{49{,}28}{m}\right)\dfrac{\alpha}{m}\\[2ex] \text{posterioris} = -\left(3{,}6357 + \dfrac{6{,}73}{m}\right)\dfrac{\alpha}{m}.\end{cases}$$

IV. Pro quarta lente coronaria

$$\text{Radius utriusque faciei} = -\left(12{,}7953 + \frac{23{,}68}{m}\right)\frac{\alpha}{m}.$$

V. Pro quinta lente coronaria

$$\text{Radius utriusque faciei} = -\,5{,}30\cdot\frac{\alpha}{m}.$$

Nunc denique iudicandum restat, quantum valorem ipsi α tribui conveniat. Hunc in finem consideretur duarum priorum lentium radius minimus, qui est $-\,0{,}5826\,\alpha$, cuius pars quarta $-\,0{,}1456\,\alpha$ ponatur aequalis semidiametro aper-

turae $\frac{m}{50}$, indeque reperietur $\alpha = -\frac{m}{7{,}28}$, quo quidem valore quantitas α minor accipi non debet; quocirca sumatur $\alpha = -\frac{m}{7}$ atque obtinebitur sequens constructio huiusmodi telescopiorum pro quavis multiplicatione m.

Posita igitur distantia focali $\alpha = -\frac{m}{7}$ dig. impetrabimus pro constructione quaesita sequentes mensuras:

I. Pro prima lente crystallina

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = (-0{,}5737\,m - 0{,}16)\ \text{dig.}\\ \text{posterioris} & = (-0{,}0968\,m + 0{,}004)\ \text{dig.}\end{cases}$$

Cuius distantia focalis $= -\frac{m}{7}$ dig.

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad lentem secundam $= 0{,}00286\,m$ dig.

II. Pro secunda lente coronaria

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}1636\,m\ \text{dig.}\\ \text{posterioris} & = 0{,}0832\,m\ \text{dig.}\end{cases}$$

Cuius distantia focalis est $= 0{,}10408\,m$ dig.

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig.

Intervallum ad lentem tertiam $= \left(0{,}3643\,m + 0{,}86 + \frac{1{,}6}{m}\right)$ dig.

III. Pro tertia lente coronaria

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \left(3{,}80 + \frac{7{,}04}{m}\right)\ \text{dig.}\\ \text{posterioris} & = \left(0{,}52 + \frac{0{,}9}{m}\right)\ \text{dig.}\end{cases}$$

Cuius distantia focalis est $= \left(0{,}86 + \frac{1{,}6}{m}\right)$ dig.

Semidiameter aperturae $= 0{,}13$ dig.

Intervallum ad quartam $= \left(3{,}80 + \frac{14}{m}\right)$ dig.

IV. Pro quarta lente coronaria

Radius faciei utriusque $= \left(1,82 + \frac{3,4}{m}\right)$ dig.

Cuius distantia focalis est $= \left(1,72 + \frac{3,2}{m}\right)$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0,45$ dig.
Intervallum ad quintam $= \left(2,44 + \frac{3,2}{m}\right)$ dig.

V. Pro quinta lente coronaria

Radius utriusque faciei $= 0,76$ dig.

Cuius distantia focalis $= 0,71$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0,19$ dig.
Intervallum ad oculum $= \left(0,50 - \frac{0,2}{m}\right)$ dig.

Tota ergo telescopii longitudo inde colligitur haec:

$$\left(0,3672\,m + 7,60 + \frac{18,6}{m}\right) \text{ dig.,}$$

unde patet, si $m = 100$, longitudinem instrumenti non esse superaturam $44\frac{1}{2}$ dig.

Semidiameter denique campi apparentis erit

$$\Phi = \frac{1718}{\sqrt{2m(m-1)}} \text{ minut.,}$$

quae ergo pro $m = 100$ fiet 12 minut.

SCHOLION 2

348. Haec ergo telescopia adhuc satis brevia forent, si modo in praxi lentes quam exactissime secundum mensuras praescriptas liceret elaborare et si etiam utraque vitri species praecise eandem refractionem admitteret, quam hic supposuimus; perpetuo autem tenendum est, si vitri refractio discrepet ab ea, quam assumsimus, tunc totum calculum de novo esse instituendum, qui scilicet ad formationem lentium spectat; deinde vero etiam haec regula probe est observanda, ut, quo minus felicissimum successum ab artifice exspectare queamus, mensurae hic praescriptae augeri atque adeo duplicari vel triplicari debeant; id quod commodissime fiet, si digiti mensuram multo maiorem accipiamus. Semper autem, etiamsi artifex summam industriam adhibeat, vix

unquam sperandum erit, ut primum statim, quod produxerit, instrumentum voto respondeat; quin potius semper necesse erit, ut lentis primae concavae praesertim plura exempla elaborentur, ut ex iis optimum per experientiam eligi possit; quamvis enim eaedem mensurae retineantur, tamen semper usu veniet, ut plura exempla omnia inter se aliquantillum discrepent. Quin etiam saepe consultum erit ipsam mensuram pro constructione huius lentis aliquantillum immutare, ita tamen, ut eadem distantia focalis conservetur, et pro quavis mensura aliquot exempla conficere; scilicet si ex theoria radii facierum anterioris et posterioris istius lentis inventi fuerint F et G, hanc figuram saepe ita immutari conveniet, ut capiatur radius faciei anterioris $= F \mp F^2\omega$, posterioris vero $= G \pm G^2\omega$, sumendo pro ω tantillam fractionem, quae adhuc in praxi sentiri queat; tum enim in distantia focali nihil mutabitur. Denique etiam quaedam monenda restant circa diaphragmata in huiusmodi telescopiis usurpanda; quia enim in iis duae imagines reales reperiuntur, in utriusque loco etiam diaphragma constitui poterit, cuius apertura ipsam illam imaginem capere debet. Primae autem imaginis semidiameter est

$$= \alpha \Phi B = B\alpha M\xi = \frac{1}{4} MB\alpha;$$

est vero M in nostro casu $= \frac{2}{\sqrt{2m(m-1)}}$ et $B = \frac{5}{2}$, adeoque ista semidiameter erit $= \frac{5\alpha}{4\sqrt{2m(m-1)}}$ sumtoque $\alpha = \frac{m}{7}$ ut ante semidiameter ista erit

$$= \frac{5m}{28\sqrt{2m(m-1)}} = \frac{5}{28\sqrt{2}} = \frac{1}{8} \text{ dig.},$$

nisi m sit numerus parvus. Secundae autem imaginis semidiameter est

$$= \alpha \Phi BCD = \alpha \Phi B\Theta;$$

quare, cum sumserimus $\Theta = 2$, posterius diaphragma aperturam habere debet, cuius semidiameter sit duplo maior quam antecedens, scilicet $\frac{1}{4}$ dig., a quo vero nullus usus exspectari poterit, cum postremae lentes ipsae multo minorem aperturam postulent, ita ut solum diaphragma prius utilitatem habere possit, cui etiam, si libuerit, micrometrum adplicari poterit.

CAPUT III

DE ALTERA TERTII GENERIS TELESCOPIORUM SPECIE PRINCIPALI EORUMQUE PERFECTIONE

DEFINITIO

349. *Ad alteram hanc speciem referimus ea telescopia, quae supra § 310 et quidem speciatim in subnexo corollario 2, § 314, sunt explicata, in quibus scilicet lens secunda adhuc ante primam imaginem realem collocatur, tertia vero lens post hanc imaginem in eo loco, ubi lentis primae instar obiecti consideratae imago per secundam lentem proiiceretur; qui locus cum ante imaginem secundam cadat, lens quarta ocularis in debito loco constituitur. Speciatim autem, si primae lentis distantia focalis ponatur* $=\alpha$, *secunda lens ita statuitur, ut sit* $b=-\frac{\alpha}{\sqrt{m}}$ *sive intervallum primae et secundae lentis* $=\alpha\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

COROLLARIUM 1

350. Cum igitur haec telescopia quatuor constent lentibus, pro iis elementa ita se habebunt:

$$b=\frac{-\alpha}{\sqrt{m}},\quad \beta=\frac{\sqrt{m}-1}{2m}\cdot\alpha,\quad c=\frac{\sqrt{m}-1}{2m}\cdot\alpha,\quad \gamma=\frac{\sqrt{m}-1}{2m}\cdot C\alpha,\quad d=\frac{\sqrt{m}-1}{2m\sqrt{m}}\cdot C\alpha,$$

ita ut sit

$$B=\frac{1-\sqrt{m}}{2\sqrt{m}},\quad \mathfrak{B}=\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$$

et C arbitrio nostro relinquatur.

COROLLARIUM 2

351. Ex his elementis erunt lentium distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{\sqrt{m}-1}{(1+\sqrt{m})\sqrt{m}} \cdot \alpha, \quad r = \frac{\sqrt{m}-1}{2m} \cdot \mathfrak{C}\alpha \quad \text{et} \quad s = \frac{\sqrt{m}-1}{2m\sqrt{m}} \cdot C\alpha$$

et lentium intervalla

$$\alpha + b = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\alpha, \quad \beta + c = \frac{\sqrt{m}-1}{m} \cdot \alpha, \quad \gamma + d = \frac{m-1}{2m\sqrt{m}} \cdot C\alpha$$

et distantia oculi

$$O = \frac{m-1}{2mm} \cdot \alpha,$$

ita ut tota longitudo futura sit

$$= \frac{m-1}{m}\left(1 + \frac{1+\sqrt{m}\cdot C}{2m}\right)\alpha,$$

ubi tantum monendum est pro C numerum positivum accipi debere.

COROLLARIUM 3

352. Litterae autem maiusculae P, Q, R pro hac specie fient

$$P = \sqrt{m}, \quad Q = -1 \quad \text{et} \quad R = -\sqrt{m},$$

ita ut hinc prodeat $PQR = m$, uti rei natura postulat.

SCHOLION

353. Hic autem inprimis rationem reddere oportet conditionis in definitione commemoratae, qua diximus lentem tertiam ibi esse collocandam, ubi primae lentis instar obiecti consideratae imago per secundam lentem proiecta esset casura. Cum enim secundae lentis distantia focalis sit

$$q = \frac{\sqrt{m}-1}{(1+\sqrt{m})\sqrt{m}} \cdot \alpha,$$

eius autem distantia a prima lente $= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\alpha$, quae vocetur y, si prima lens uti obiectum consideretur, eius imago post secundam lentem cadet ad

distantiam

$$\zeta = \frac{yq}{y-q}\text{[1]};$$

est vero

$$y - q = \frac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1}\cdot\alpha \quad \text{hincque} \quad \zeta = \frac{\sqrt{m}-1}{m}\cdot\alpha,$$

cui praecise distantia tertiae lentis a secunda aequatur. Hanc autem conditionem ideo in definitionem introduximus, quoniam eius ope locus tertiae lentis facillime per praxin assignatur. Ceterum supra [§ 314] iam notavimus semidiametrum campi apparentis fore $\Phi = \frac{859}{m+\sqrt{m}}$ min., quae utique augmentatione indiget, cum has lentes perficere conabimur. Denique ibidem quoque est ostensum semidiametrum aperturae tertiae lentis statui debere $= \frac{\sqrt{m}}{50}$ dig.

Pro secunda autem lente, quia posuimus

$$\pi = \omega\xi \quad \text{et} \quad \omega = -\zeta = -\frac{1}{\sqrt{m}},$$

semidiameter eius aperturae esse debet

$$= \frac{q}{4\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}-1}{4m(1+\sqrt{m})}\cdot\alpha.$$

PROBLEMA 1

354. *Inter binas postremas lentes huius telescopiorum speciei novam lentem inserere, qua campus apparens magis amplificetur.*

SOLUTIO

Cum igitur hic occurrant quinque lentes, statuantur nostrae quaternae fractiones

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R, \quad \frac{\delta}{e} = -S;$$

quarum litterarum duae debent esse negativae, quarum prior erit Q statua-

1) Notandum est littera ζ in hac paragrapho duas plane differentes quantitates designari, scilicet $\frac{yq}{y-q}$ et $\frac{1}{\sqrt{m}}$. E. Ch.

turque $Q = -k$, altera vero erit R vel S; utram autem negativam statui conveniat, nondum definiamus. Hinc igitur elementa nostra erunt

$$b = \frac{-\alpha}{P}, \quad c = \frac{-B\alpha}{Pk}, \quad d = \frac{BC\alpha}{PkR}, \quad e = \frac{-BCD\alpha}{PkRS},$$

$$\beta = \frac{-B\alpha}{P}, \quad \gamma = \frac{-BC\alpha}{Pk}, \quad \delta = \frac{BCD\alpha}{PkR},$$

distantiae autem focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{-\mathfrak{B}\alpha}{P}, \quad r = \frac{-B\mathfrak{C}\alpha}{Pk}, \quad s = \frac{BC\mathfrak{D}\alpha}{PkR}, \quad t = \frac{-BCD\alpha}{PkRS}$$

hincque lentium intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right), \qquad \beta + c = \frac{-B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\gamma + d = \frac{-BC\alpha}{Pk}\left(1 - \frac{1}{R}\right), \qquad \delta + e = \frac{+BCD\alpha}{PkR}\left(1 - \frac{1}{S}\right);$$

quae cum esse debeant positiva et α iam sit positivum, necesse est, ut sit 1. $P > 1$, 2. $B < 0$; 3. quod ad bina reliqua intervalla attinet, duos casus distingui convenit.

Casus prior, quo $R > 0$ et $S = -k'$. Hocque casu debet esse

$$C\left(1 - \frac{1}{R}\right) > 0 \quad \text{et} \quad CD < 0,$$

quo ipso etiam fit e positivum.

Casus posterior, quo $R < 0$ seu $R = -k'$ et $S > 0$. Hoc ergo casu esse debet $C > 0$ ideoque etiam

$$\mathfrak{C} > 0 \text{ at } < 1 \quad \text{et} \quad D\left(1 - \frac{1}{S}\right) > 0.$$

Ut autem etiam fiat $e > 0$, debet esse $D < 0$ ideoque $S < 1$.

Nunc igitur consideremus campum apparentem, cuius semidiameter est

$$\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1},$$

ac statuamus ut hactenus $\pi = -\omega\xi$, $\pi' = 0$ ex natura huius speciei, $\pi'' = -\xi$ et $\pi''' = \xi$, ut fiat

$$\Phi = \frac{\omega + 2}{m - 1} \cdot \xi = M\xi \quad \text{existente} \quad M = \frac{\omega + 2}{m - 1},$$

atque hinc iam statim pro loco oculi prodit

$$O = \frac{e}{\mathfrak{M}m} = \frac{(m-1)e}{m(\omega+2)}.$$

Aequationes porro fundamentales erunt:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{B}\pi}{\Phi} = 1 - P \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B}\omega = -(1-P)M$$

$$2.\quad 0 = -(1 + Pk)M - \omega$$

$$3.\quad \mathfrak{D} = -(1 + PkR)M - \omega;$$

ubi cum ex prima sit

$$\omega = \frac{-(1-P)M}{\mathfrak{B}},$$

hic valor in secunda substitutus dat $0 = (1 + Pk)\mathfrak{B} + P - 1$, unde sequitur

$$\mathfrak{B} = -\frac{(P-1)}{1+Pk},$$

ita ut $\mathfrak{B}$ ac proinde etiam B sit numerus negativus; fit autem

$$B = \frac{-(P-1)}{P(1+k)} \quad \text{et} \quad \omega = -(1+Pk)M;$$

tum vero ex tertia erit

$$\mathfrak{D} = Pk(1-R)M;$$

litterae vero C et $\mathfrak{C}$ arbitrio nostro manent relictae. Pro binis ergo casibus memoratis erit:

Pro priore, quo $S = -k'$, $\mathfrak{D} = Pk(1-R)M$. Si ergo fuerit $R > 1$, debet esse $C > 0$ et $D < 0$; at cum fiat $\mathfrak{D} < 0$, sponte illa conditio $D < 0$ impletur. Sin autem sit $R < 1$, erit $\mathfrak{D} > 0$, debet autem esse $C < 0$ et $D > 0$, consequenter $\mathfrak{D} < 1$ ideoque $Pk(1-R)M < 1$.

Pro posteriore casu, quo $R = -k'$, erit $\mathfrak{D} = Pk(1+k')M$ ideoque $\mathfrak{D} > 0$; ante autem vidimus hoc casu esse debere $C > 0$ adeoque $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$. Tum vero $D\left(1 - \frac{1}{S}\right) > 0$. Quare, cum esse debeat $S < 1$, erit $D < 0$, unde ob $\mathfrak{D} > 0$ colligitur $\mathfrak{D} > 1$.

Nunc pro tollendo margine colorato habebitur haec aequatio:

$$0=\frac{\omega}{P}-\frac{1}{PkR}-\frac{1}{PkRS},$$

ex qua colligitur

$$0=\omega kRS-S-1 \quad \text{seu} \quad 0=kRS(1+Pk)M+S+1,$$

ubi ergo binos nostros casus distingui oportet.

I. Si $S=-k'$, habebitur $0=-kk'R(1+Pk)M-k'+1$, unde fit

$$R=\frac{1-k'}{kk'(1+Pk)M},$$

unde patet esse debere $k'<1$, unde, si prodeat $R>1$, debet esse $C>0$ et $D<0$. Sin autem prodeat $R<1$, debet esse $D>0$, $C<0$, $\mathfrak{D}>0$ et $\mathfrak{D}<1$ adeoque $Pk(1-R)M<1$.

II. Si $R=-k'$, erit $0=-kk'S(1+Pk)M+S+1$, unde colligitur

$$k'=\frac{S+1}{kS(1+Pk)M},$$

quae expressio per se est positiva. Hoc autem casu supra vidimus esse debere $C>0$ adeoque $\mathfrak{C}>0$ et $\mathfrak{C}<1$ et $D<0$, ita ut hoc casu sumendum sit $S<1$.

Denique hic meminisse oportet esse $PkRS=-m$, quae conditio secundum binos casus considerari debet.

Primo casu, quo $S=-k'$, ob $R=\frac{m}{Pkk'}$ nostra aequatio dat

$$0=-\frac{m}{P}(1+Pk)M-k'+1,$$

unde colligitur

$$k'=1-\frac{m}{P}(1+Pk)M,$$

ita ut esse debeat $m(1+Pk)M<P$; ubi notetur, si prodeat $R>1$, esse debere $C>0$ et $D<0$, sin autem prodeat $R<1$, debere esse $C<0$ et $D>0$, $\mathfrak{D}>0$ et $\mathfrak{D}<1$.

Altero casu, si $R = -K'$, ut sit $m = Pkk'S$, nostra aequatio dat

$$0 = -\frac{m}{P}(1 + Pk)M + S + 1,$$

unde colligitur

$$S = \frac{m}{P}(1 + Pk)M - 1,$$

ita ut esse debeat $m(1 + Pk)M > P$. Cum autem debeat esse $S < 1$, etiam esse debet $m(1 + Pk)M < 2P$; praeterea recordemur esse debere $C > 0$ adeoque $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$ et $D < 0$.

Tandem circa has formulas probe observandum est ob valorem ω inventum litteram M per reliqua elementa commode exprimi posse. Cum enim sit $\omega = -(1 + Pk)M$, aequatio

$$\frac{\omega + 2}{m - 1} = M$$

dabit

$$M = \frac{2}{m + Pk}$$

et

$$\omega = \frac{-2(1 + Pk)}{m + Pk},$$

ita ut pro campo apparente prodeat

$$\Phi = \frac{2}{m + Pk} \cdot \xi \quad \text{seu} \quad \Phi = \frac{1718}{m + Pk} \text{ min.}$$

Tum vero etiam pro loco oculi

$$O = \frac{e(m + Pk)}{2m}.$$

Quibus observatis binos casus seorsim evolvamus.

I. EVOLUTIO CASUS QUO $S = -K$

355. Hoc ergo casu elementa nostra ita se habebunt:

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \quad c = \frac{-B\alpha}{Pk}, \quad d = \frac{BC\alpha}{PkR}, \quad e = \frac{BCD\alpha}{m},$$

$$\beta = \frac{-B\alpha}{P}, \quad \gamma = \frac{-BC\alpha}{Pk}, \quad \delta = \frac{BCD\alpha}{PkR}$$

hincque intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right), \qquad \beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\gamma + d = -\frac{BC\alpha}{Pk}\left(1 - \frac{1}{R}\right), \qquad \delta + e = \frac{BCD\alpha}{PkR}\left(1 + \frac{1}{k'}\right),$$

ubi ergo esse debet

$$P > 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{-(P-1)}{1+Pk} \quad \text{hincque} \quad B = \frac{-(P-1)}{P(1+k)}.$$

Tertium vero intervallum dat hanc conditionem $C\left(1 - \frac{1}{R}\right) > 0$ et ultimum $CD < 0$; est autem

$$\mathfrak{D} = Pk(1-R)M = \frac{2Pk(1-R)}{m+Pk} \quad \text{et} \quad D = \frac{2Pk(1-R)}{m - Pk + 2PkR}.$$

Destructio autem marginis colorati postulat, ut sit

$$k' = 1 - \frac{m}{P}(1+Pk)M = 1 - \frac{2m(1+Pk)}{P(m+Pk)}$$

et

$$R = \frac{m(m+Pk)}{k(P(m+Pk) - 2m(1+Pk))};$$

quamobrem debet esse

$$P(m+Pk) > 2m(1+Pk)$$

ideoque

$$k < \frac{m(P-2)}{P(2m-P)};$$

quare, cum illa quantitas maior debeat esse quam k, ob $2m > P$ debet esse $P > 2$, ex qua etiam conditione patet semper esse debere $R > 1$ adeoque $C > 0$ et $D < 0$, uti ex valore ipsius D manifestum est. Quo his conditionibus satisfiat formulaeque evadant simpliciores, statuamus $Pk = \sqrt{m}$, ut fiat

$$M = \frac{2}{m + \sqrt{m}}$$

ideoque

$$\Phi = \frac{2}{m+\sqrt{m}} \cdot \xi = \frac{1718}{m+\sqrt{m}} \text{ min.},$$

qui valor duplo maior est quam ante [§ 314]. Tum vero erit

$$\omega = \frac{-2(1+\sqrt{m})}{m+\sqrt{m}};$$

porro si capiatur $P = 4\sqrt{m}$, prodit $k = \frac{1}{4}$, $R = 2\sqrt{m}$ et $k' = \frac{1}{2}$ hincque

$$\mathfrak{D} = \frac{2(1-2\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad D = \frac{2(1-2\sqrt{m})}{5\sqrt{m}-1}.$$

Praeterea vero

$$\mathfrak{B} = -\frac{(4\sqrt{m}-1)}{1+\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{(4\sqrt{m}-1)}{5\sqrt{m}},$$

unde omnia intervalla prodibunt positiva, dummodo pro C sumatur quantitas positiva.

II. EVOLUTIO CASUS QUO $R = -k'$

356. Pro hoc ergo casu destructio marginis colorati praebet

$$0 = -\frac{2m(1+Pk)}{P(m+Pk)} + S + 1,$$

unde concluditur

$$S = \frac{2m(1+Pk)}{P(m+Pk)} - 1,$$

ita ut esse debeat

$$2m(1+Pk) > P(m+Pk);$$

tum vero ob $S < 1$ debet esse

$$2m(1+Pk) < 2P(m+Pk).$$

Statuamus nunc iterum ut ante $Pk = \sqrt{m}$ fietque $S = \frac{2\sqrt{m}}{P} - 1$, ita ut nunc capi debeat $P < 2\sqrt{m}$ et $P > \sqrt{m}$; littera autem k cadet intra limites 1 et $\frac{1}{2}$. Tum vero ob $S = \frac{2\sqrt{m}}{P} - 1$ erit

$$k' = \frac{m}{S\sqrt{m}} = \frac{P\sqrt{m}}{2\sqrt{m}-P}.$$

Definito autem P erit

$$\mathfrak{B} = -\frac{(P-1)}{1+\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{(P-1)}{P+\sqrt{m}}$$

et

$$\mathfrak{D} = \frac{2(1+k')}{1+\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad D = \frac{2(1+k')}{\sqrt{m}-2k'-1}$$

sive

$$\mathfrak{D} = \frac{2(2\sqrt{m}-P+P\sqrt{m})}{(1+\sqrt{m})(2\sqrt{m}-P)};$$

qui valor cum sit positivus et unitate maior, littera D sponte fit negativa, quemadmodum conditiones postulant, dummodo C capiatur positivum. Quo autem omnia plene determinentur, statuamus insuper $P = \frac{3}{2}\sqrt{m}$ ac fiet

$$k = \frac{2}{3}, \quad k' = 3\sqrt{m} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{3},$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{(3\sqrt{m}-2)}{2(1+\sqrt{m})} \quad \text{et} \quad B = -\frac{(3\sqrt{m}-2)}{5\sqrt{m}},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2(3\sqrt{m}+1)}{\sqrt{m}+1} \quad \text{et} \quad D = -\frac{2(3\sqrt{m}+1)}{5\sqrt{m}+1},$$

quibus valoribus omnibus conditionibus satisfit.

SCHOLION

357. I. En ergo duos casus huiusmodi telescopiorum penitus determinatos pro data multiplicatione m, quorum effectus in praxi idem esse debet. Cum autem posteriore casu longitudo instrumenti minor evadat quam priore, eum merito hic praeferimus; quamobrem operae pretium erit in constructionem istorum telescopiorum adcuratius inquirere. Notatis igitur praecipuarum litterarum valoribus, scilicet

$$P = \frac{3}{2}\sqrt{m}, \quad k = \frac{2}{3}, \quad k' = 3\sqrt{m} = -R, \quad S = \frac{1}{3},$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{(3\sqrt{m}-2)}{2(1+\sqrt{m})}, \qquad B = -\frac{(3\sqrt{m}-2)}{5\sqrt{m}},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2(3\sqrt{m}+1)}{\sqrt{m}+1}, \qquad D = -\frac{2(3\sqrt{m}+1)}{5\sqrt{m}+1},$$

et quia C debet esse positivum, ponatur

$$C = \theta, \quad \text{ut sit} \quad \mathfrak{C} = \frac{\theta}{1+\theta},$$

et elementa nostra ita erunt expressa:

$$b = -\frac{2\alpha}{3\sqrt{m}}, \quad \beta = \frac{2(3\sqrt{m}-2)}{15m}\cdot\alpha, \quad c = \frac{3\sqrt{m}-2}{5m}\cdot\alpha, \quad \gamma = \frac{\theta(3\sqrt{m}-2)}{5m}\cdot\alpha,$$

$$d = \frac{\theta(3\sqrt{m}-2)}{15m\sqrt{m}}\cdot\alpha, \quad \delta = \frac{-2\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{15(5\sqrt{m}+1)m\sqrt{m}}\cdot\alpha, \quad e = \frac{2\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{5(5\sqrt{m}+1)m\sqrt{m}}\cdot\alpha;$$

hinc distantiae focales

$$p = \alpha, \quad q = \frac{3\sqrt{m}-2}{3(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}\cdot\alpha, \quad r = \frac{\theta}{1+\theta}\cdot\frac{3\sqrt{m}-2}{5m}\cdot\alpha,$$

$$s = \frac{2\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{15(\sqrt{m}+1)m\sqrt{m}}\cdot\alpha \quad \text{et} \quad t = \frac{2\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{5(5\sqrt{m}+1)m\sqrt{m}}\cdot\alpha$$

et lentium intervalla

$$\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{2}{3\sqrt{m}}\right), \quad \beta + c = \frac{3\sqrt{m}-2}{3m}\cdot\alpha,$$

$$\gamma + d = \frac{\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{15m\sqrt{m}}\cdot\alpha, \quad \delta + e = \frac{4\theta(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{15(5\sqrt{m}+1)m\sqrt{m}}\cdot\alpha$$

et distantia oculi

$$O = \frac{e(1+\sqrt{m})}{2\sqrt{m}} = \frac{\theta(1+\sqrt{m})(3\sqrt{m}-2)(3\sqrt{m}+1)}{5m^2(5\sqrt{m}+1)}\cdot\alpha;$$

unde tota oritur longitudo telescopii

$$= \left(\frac{(3\sqrt{m}-2)(1+\sqrt{m})}{3m} + \frac{\theta(\sqrt{m}+1)(3\sqrt{m}+1)(3\sqrt{m}-2)(5\sqrt{m}+3)}{15m^2(5\sqrt{m}+1)}\right)\alpha,$$

ita ut, si m sit numerus praemagnus, haec longitudo fiat

$$\left(1 + \frac{1}{3\sqrt{m}} + \frac{3\theta}{5\sqrt{m}}\right)\alpha,$$

et quia hoc casu fit $e = \frac{18\theta\alpha}{25m}$, si liceret capere $\alpha = \frac{m}{7}$ dig., statui conveniret $\theta = 5$, ut ultimae lentis distantia focalis fieret circiter $\frac{1}{2}$ dig.; quando autem α multo maiorem obtinet valorem, facile capi poterit $\theta = 1$.

II. Adcuratius etiam inquirere debemus, quantam aperturam cuique lenti tribui oporteat, ac pro prima quidem lente semper sumi solet semidiameter aperturae $x = \frac{m}{50}$ dig.; pro reliquis lentibus ex formulis supra expositis colligitur:

Semidiameter aperturae secundae lentis

$$= \pi q \pm \frac{qx}{\mathfrak{B}p} = \frac{1}{4}\omega q + \frac{qx}{\mathfrak{B}\alpha} = \frac{1}{4} q\left(\frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{8(1+\sqrt{m})}{3\sqrt{m}-2}\cdot\frac{x}{\alpha}\right),$$

semidiameter aperturae tertiae lentis

$$= \frac{rx}{B\mathfrak{C}p} = \frac{x}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{50}\ \text{dig.}$$

Quarta autem et quinta lens maximam aperturam capere debent; unde eas utrinque convexas effici oportet.

III. Quod nunc ad litteras λ attinet, pro prima lente semper sumi convenit $\lambda = 1$, qui valor etiam pro secunda lente sumi posse videtur, siquidem numerus m non sit admodum parvus, de quo autem quovis casu seorsim erit dispiciendum. Pro tertia enim lente ob minimam aperturam nullum est dubium, quin sumi possit $\lambda'' = 1$. Quoniam vero quarta lens debet esse utrinque aequaliter convexa, pro ea sumi debet

$$\lambda''' = 1 + \left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2\left(1-2\mathfrak{D}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2\left(\frac{11\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}+1}\right)^2.$$

Pro quinta autem lente erit $\lambda'''' = 1 + \left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2$.

IV. His igitur valoribus pro $\lambda, \lambda' \ldots$ stabilitis quantitas α ex sequente formula definiri debet:

$$\alpha = kx\sqrt[3]{\mu m}\left\{\begin{array}{l}\lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{1}{B^3\mathfrak{C}Pk}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right)\\ - \frac{1}{B^3C^3\mathfrak{D}Pkk'}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{\nu}{D}\right) + \frac{\lambda''''}{B^3C^3D^3m}\end{array}\right\}^{1)}$$

ubi meminisse iuvabit sumi solere $x = \frac{m}{50}$ et $k = 50$, ut sit $kx = m$. Interim tamen, si minore vel claritatis vel distinctionis gradu contenti esse velimus, pro kx sumi poterit $\frac{1}{2}m$. Deinde etiam hinc evidens est ob illum praegrandem

1) Vide notam p. 9. E. Ch.

valorem ipsius λ''', qui scilicet quadratum $(2\mathfrak{D}-1)^2$ involvebat, terminum inde hic oriundum iterum satis fieri parvum, cum is divisus sit per $\mathfrak{D}^3$, praeterquam quod eius denominator ob $Pkk'=3m$ per se sit satis magnus. Denique adhuc notari debet numerum λ'' multiplicari per quantitatem satis notabilem, cum sit $-\frac{1}{B^3}$ propemodum $\frac{125}{27}$ et $\frac{1}{\mathfrak{C}^3}>1$ ideoque $-\frac{1}{B^3\mathfrak{C}^3}$ ultra 5 assurgat atque adeo ad 40 usque, si sumeretur $\theta=1$, ita ut $Pk=\sqrt{m}$ in denominatore hunc terminum vix infra unitatem diminuere possit. Cui incommodo remedium afferri posset hanc lentem secundum praecepta in Libro I de lentibus compositis tradita duplicando. Hoc autem necesse non erit, quando ipsam lentem obiectivam ita duplicabimus, ut omnis confusio a reliquis etiam lentibus oriunda tollatur.

EXEMPLUM

358. Sumto $m=25$ constructionem huiusmodi telescopii describere.

I. Cum sit $m=25$, erit $\sqrt{m}=5$ indeque

$$P=\frac{15}{2},\quad k=\frac{2}{3},\quad k'=15,\quad S=\frac{1}{3},$$

$$\mathfrak{B}=-\frac{13}{12},\quad B=-\frac{13}{25},\quad \mathfrak{D}=\frac{16}{3},\quad D=-\frac{16}{13};$$

unde elementa nostra erunt

$$b=-\frac{2\alpha}{15},\quad \beta=\frac{26\alpha}{375},\quad c=\frac{13\alpha}{125},\quad \gamma=\frac{13\theta\alpha}{125},$$

$$d=\frac{13\theta\alpha}{1875},\quad \delta=\frac{16\theta}{1875}\alpha,\quad e=\frac{16\theta\alpha}{625}$$

et distantiae focales

$$p=\alpha,\quad q=\frac{13}{90}\alpha,\quad r=\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\frac{13}{125}\alpha,\quad s=\frac{208}{5625}\alpha\quad\text{et}\quad t=\frac{16\theta}{625}\alpha$$

et intervalla lentium

$$\alpha+b=\frac{13}{15}\alpha,\quad \beta+c=\frac{13}{75}\alpha,\quad \gamma+d=\frac{208\theta}{1875}\alpha,\quad \delta+e=\frac{32\theta}{1875}\alpha$$

ac distantia oculi

$$O=\frac{48\theta}{3125}\alpha,$$

ita ut tota longitudo futura sit $\alpha\left(\frac{26}{25}+\frac{448\theta}{3125}\right)$. Campi autem apparentis semidiameter erit

$$\frac{1718}{30}\text{ min.} = 57'16''.$$

II. Semidiameter aperturae lentis primae $= \frac{1}{2}$ dig.

Semidiameter aperturae lentis secundae $= \frac{1}{4}q\left(\frac{2}{5}+\frac{48}{13}\cdot\frac{x}{\alpha}\right)$, unde colligere licet pro hac lente dimidiam aperturam sufficere.

Semidiameter aperturae lentis tertiae $= \frac{1}{10}$ dig.

III. Deinde porro erit $\lambda = 1$, $\lambda' = 1$ fortasse, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1 + \frac{841}{9}\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2$, ubi notandum, si vitrum commune adhibeatur, quo $n = 1{,}55$, fore

$$\lambda''' = 1 + 0{,}6299\cdot\frac{841}{9} = 59{,}861 \quad \text{et} \quad \lambda'''' = 1{,}6299.$$

Ex aequatione pro α colligere licet numerum sub signo radicali contentum circiter ultra $2\mu m$ excrescere, unde eius loco tuto scribere possumus 64, sicque obtinebimus $\alpha = 100$ dig. $= 8\frac{1}{3}$ ped.

Pro maioribus autem multiplicationibus haec quantitas in ratione $m\sqrt[3]{m}$ crescet neque haec longitudo satis magna imminui poterit, nisi formulam pro semidiametro confusionis ad nihilum redigamus, id quod, uti ex superioribus liquet, facile praestabitur, si his quinque lentibus adhuc lentem concavam praefigamus sive ex eodem sive ex vitro crystallino parandam.

PROBLEMA 2

359. *Hanc telescopiorum speciem ante primam lentem praefigendo lentem concavam ita perficere, ut confusio penitus tollatur sicque haec telescopia brevissima reddantur servato campo ante invento.*

SOLUTIO

Cum igitur nunc sex habeamus lentes, quinque litterae erunt considerandae P, Q, R, S, T ad lentium intervalla relatae, quarum prima P debet dare intervallum minimum, quod ob α negativum statuamus $= -\frac{1}{50}\alpha$, ut fiat $P = \frac{50}{51}$. Deinde cum sequentia intervalla respondeant litteris Q, R, S, T,

quae ante erant P, Q, R, S, nunc ponamus $R = -k$ et $S = -k'$ eruntque elementa

$$b = -\frac{\alpha}{P}, \quad c = \frac{B\alpha}{PQ}, \quad d = \frac{BC\alpha}{PQk}, \quad e = \frac{BCD\alpha}{PQkk'}$$

et

$$f = \frac{-BCDE\alpha}{PQkk'T} = \frac{-BCDE\alpha}{m},$$

$$\beta = -\frac{B\alpha}{P}, \quad \gamma = \frac{BC\alpha}{PQ}, \quad \delta = \frac{BCD\alpha}{PQk}, \quad \varepsilon = \frac{BCDE\alpha}{PQkk'},$$

unde intervalla colliguntur

1. $\alpha + b = \alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right)$; quod fit sumto $P = \frac{50}{51}$.

2. $\beta + c = -\frac{B\alpha}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)$; unde, cum Q capi debeat > 1, debet esse B positivum ideoque $\mathfrak{B} > 0$ et < 1.

3. $\gamma + d = \frac{BC\alpha}{PQ}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$; unde C debet esse negativum.

4. $\delta + e = \frac{BCD\alpha}{PQk}\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$; unde D debet esse positivum ideoque $\mathfrak{D} > 0$ et $\mathfrak{D} < 1$.

5. $\varepsilon + f = \frac{BCDE\alpha}{PQkk'}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$; unde debet esse $E\left(1 - \frac{1}{T}\right)$ positivum, sed cum et f debeat esse maius nihilo, debet esse E negativum, ergo $T < 1$.

Iam pro campo apparente ponamus

$$\pi = -v\xi, \quad \pi' = \omega\xi, \quad \pi'' = 0, \quad \pi''' = \xi \quad \text{et} \quad \pi'''' = -\xi,$$

ut fiat

$$\Phi = \frac{v + \omega + 2}{m - 1} \cdot \xi = M\xi$$

existente

$$M = \frac{v + \omega + 2}{m - 1};$$

unde pro loco oculi fit

$$O = \frac{f}{Mm}.$$

Ex his autem formabuntur sequentes aequationes fundamentales:

1. $\mathfrak{B}v = -(1 - P)M$
2. $\mathfrak{C}\omega = -(1 - PQ)M - v$
3. $\mathfrak{D}.0 = -(1 + PQk)M - v - \omega$
4. $\mathfrak{E} = -(1 - PQkk')M - v - \omega.$

Ex quarum tertia statim habemus

$$v + \omega = -(1 + PQk)M;$$

est vero etiam

$$v + \omega = (m - 1)M - 2;$$

unde

$$M = \frac{2}{m + PQk}$$

sicque vicissim

$$v + \omega = \frac{-2(1 + PQk)}{m + PQk}.$$

Quia nunc prima aequatio dat

$$v = \frac{-2(1 - P)}{\mathfrak{B}(m + PQk)},$$

secunda praebebit

$$\mathfrak{C}\omega = \frac{-2(1 - PQ)}{m + PQk} + \frac{2(1 - P)}{\mathfrak{B}(m + PQk)};$$

quare nunc fiet

$$v + \omega = \frac{2(1 - P)}{\mathfrak{B}C(m + PQk)} - \frac{2(1 - PQ)}{\mathfrak{C}(m + PQk)} = \frac{-2(1 + PQk)}{m + PQk},$$

quae aequatio reducta dabit

$$(1 - \mathfrak{B})(1 - \mathfrak{C}) - (1 - \mathfrak{C})P + \mathfrak{B}PQ + \mathfrak{B}\mathfrak{C}PQk = 0,$$

quae ad formam hanc reducitur:

$$\frac{1 - P}{BC} - \frac{P(1 - Q)}{C} + PQ(1 + k) = 0,$$

quae aequatio inservit relationi inter litteras B et C definiendae. Littera autem D arbitrio nostro manet relicta, dummodo capiatur positiva. Tandem vero quarta aequatio dat

$$\mathfrak{E} = -\frac{2(1 - PQkk')}{m + PQk} + \frac{2(1 + PQk)}{m + PQk} = \frac{2PQk(1 + k')}{m + PQk},$$

qui valor cum sit positivus, debet esse

$$2PQk(1 + k') > m + PQk \quad \text{sive} \quad PQk(1 + 2k') > m.$$

Denique destructio marginis colorati postulat hanc aequationem:

$$0 = \frac{v}{P} + \frac{\omega}{PQ} - \frac{0}{PQk} + \frac{1}{PQkk'} + \frac{1}{PQkk'T},$$

quae substitutis pro v et ω valoribus abit in hanc:

$$0 = \frac{-2(1-P)}{\mathfrak{B}(m+PQk)} - \frac{2(1-PQ)}{\mathfrak{C}(m+PQk)Q} + \frac{2(1-P)}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}(m+PQk)Q} + \frac{1}{Qkk'} + \frac{1}{Qkk'T}$$

sive

$$0 = \frac{2}{Q(m+PQk)}\left(\frac{(1-P)(1-Q)}{\mathfrak{B}} - 1 - PQk\right) + \frac{1}{Qkk'} + \frac{1}{Qkk'T}.$$

Ut huic aequationi commodissime satisfaciamus, primo terminos factore $(1-P)$ adfectos ob summam parvitatem reiiciamus, quandoquidem non opus est, ut in hac resolutione summum rigorem sequamur, et habebimus

$$\frac{2(1+PQk)}{m+PQk} = \frac{1}{kk'}\left(1+\frac{1}{T}\right),$$

ubi statim secundum naturam huius speciei telescopiorum supra stabilitam statuamus $PQk = \sqrt{m}$ et $T = \frac{1}{2}$; unde fiet $\frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{3}{kk'}$, hinc $kk' = \frac{3\sqrt{m}}{2}$. Quia nunc erit $kk'T = \frac{3\sqrt{m}}{4} = \frac{m}{PQ}$, ita ut sit $PQ = \frac{4}{3}\sqrt{m}$, ob P datum etiam Q definietur. Quia porro est $PQk = \sqrt{m}$, erit $k = \frac{3}{4}$ hincque $k' = 2\sqrt{m}$ sicque valores harum litterarum ita se habebunt:

$$P = \frac{50}{51}, \quad PQ = \frac{4}{3}\sqrt{m}, \quad k = \frac{3}{4}, \quad k' = 2\sqrt{m} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}$$

hincque

$$PQk = \sqrt{m}, \quad PQkk' = 2m \quad \text{et} \quad PQkk'T = m.$$

Quod nunc ad reliquas litteras $B, C \ldots$ attinet, aequatio supra data, si etiam factor $1-P$ reiiciatur, dabit:

$$\frac{-1+PQ}{C} + PQ(1+k) = 0,$$

unde invenitur

$$C = \frac{1-PQ}{PQ(1+k)} = \frac{3-4\sqrt{m}}{7\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{3-4\sqrt{m}}{3(1+\sqrt{m})}.$$

Litterae autem B et $\mathfrak{B}$ arbitrio nostro permittuntur, ita ut, si prima lens concava ex vitro crystallino paretur, ut supra [§ 342] vidimus, poni conveniat $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$; porro vero litterae $\mathfrak{D}$ et D hinc plane non determinantur, nisi quod utramque positivam esse oportet, ex quo statuamus $D = \theta$ hincque $\mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta}$; denique vero erit

$$\mathfrak{E} = \frac{2(1+2\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}} \quad \text{hincque} \quad E = \frac{-2(1+2\sqrt{m})}{1+3\sqrt{m}};$$

qui valores uni conspectui ita repraesentantur:

$$\mathfrak{B} = \frac{5}{7}, \quad \mathfrak{C} = \frac{3-4\sqrt{m}}{3(1+\sqrt{m})}, \quad \mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E} = \frac{2(1+2\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}},$$

$$B = \frac{5}{2}, \quad C = \frac{3-4\sqrt{m}}{7\sqrt{m}}, \quad D = \mathfrak{D} \quad \text{et} \quad E = \frac{-2(1+2\sqrt{m})}{1+3\sqrt{m}}$$

hincque

$$BC = \frac{5(3-4\sqrt{m})}{14\sqrt{m}}, \quad BCD = \frac{5\theta(3-4\sqrt{m})}{14\sqrt{m}},$$

$$BCDE = \frac{5\theta(4\sqrt{m}-3)(1+2\sqrt{m})}{7\sqrt{m}(1+3\sqrt{m})};$$

ex quibus elementa nostra penitus determinantur.

Nihil igitur aliud superest, nisi ut semidiameter confusionis ad nihilum redigatur, id quod fit sequente aequatione:

$$\lambda = \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) - \frac{1}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \frac{1}{B^3C^3PQk}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right)$$
$$- \frac{1}{B^3C^3D^3PQkk'}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3} + \frac{\nu}{E\mathfrak{E}}\right) + \frac{\lambda'''''}{B^3C^3D^3E^3m},$$

si scilicet omnes lentes ex eodem vitro sint factae. Sin autem prima lens sit crystallina, reliquae vero coronariae, valor ipsius λ hinc inventus insuper multiplicari debet per $\frac{9875}{8724}\left[= \frac{\mu'}{\mu}\right]$, quae fractio est fere $\frac{17}{15}$, propius vero $\frac{163}{144}$.

Circa hanc vero aequationem observandum est sumi debere $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1$. Pro quinta autem lente, ut utrinque fiat aeque convexa, sumi debet

$$\lambda'''' = 1 + 0{,}60006(1 - 2\mathfrak{E})^2 = 1 + \frac{0{,}60006(3 + 7\sqrt{m})^2}{(1+\sqrt{m})^2}.$$

Pro sexta vero $\lambda''''' = 1{,}60006$.

COROLLARIUM 1

360. Pro his igitur telescopiis cum fiat $M = \frac{2}{m + \sqrt{m}}$, erit semidiameter campi apparentis $\Phi = \frac{1718}{m + \sqrt{m}}$ min.

COROLLARIUM 2

361. Semidiametri autem aperturae singularum lentium ita definiuntur ex § 23:

Pro prima $= x$,

pro secunda $= \frac{x}{P}$,

pro tertia $= \frac{r}{2\sqrt{m}} \pm \frac{x}{PQ}$,

pro quarta $= 0s \pm \frac{x}{PQk}$,

pro quinta $= \frac{t}{4} \pm \frac{x}{PQkK}$,

pro sexta $= \frac{u}{4} \pm \frac{x}{PQkK\,T} = \frac{u}{4} \pm \frac{x}{m}$.

COROLLARIUM 3

362. Si in locis imaginum realium velimus diaphragmata constituere, reperitur [§ 224—227]:

Pro priori semidiameter aperturae $= \frac{2BC}{m + \sqrt{m}} \cdot \frac{\alpha}{4}$.

Pro posteriore vero $= \frac{2BCD}{m + \sqrt{m}} \cdot \frac{\alpha}{4}$.

SCHOLION

363. En ergo duplicem perfectionem huius generis telescopiorum; altera scilicet spectat ad campum apparentem, quem fere duplo maiorem reddidimus; altera vero consistit in destructione confusionis, qua efficitur, ut non opus sit quantitatem α maiorem accipere, quam apertura lentis obiectivae ad claritatem requisita postulat, sicque longitudo telescopii tantopere contrahatur, quantum quidem fieri licet. Cum hic duae lentes post ultimam imaginem reperiantur, quibus campus duplo maior est factus, ita, si tres pluresve lentes adhibere velimus, campum, quousque voluerimus, amplificare licebit. Quod cum vix maiorem calculum postulet quam praecedens problema, operae pretium utique erit hanc investigationem generatim ad quotcunque lentes extendere.

PROBLEMA 3

364. *Praefixa ut ante lente concava plures lentes post ultimam imaginem realem ita disponere, ut campus apparens, quantum libuerit, amplificetur.*

SOLUTIO

Hic omnia prorsus manent ut in problemate antecedente, quod scilicet ad elementa, distantias focales et intervalla lentium attinet, hoc tantum discrimine, ut ambae series litterarum B, C, D etc. et P, Q, k, k', T etc. ulterius continuari debeant. Deinde littera M, qua campus apparens definitur, alium nanciscetur valorem a numero lentium post ultimam imaginem inserendarum. Sit igitur harum lentium numerus $= i$ eritque

$$M = \frac{v + \omega + i}{m - 1}.$$

Tum vero aequationes fundamentales se habebunt ut ante, nisi quod ulterius progrediantur; post tertiam autem quamlibet sequentium ope tertiae definiamus, uti sequitur:

$$1.\quad \mathfrak{B}v = -(1 - P)M$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\omega = -(1 - PQ)M - v$$

$$3.\quad 0 = -(1 + PQk)M - v - \omega \quad \text{sive} \quad v + \omega = -(1 + PQk)M,$$

unde

$$M(m - 1) = -(1 + PQk)M + i$$

et

$$M = \frac{i}{m + PQk},$$

$$4.\quad \mathfrak{E} = PQk(1 + k')M$$

$$5.\quad \mathfrak{F} = PQk(1 + k'T)M - 1$$

$$6.\quad \mathfrak{G} = PQk(1 + k'TU)M - 2$$

$$7.\quad \mathfrak{H} = PQk(1 + k'TUV)M - 3$$

etc.

Ex primis autem formulis colligetur ut ante

$$\frac{1 - P}{BC} - \frac{P(1 - Q)}{C} + PQ(1 + k) = 0,$$

unde, quia P proxime $=1$ ideoque v pro nihilo haberi potest, erit satis exacte

$$\omega = -(1+PQk)M = -\frac{(1-PQ)M}{\mathfrak{C}},$$

unde colligimus

$$\mathfrak{C} = \frac{1-PQ}{1+PQk} \quad \text{et} \quad C = \frac{1-PQ}{PQ(1+k)}.$$

Hic autem sufficit hunc valorem vero proxime definivisse, quia aperturae lentium, unde litterae v, ω etc. pendent, summam praecisionem respuunt. Quod cum etiam valeat in aequatione, qua margo coloratus destruitur, habebitur loco M substituto valore

$$\frac{i(1+PQk)}{m+PQk} = \frac{1}{kk'}\left(1+\frac{1}{T}+\frac{1}{TU}+\frac{1}{TUV}\text{ etc.}\right);$$

quorum terminorum numerus cum sit i et singulae litterae T, U, V etc. unitate debeant esse minores, statuamus tam concinnitatis gratia, quam ut lentes postremae aequis fere intervallis distent:

$$T=\frac{1}{2},\quad U=\frac{2}{3},\quad V=\frac{3}{4},\quad W=\frac{4}{5}\text{ etc.},$$

ut factor ipsius $\frac{1}{kk'}$ fiat

$$1+2+3+4\cdots+i=\frac{(1+i)i}{2};$$

deinde etiam ut ante ponamus $PQk=\sqrt{m}$, ut prodeat ista aequatio:

$$\frac{i}{\sqrt{m}}=\frac{1}{kk'}\cdot\frac{i(1+i)}{2},$$

unde elicitur

$$kk'=\frac{(1+i)\sqrt{m}}{2}.$$

Productum vero reliquarum litterarum

$$TUV\cdots=\frac{1}{i};$$

erit

$$kk'TUV\cdots=\frac{(1+i)\sqrt{m}}{2i}=\frac{m}{PQ}$$

hincque ergo deducitur

$$PQ=\frac{2i\sqrt{m}}{1+i},$$

et quia P per se datur, hinc Q definietur. Denique ob $PQk = \sqrt{m}$ elicitur

$$k = \frac{1+i}{2i} \quad \text{et} \quad k' = i\sqrt{m}.$$

Hinc ergo valores omnes sequenti modo se habent:

$$PQ = \frac{2i\sqrt{m}}{1+i}, \quad k = \frac{1+i}{2i}, \quad k' = i\sqrt{m},$$

$$T = \frac{1}{2}, \quad U = \frac{2}{3}, \quad V = \frac{3}{4}, \quad W = \frac{4}{5} \text{ etc.},$$

$$PQk = \sqrt{m}, \quad PQkk' = im, \quad PQkk'T = \frac{im}{2},$$

$$PQkk'TU = \frac{im}{3} \quad \text{et} \quad PQkk'TUV\ldots. = \frac{im}{i} = m.$$

Circa litteras B, C, D etc. prima B cum tertia D hinc non definitur; iam vero ostendimus esse

$$C = \frac{1-PQ}{PQ(1+k)} = \frac{1+i-2i\sqrt{m}}{(1+3i)\sqrt{m}}$$

et

$$\mathfrak{C} = \frac{1-PQ}{1+PQk} = \frac{1+i-2i\sqrt{m}}{(1+i)(1+\sqrt{m})}.$$

Ponamus igitur ut ante

$$D = \theta \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta};$$

sequentes vero erunt

$$\mathfrak{E} = \frac{i(1+i\sqrt{m})}{1+\sqrt{m}},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{i(2+i\sqrt{m})}{2(1+\sqrt{m})} - 1,$$

$$\mathfrak{G} = \frac{i(3+i\sqrt{m})}{3(1+\sqrt{m})} - 2,$$

$$\mathfrak{H} = \frac{i(4+i\sqrt{m})}{4(1+\sqrt{m})} - 3,$$

quarum litterarum penultima erit

$$\frac{2(i-1)+(3i-2)\sqrt{m}}{(i-1)(1+\sqrt{m})}$$

et ultima $= 1$.

Has igitur quoque litteras hic coniunctim aspectui exponamus:

$$\mathfrak{B} = \frac{5}{7} \text{ circiter} \qquad B = \frac{5}{2} \text{ vel circiter}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-(2i\sqrt{m} - i - 1)}{(1+i)(1+\sqrt{m})} \qquad C = \frac{-(2i\sqrt{m} - i - 1)}{(1+3i)\sqrt{m}}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta} \qquad D = \theta$$

$$\mathfrak{E} = \frac{i + ii\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \qquad E = \frac{-(i + ii\sqrt{m})}{(i-1)(1+(i+1)\sqrt{m})}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{2(i-1) + (ii - 1\cdot 2)\sqrt{m}}{2(1+\sqrt{m})} \qquad F = \frac{-(2(i-1) + (ii - 1.2)\sqrt{m})}{(i-2)(2+(i+2)\sqrt{m})}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{3(i-2) + (ii - 2\cdot 3)\sqrt{m}}{3(1+\sqrt{m})} \qquad G = \frac{-(3(i-2) + (ii - 2\cdot 3)\sqrt{m})}{(i-3)(3+(i+3)\sqrt{m})}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{4(i-3) + (ii - 3\cdot 4)\sqrt{m}}{4(1+\sqrt{m})} \qquad H = \frac{-(4(i-3) + (ii - 3\cdot 4)\sqrt{m})}{(i-4)(4+(i+4)\sqrt{m})}$$

etc.,

ex quibus valoribus omnia elementa secundum formulas satis cognitas definiri possunt.

Deinde vero ut omnis confusio tollatur, haec aequatio erit adimplenda:

$$\lambda = \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) - \frac{1}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) + \frac{1}{B^3C^3PQk}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3C^3D^3PQkk'}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3} + \frac{\nu}{E\mathfrak{E}}\right) + \frac{1}{B^3C^3D^3E^3PQkk'T}\left(\frac{\lambda'''''}{\mathfrak{F}^3} + \frac{\nu}{F\mathfrak{F}}\right)$$

$$- \frac{1}{B^3C^3D^3E^3F^3PQkk'TU}\left(\frac{\lambda''''''}{\mathfrak{G}^3} + \frac{\nu}{G\mathfrak{G}}\right) + \text{ etc.},$$

ubi ut ante notandum est, si lens prima concava ex vitro crystallino paretur, reliquae autem omnes ex coronario, tum valorem hinc pro λ inventum insuper multiplicari debere per fractionem $\frac{9875}{8724}$; quo casu, siquidem statuatur $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$, etiam omnis confusio a diversa refrangibilitate radiorum oriunda tolli deberet, scilicet secundum DOLLONDI experimenta. Ceterum, ut iam monuimus, pro litteris λ', λ'' et λ''' unitas poni poterit. Pro sequentibus

vero lentibus, quae omnes utrinque aeque convexae esse debent, statui debet

$$\lambda'''' = 1 + 0{,}60006\,(2\mathfrak{E} - 1)^2,$$
$$\lambda''''' = 1 + 0{,}60006\,(2\mathfrak{F} - 1)^2,$$
$$\lambda'''''' = 1 + 0{,}60006\,(2\mathfrak{G} - 1)^2 \text{ etc.}$$

COROLLARIUM 1

365. Hoc igitur modo campi apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{i\xi}{m + \sqrt{m}} \quad \text{sive} \quad \Phi = \frac{859\, i}{m + \sqrt{m}} \text{ minut.},$$

ac si pro lente ultima fuerit distantia focalis $= \zeta$, pro loco oculi habebimus

$$O = \frac{\zeta}{Mm} = \frac{\zeta(m + \sqrt{m})}{im} = \frac{\zeta(1 + \sqrt{m})}{i\sqrt{m}},$$

unde, si multiplicatio fuerit praemagna, erit $O = \frac{\zeta}{i}$.

COROLLARIUM 2

366. Semidiametri aperturae singularum lentium ita definientur:

Pro prima $= x$,

pro secunda $= \frac{x}{P}$,

pro tertia $= \frac{i}{\sqrt{m}} \cdot \frac{r}{4} \pm \frac{x(1+i)}{2i\sqrt{m}}$,

pro quarta $= O\,\frac{s}{4} \pm \frac{x}{\sqrt{m}}$,

pro quinta $= \frac{t}{4} \pm \frac{1}{im}x$,

pro sexta $= \frac{u}{4} \pm \frac{2}{im}x$,

pro septima $= \frac{v}{4} \pm \frac{3}{im}x$.

etc.

COROLLARIUM 3

367. Circa diaphragmata eadem est ratio ut in problemate praecedente; scilicet pro diaphragmate in loco prioris imaginis collocando debet esse radius foraminis $= \frac{iBC}{m + \sqrt{m}} \cdot \frac{\alpha}{4}$, pro altero autem diaphragmate $= \frac{iBCD}{m + \sqrt{m}} \cdot \frac{\alpha}{4}$, unde patet haec foramina eo maiora fieri debere, quo magis campus amplificetur.

SCHOLION

368. Hoc igitur problemate totum huncce de telescopiis tractatum finimus, quoniam cuncta praecepta pro illorum constructione satis sunt exposita neque hic constructiones generales commode exhiberi queant, propterea quod hic non solum quantitates duplicis generis ut ante, ubi scilicet vel numeri absoluti vel per multiplicationem m divisi occurrebant, sed triplicis adeo generis, scilicet praeter numeros absolutos quantitates primo per $\sqrt{m}$ vel etiam per m divisae, in computum sunt ducendae, ita ut ex comparatione duorum casuum nulla conclusio generalis colligi queat. Nihil igitur aliud hic restat, nisi ut pro qualibet multiplicatione, quam quis postulat, atque etiam pro quantitate campi seu valore numeri i calculus ab initio instituatur, quem pro quovis casu oblato suscepisse ob rei dignitatem sine dubio operae erit pretium. In quo quidem negotio etiam littera θ, quae arbitrio nostro hactenus est permissa, determinari debet, quam commode unitati aequalem vel maiorem assumere licet. Videtur autem aptissime poni posse $\theta = 2$, unde posteriora instrumenti intervalla non nimis augentur, simul vero valor pro λ notabiliter minor prodit, quam si esset $\theta = 1$. Quo autem totus iste calculus facilius suscipi et absolvi queat, aliquot exempla hic subiungamus.

EXEMPLUM

369. Sit $m = 49$, ut sit $\sqrt{m} = 7$, et pro campo apparente $i = 2$, ita ut telescopium ex sex lentibus sit componendum, et sumatur praeterea $\theta = 2$.

I. Primo colligantur litterae P, Q etc., ut sequitur,

$$P = \frac{50}{51}, \quad PQ = \frac{28}{3}, \quad k = \frac{3}{4}, \quad k' = 14, \quad T = \frac{1}{2}$$

$$\text{Log.}\ \frac{1}{P} = 0{,}0086002 \qquad \text{Log.}\ \frac{1}{PQ} = 9{,}0299632$$

$$\text{Log.}\ \frac{1}{PQk} = 9{,}1549019 \qquad \text{Log.}\ \frac{1}{PQkk'} = 8{,}0087738$$

$$\text{Log.}\ \frac{1}{PQkk'T} = 8{,}3098038$$

$$\mathfrak{B} = \frac{5}{7}, \quad l.\mathfrak{B} = 9{,}8538719 \qquad B = \frac{5}{2}, \quad l.B = 0{,}3979399$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{25}{24}, \quad l.\mathfrak{C} = 0{,}0177287(-) \qquad C = -\frac{25}{49}, \quad l.C = 9{,}7077438(-)$$

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{3}, \quad l.\mathfrak{D} = 9{,}8239086 \qquad D = 2, \quad l.D = 0{,}3010300$$

$$\mathfrak{E} = \frac{15}{4}, \quad l.\mathfrak{E} = 0{,}5740313 \qquad E = -\frac{15}{11}, \quad l.E = 0{,}1346984(-)$$

Ex his logarithmis formantur sequentes:

$$\begin{array}{llll} l.BC & = 0{,}1056837(-) & l.\ BCD = & 0{,}4067137(-) \\ l.BCDE & = 0{,}5414121(+) & l.\ B\mathfrak{B} = & 0{,}2518118(+) \\ l.\ C\mathfrak{C} & = 9{,}7254725(+) & l.\ D\mathfrak{D} = & 0{,}1249386(+) \\ l.\ E\mathfrak{E} & = 0{,}7087297(-). & & \end{array}$$

II. Hoc quasi primo labore confecto colligamus nostra elementa, quae ita se habebunt:

$b = -1{,}02\,\alpha$	$\beta = -2{,}55\,\alpha$	$q = -0{,}72857\,\alpha$
		$\text{Log.}\ \frac{q}{\alpha} = 9{,}8624713(-)$
$c = +0{,}26785\,\alpha$	$\gamma = -0{,}13666\,\alpha$	$r = -0{,}27901\,\alpha$
		$\text{Log.}\ \frac{r}{\alpha} = 9{,}4456318(-)$
$d = -0{,}18221\,\alpha$	$\delta = -0{,}36443\,\alpha$	$s = -0{,}12148\,\alpha$
		$\text{Log.}\ \frac{s}{\alpha} = 9{,}0844942(-)$
$e = -0{,}02603\,\alpha$	$\varepsilon = +0{,}03549\,\alpha$	$t = -0{,}09762\,\alpha$
		$\text{Log.}\ \frac{t}{\alpha} = 8{,}9895188(-)$
$f = -0{,}07099\,\alpha$		$u = -0{,}07099\,\alpha$

Pro oculo autem erit

$$O = \frac{4u}{7} = -0{,}04057\,\alpha.$$

III. Hinc iam lentium intervalla cognoscuntur:

$$\begin{array}{rrl} 1. & \alpha + b = & -0{,}02000\,\alpha \\ 2. & \beta + c = & -2{,}28215\,\alpha \\ 3. & \gamma + d = & -0{,}31887\,\alpha \\ 4. & \delta + e = & -0{,}39046\,\alpha \\ 5. & \varepsilon + f = & -0{,}03550\,\alpha \\ 6. & O = & -0{,}04057\,\alpha \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Tota longitudo} = -3{,}08755\,\alpha.$$

Deinde etiam diaphragmata ita definiuntur:

Prius post lentem tertiam ad distantiam $\gamma = -0{,}13666\,\alpha$ ponitur.

Eius semidiameter foraminis $= -0{,}0114\,\alpha$[1]).

Posterius ponitur post quartam lentem ad distantiam $\delta = -0{,}36443\,\alpha$.

Eius semidiameter foraminis $= -0{,}0228\,\alpha$[2]).

Porro vero semidiameter campi apparentis erit $30\frac{2}{3}$ minut.

IV. Nunc singulas lentes examinari conveniet, quarum non solum constructio, sed etiam momentum confusionis, quod quaelibet ad valorem λ confert, est definiendum, ubi quidem prima lens ultimo loco, postquam scilicet valor λ fuerit inventus, tractari debebit. Quoniam igitur sequentes lentes omnes ex vitro coronario fieri sumuntur, valores eo pertinentes erunt:

$$\begin{aligned}
\nu &= 0{,}2196, \quad \text{Log. } \nu = 9{,}3416323,\\
\sigma &= 1{,}6601,\\
\varrho &= 0{,}2267,\\
\sigma - \varrho &= 1{,}4334, \quad \text{Log. } (\sigma - \varrho) = 0{,}1563674,\\
\tau &= 0{,}9252.
\end{aligned}$$

Nunc igitur singulas lentes post primam ordine percurramus.

Pro lente secunda

$$1.\ \text{Radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}}\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}},\end{cases}$$

quae formulae ex superioribus facile eliciuntur. Hic vero est $\lambda' = 1$ et calculus ita instituatur:

1) Editio princeps: $0{,}0569\,\alpha$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: $0{,}1138\,\alpha$. Correxit E. Ch.

$l.(\sigma-\varrho)=0,1563674$	$\sigma=1,6601$
$l.\mathfrak{B}=9,8538719$	subtr. $1,0239$
$0,0102393$	$0,6362$ denom. radii anter.
	$\varrho=0,2267$
$\mathfrak{B}(\sigma-\varrho)=1,02386$	add. $1,0239$
	$1,2506$ denom. radii poster.

$\log.\ \frac{q}{\alpha}=9,8624713(-)$	$9,8624713(-)$
$\log.\ \text{denom.}=9,8035937$	$0,0971184$
$0,0588776(-)$	$9,7653529(-)$
radius anterior $=-1,14519\,\alpha$	radius posterior $=-0,58257\,\alpha$.

2. Semidiameter aperturae requiritur

$$=\frac{51}{50}x=\frac{51}{50}\cdot\frac{m}{50}\ \text{dig.}$$

3. Calculus pro momento confusionis:

$l.\frac{1}{p}=0,0086002$	$l.\lambda'=0,0000000$	$l.\nu=9,3416323$
	$l.\mathfrak{B}^3=9,5616157$	$l.B\mathfrak{B}=0,2518118$
	$0,4383843$	$9,0898205$
	adde log. coëffic. $=0,0086002$	$0,0086002$
	$0,4469845$	$9,0984207$

Ergo pars prior $=2,79888$
posterior $=0,12543$

Momentum confusionis $=2,92431$.

Pro lente tertia

$$1.\ \text{Radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{r}{\sigma-\mathfrak{C}(\sigma-\varrho)+\tau\sqrt{(\lambda''-1)}}\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{r}{\varrho+\mathfrak{C}(\sigma-\varrho)-\tau\sqrt{(\lambda''-1)}},\end{cases}$$

ubi notetur esse $\lambda''=1$.

$l.(\sigma-\varrho) =$ 0,1563674	$\sigma = 1,6601$	$\varrho = 0,2267$
$l.(-\mathfrak{C}) =$ 0,0177287	$+ 1,4931$	$- 1,4931$
0,1740961	3,1532	$- 1,2664$
$\mathfrak{C}(\sigma-\varrho) = -1,49313$	denom. anter.	denom. poster.

Log. $\frac{r}{\alpha}$ = 9,4456318(—)	9,4456318(—)
Log. denom. = 0,4987515(+)	0,1025709(—)
8,9468803(—)	9,3430609(+)

Ergo

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &= -0,08848\,\alpha\\ \text{posterior} &= +0,22032\,\alpha.\end{cases}$$

2. Semidiameter aperturae requisita

$$= \frac{2}{7}\cdot\frac{r}{4} + \frac{3}{28}x \quad \text{sive} \quad = 0,02\,\alpha + \frac{3}{28}x,$$

quam aperturam haec lens utique sustinere potest.

3. Calculus pro momento confusionis:

$l.\frac{1}{PQ} = 9,0299632$	$l.\lambda'' = 0,0000000$	$l.\nu = 9,3416323$
$3\,l.B = 1,1938197$	$3\,l.\mathfrak{C} = 0,0531861(-)$	$l.C\mathfrak{C} = 9,7254725$
7,8361435	9,9468139	9,6161598
	7,8361435	7,8361435
	7,7829574(—)	7,4523033

Ergo pars prior $= +0,00606$
posterior $= -0,00283$
Momentum confusionis $= 0,00323.$

Pro lente quarta

$$1.\ \text{Radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{\aleph}{\sigma - \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) + \tau\sqrt{(\lambda'''-1)}}\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{\aleph}{\varrho + \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) - \tau\sqrt{(\lambda'''-1)}},\end{cases}$$

ubi iterum sumatur $\lambda''' = 1$.

$l.(\sigma-\varrho)=0{,}1563674$	$\sigma=1{,}6601$	$\varrho=0{,}2267$
$l.\mathfrak{D}=9{,}8239086$	$0{,}9556$	$0{,}9556$
$l.\mathfrak{D}(\sigma-\varrho)=9{,}9802760$	$0{,}7045$	$1{,}1823$
$\mathfrak{D}(\sigma-\varrho)=0{,}95560$	denom. anter.	denom. poster.

$\log.\frac{s}{\alpha}=9{,}0844942\,(-)$	$9{,}0844942\,(-)$
$\log.\text{denom.}=9{,}8478810$	$0{,}0727277$
$=9{,}2366132\,(-)$	$9{,}0117665\,(-)$

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &= -\,0{,}17243\,\alpha\\ \text{posterior} &= -\,0{,}10273\,\alpha.\end{cases}$$

2. Semidiameter aperturae requisita $=\frac{1}{7}x$, quam aperturam lens commode sustinebit; si enim minor radius lentis secundae, qui est $0{,}58257\,\alpha$, sustinet aperturam x,[*] hic radius minor, qui est $0{,}10273\,\alpha$, commode sustinebit aperturam $\frac{1}{7}x$.

3. Calculus pro momento confusionis:

$l.\frac{1}{PQk}=9{,}1549019$	$l.\lambda'''=0{,}0000000$	$l.\nu=9{,}3416323$
$3\,l.BC=0{,}3170511\,(-)$	$3\,l.\mathfrak{D}=9{,}4717258$	$l.\mathfrak{D}D=0{,}1249386$
$8{,}8378508$	$0{,}5282742$	$9{,}2166937$
	$8{,}8378508$	$8{,}8378508$
	$9{,}3661250$	$8{,}0545445$

Ergo pars prior $=0{,}23234$

posterior $=0{,}01133$

Momentum confusionis $=0{,}24367$.

Pro lente quinta

1. Quia haec lens utrinque debet esse aeque convexa, ob eius distantiam focalem

$$t=-\,0{,}09762\,\alpha$$

erit

$$\text{radius utriusque faciei}=1{,}06\,t=-\,0{,}10348\,\alpha;$$

nunc vero erit $\lambda'''=1+0{,}60006\,(2\mathfrak{C}-1)^2$; at est $2\mathfrak{C}-1=6{,}5$, ergo

$$\log.\ (2\mathfrak{E}-1) = 0{,}8129134$$

et

$$\begin{aligned} \log.\ (2\mathfrak{E}-1)^2 &= 1{,}6258268 \\ \log.\ 0{,}60006 &= 9{,}7781947 \\ &\ 1{,}4040215 \end{aligned}$$

adeoque $\lambda'''' = 26{,}352$.

2. Semidiameter aperturae hic per hypothesin est $\frac{1}{4}t = -0{,}02440\,\alpha$; altera enim pars $\frac{1}{98}x$, quam haec lens facillime patitur.

3. Calculus pro momento confusionis:

$$\begin{array}{r|r|r} l.\frac{1}{PQkk'} = 8{,}0087738 & l.\lambda'''' = 1{,}4208136 & l.\nu = 9{,}3416323 \\ 3\,l.BCD = 1{,}2201411 & 3\,l.\mathfrak{E} = 1{,}7220939 & l.E\mathfrak{E} = 0{,}7087297 \\ 6{,}7886327 & 9{,}6987197 & 8{,}6329026 \\ & 6{,}7886327 & 6{,}7886327 \\ & 6{,}4873524 & 5{,}4215353 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo pars prior} &= 0{,}00031 \\ \text{posterior} &= -0{,}00002 \\ \text{Momentum confusionis} &= 0{,}00029. \end{aligned}$$

Pro lente sexta

1. Quia per hypothesin haec lens utrinque debet esse aeque convexa, ob eius distantiam focalem

$$u = -0{,}07099\,\alpha$$

erit

$$\text{radius utriusque faciei} = 1{,}06\,u = -0{,}07525\,\alpha;$$

tum vero erit $\lambda''''' = 1{,}60006$.

2. Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}u = -0{,}01775\,\alpha$.

3. Calculus pro momento confusionis:

$$\begin{array}{r|r} l.\frac{1}{PQkk'T} = 8{,}3098038 & l.\lambda''''' = 0{,}2041363 \\ 3\,l.BCDE = 1{,}6242363 & 6{,}6855675 \\ 6{,}6855675 & 6{,}8897038 \end{array}$$

Ergo momentum confusionis = 0,00077.

V. His inventis colligantur omnia momenta confusionis in unam summam, quae erit 3,17227. Nunc autem duo casus sunt considerandi, prout primam lentem concavam vel ex vitro coronario vel ex crystallino parare voluerimus, quos seorsim evolvi oportet.

1. Pro prima lente concava ex vitro coronario paranda

Pro hac ergo lente erit

$$\lambda = 3{,}17227, \quad \text{unde} \quad \lambda - 1 = 2{,}17227;$$

hincque fiet sequens calculus:

$$\begin{array}{rl|c}
\text{Log. } (\lambda - 1) = & 0{,}3369138 & \\
\hline
\text{Log. } \sqrt{(\lambda - 1)} = & 0{,}1684569 & \\
\text{Log. } \tau = & 9{,}9662356 & \text{ergo} \\
\hline
 & 0{,}1346925 & \tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}3636.
\end{array}$$

Nunc cum sit pro hac lente

$$\text{radius} \left| \begin{array}{ll} \text{anterior} & = \dfrac{\alpha}{\sigma - \tau\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterior} & = \dfrac{\alpha}{\varrho + \tau\sqrt{(\lambda-1)}}, \end{array} \right.$$

calculus ita se habebit:

$$\begin{array}{rlcrl}
\sigma = & 1{,}6601 & \qquad & \varrho = & 0{,}2267 \\
\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = & 1{,}3636 & & & 1{,}3636 \\
\hline
 & 0{,}2965 & & & 1{,}5903
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|rl}
l.\,0{,}2965 = & 9{,}4720247 & l.\,1{,}5903 = & 0{,}2014791 \\
\text{complementum} = & 0{,}5279753 & \text{complementum} = & 9{,}7985208
\end{array}$$

sicque prodit

$$\text{radius} \left\{ \begin{array}{ll} \text{anterior} & = 3{,}37268\,\alpha \\ \text{posterior} & = 0{,}62881\,\alpha, \end{array} \right.$$

semidiametro aperturae existente $x = \frac{m}{50}$ dig. $= 1$ dig.

2. Pro prima lente concava ex vitro crystallino paranda

Pro hac igitur lente erit

$$\lambda = \tfrac{9875}{8724} \cdot 3{,}17227 \quad \text{seu} \quad \lambda = 3{,}59080,$$

et quia pro vitro crystallino est

$$\varrho = 0{,}1414, \quad \sigma = 1{,}5827, \quad \tau = 0{,}8775,$$

calculus ita se habebit:

Log. $(\lambda - 1) = 0{,}4134339$	
Log. $\sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}2067169$	
Log. $\tau = 9{,}9432471$	ergo
$0{,}1499640$	$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}41242$
$\sigma = 1{,}5827$	$\varrho = 0{,}1414$
subtr. $1{,}4124$	add. $1{,}4124$
$0{,}1703$	$1{,}5538$
log. $9{,}2312146$	log. $0{,}1913951$
complementum $0{,}7687854$	complementum $9{,}8086049$

sicque prodit

$$\text{radius} \begin{cases} \text{anterior} = 5{,}87199\,\alpha \\ \text{posterior} = 0{,}64358\,\alpha \end{cases}$$

semidiametro aperturae existente $x = \frac{m}{50} = 1$ dig.

VI. Quia binae priores lentes coniunctim lentem obiectivam constituunt, cuius semidiameter aperturae $= 1$ dig., statuatur earum minimus radius, qui est $-0{,}58257\alpha$, > 4 dig. hincque concludetur sumi debere $-\alpha > \frac{4}{0{,}58257}$ dig., hoc est $-\alpha > 7$ dig. vel saltim non minus, ita ut, si optimus successus sperari posset, accipere liceret $-\alpha = 7$ dig. Sin autem aberratio quaedam sit pertimescenda, tantum opus erit mensuram unius digiti augere. Commoditatis autem gratia sumamus $\alpha = -10$ dig.; unde sequens prodit constructio huius telescopii determinata pro multiplicatione $m = 49$.

1. Pro lente obiectiva
quatenus ex vitro coronario paratur

$$\text{Radius faciei}\left\{\begin{array}{ll}\text{anterioris} & = -33{,}73 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = -6{,}29 \text{ dig.}\end{array}\right\}\text{ Crown Glass.}$$

(1). Pro lente obiectiva
quatenus ex vitro crystallino paratur

$$\text{Radius faciei}\left\{\begin{array}{ll}\text{anterioris} & = -58{,}72 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = -6{,}44 \text{ dig.}\end{array}\right\}\text{ Flint Glass.}$$

Cuius distantia focalis pro utroque casu $= -10$ dig.
Semidiameter aperturae $= 1$ dig.
Intervallum ad secundam $= 0{,}2 = \frac{1}{5}$ dig.

2. Pro lente secunda

$$\text{Radius faciei}\left\{\begin{array}{ll}\text{anterioris} & = 11{,}45 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = 5{,}83 \text{ dig.}\end{array}\right\}\text{ Crown Glass.}$$

Cuius distantia focalis $= 7{,}28$ dig.
Semidiameter aperturae $= 1$ dig.
Intervallum ad tertiam $= 22{,}82$ dig.

3. Pro lente tertia

$$\text{Radius faciei}\left\{\begin{array}{ll}\text{anterioris} & = 0{,}884 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = -2{,}20 \text{ dig.}\end{array}\right\}\text{ Crown Glass.}$$

Cuius distantia focalis $= 2{,}79$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0{,}3$ dig.
Intervallum ad quartam $= 3{,}19$ dig.

4. Pro lente quarta

$$\text{Radius faciei}\left\{\begin{array}{ll}\text{anterioris} & = 1{,}72 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = 1{,}03 \text{ dig.}\end{array}\right\}\text{ Crown Glass.}$$

Cuius distantia focalis $= 1{,}21$ dig.
Semidiameter aperturae $= \frac{1}{7}$ dig.
Intervallum ad quintam $= 3{,}90$ dig.

5. Pro lente quinta

Radius utriusque faciei $= 1{,}03$ dig. Crown Glass.

Cuius distantia focalis est 0,97 dig.
Semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}$ dig.
Intervallum ad sextam $= 0{,}36$ dig.

6. Pro lente sexta

Radius faciei utriusque $= 0{,}75$ dig. Crown Glass.

Cuius distantia focalis $= 0{,}71$ dig.
Semidiameter aperturae $= 0{,}18 = \frac{1}{6}$ dig.
Distantia ad oculum usque $= 0{,}40$ dig.

Huius igitur telescopii longitudo tota fiet

$$= 30{,}87 \text{ dig.} = 2\tfrac{1}{2} \text{ ped.}$$

et semidiameter campi apparentis $= 30\frac{2}{3}$ min.

APPENDIX
DE
CONSTRVCTIONE
TELESCOPIORVM
CATOPTRICO-DIOPTRICORVM.

CAPUT I

DE IMAGINIBUS PER SPECULA SPHAERICA FORMATIS EARUMQUE DIFFUSIONE

PROBLEMA 1

1. *Si a puncto lucido in axe speculi constituto radii axi proximi in speculum incidant, invenire locum imaginis.*

SOLUTIO

Sit PAP (Fig. 1) speculum sphaericum probe politum centro O radio $OA = f$ descriptum, cuius axis sit recta AOE, in cuius puncto E constitutum

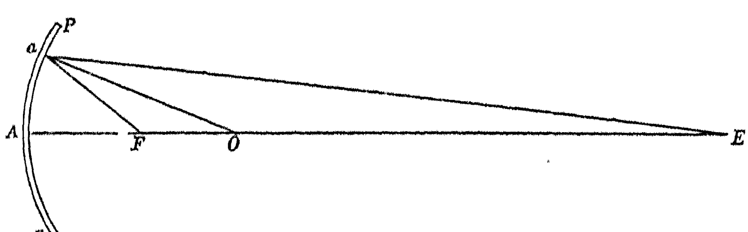

Fig. 1.

sit punctum lucidum, et ponatur eius distantia $EA = a$, unde radii in totam speculi superficiem incidant, e quibus autem eos tantum hic consideramus, qui axi sint proximi seu qui in puncta a medio puncto speculi A proxima incidant. Talis igitur radius incidens sit Ea, et ad punctum a ex centro O ducatur radius $Oa = f$; qui cum in speculum sit normalis, erit EaO angulus incidentiae, cui ab altera parte rectae Oa capiatur angulus aequalis OaF, eritque recta aF radius reflexus cum axe occurrens in puncto F, in quo

puncto adeo omnes radii axi proximi e puncto E emissi concurrent, siquidem etiam radius EA secundum ipsum axem emissus in punctum F reflectitur, ita ut punctum F sit imago puncti lucidi E per reflexionem formata, et cum a radiis axi proximis formetur, in hoc puncto erit imago principalis, uti eam in tractatu de lentibus vocavimus. Ad locum igitur istius puncti F inveniendum consideretur triangulum EaF, cuius angulus EaF bisectus est recta Oa, unde notum theorema geometricum praebet hanc proportionem:

$$Ea : EO = Fa : FO;$$

deinde, quia in triangulo EaO anguli ad E et ad a sunt infinite parvi, in triangulo autem OaF anguli ad O et a, erit $Ea = EO + f$ et $Fa = f - OF$, unde illa proportio abit in hanc:

$$EO + f : EO = f - OF : OF$$

et componendo

$$2EO + f : EO = f : OF.$$

Cum iam sit $EO = EA - AO = a - f$, fiet $2a - f : a - f = f : OF$ hincque

$$OF = \frac{(a-f)f}{2a-f}$$

sicque locus puncti F innotescit, cuius distantia a puncto A erit

$$AF = f - FO = \frac{af}{2a-f}.$$

COROLLARIUM 1

2. Ex data ergo distantia puncti lucidi E a speculo $EA = a$ invenimus distantiam imaginis principalis super axe AF; quam cum in lentibus littera α designaverimus, etiam hic eadem littera utamur, ita ut sit

$$\alpha = \frac{af}{2a-f}.$$

COROLLARIUM 2

3. Speculum hic tanquam concavum spectavimus, cuius radius esset $AO = f$, unde valores positivi huius litterae f specula concava, valores vero

negativi specula convexa denotabunt. Tum vero etiam distantia α, quatenus valorem habet positivum, distantiam imaginis ante speculum indicabit; sin autem prodeat negativa, id indicio erit imaginem post speculum cadere eamque fore fictam, cum praesens sit realis. Hinc autem intelligitur imaginem fore realem, si fuerit $a > \frac{1}{2}f$, siquidem sit $f > 0$; sin autem sit $f < 0$ seu speculum convexum, tum imago semper post speculum cadet eritque ficta, non realis.

COROLLARIUM 3

4. Si puncti lucidi distantia $AE = a$ fuerit infinita, tum distantia imaginis principalis a speculo erit $AF = \frac{1}{2}f$, ita ut haec distantia $AF = \frac{1}{2}f$ pro distantia focali speculi sit habenda; hinc, si speculi distantiam focalem ponamus $= p$, erit radius speculi $f = 2p$. Tum vero in genere distantiae a et α ita a se invicem pendebunt, ut sit

$$\alpha = \frac{ap}{a-p} \quad \text{hincque} \quad p = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$$

et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha},$$

prorsus uti in lentibus usu venire supra vidimus.

SCHOLION

5. Hic notatu inprimis dignum occurrit, quod tres istae distantiae a, α et p eodem prorsus modo a se invicem pendent uti in lentibus; ex quo evidens est ratione calculi specula perinde tractari posse ac lentes, quae calculi convenientia adhuc in sequentibus magis illustrabitur. Hic tantum notasse iuvabit lentibus convexis respondere specula concava; uti enim lentibus convexis distantias focales positivas tribuimus, quippe quarum foci sunt reales, ita etiam specula concava realem habent focum ibique aeque vi urendi pollent atque lentes convexae in suis focis; discrimen tamen in eo situm est, quod in speculis concavis focus ante ea cadat, cum in lentibus convexis post eas formetur; atque simili modo specula convexa ad lentes concavas referentur, dum in utrisque focus tantum fictus datur, in quo scilicet radii non revera congregentur. Quando ergo de speculis sermo erit, distantia focalis positiva semper speculum concavum, distantia vero focalis negativa speculum con-

vexum indicabit, ac si distantia focalis evadat infinita, speculum erit planum; simili modo, quo lens distantiam focalem habens infinitam est plano-plana. Praeterea vero etiam observasse iuvabit, si, uti in Dioptrica fecimus, statuamus

$$\alpha = Aa \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = \frac{A}{A+1},$$

tum etiam fore

$$p = \mathfrak{A}\alpha.$$

PROBLEMA 2

6. *Si non amplius lucidum punctum E, sed obiectum $E\varepsilon$ axi speculi perpendiculariter insistat, eius imaginem, quae in puncto F situ inverso repraesentabitur, definire.*

SOLUTIO

Ponatur iterum distantia huius obiecti a speculo $EA = a$ (Fig. 2) sitque eius magnitudo $E\varepsilon = \zeta$, quippe qua denominatione supra de lentibus sumus

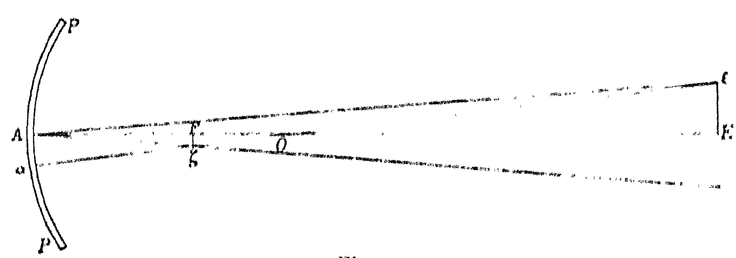

Fig. 2.

usi, ita ut ζ semper sit quantitas valde parva respectu distantiae $EA = a$ seu angulus $EA\varepsilon$ quasi infinite parvus. Deinde sit ut ante radius speculi $OA = f$, eius distantia focalis $= p$, ita ut sit $f = 2p$, et distantia imaginis principalis a speculo $AF = \alpha$, ita ut sit $\alpha = \frac{ap}{a-p}$. His positis facile intelligitur imaginem quaesitam in punctum F incidere atque ad contrariam partem axis fore directam; ducta enim recta εA referet radium incidentem, cui convenit radius reflexus $A\zeta$, qui ergo per imaginis extremitatem transire debebit; unde, si in puncto F normaliter ad axem ducatur recta $F\zeta$ ad radium reflexum $A\zeta$ terminata, haec recta $F\zeta$ imaginem principalem obiecti exhibebit; cuius ergo magnitudo ex similitudine triangulorum $AE\varepsilon$ et $AF\zeta$ ita definietur, ut sit

$$F\zeta = \frac{AF \cdot E\varepsilon}{AE} = \frac{\alpha \cdot \xi}{a},$$

quod idem etiam hoc modo ostendi potest. Ex puncto ε per centrum speculi O ducatur etiam radius incidens $\varepsilon O\alpha$; qui cum sit normalis, eius reflexus in ipsum cadet transibitque etiam per punctum ζ, unde similitudo triangulorum $OE\varepsilon$ et $OF\zeta$ dabit

$$F\zeta = \frac{OF \cdot E\varepsilon}{OE}.$$

Est vero $OF = f - \alpha$ et $OE = a - f$, ex quo fit

$$F\zeta = \frac{(f-\alpha)\xi}{a-f}.$$

Cum ex superiori problemate sit

$$\alpha = \frac{af}{2a-f} \quad \text{hincque} \quad f = \frac{2a\alpha}{a+\alpha},$$

erit

$$f - \alpha = \frac{(a-\alpha)\alpha}{a+\alpha} \quad \text{et} \quad a - f = \frac{(a-\alpha)a}{a+\alpha}$$

hincque substitutis his valoribus fiet

$$F\zeta = \frac{\alpha \cdot \xi}{a},$$

prorsus ut ante; quo ipso confirmatur rectam $F\zeta$ axi recte normalem esse ductam.

COROLLARIUM 1

7. Hic ergo etiam magnitudo imaginis principalis eodem plane modo ex obiecti magnitudine determinatur, quo in Dioptrica id fieri supra ostendimus; unde, si, ut ibi fecimus, statuamus $\alpha = Aa$, habebimus etiam hic

$$F\zeta = A \cdot \zeta.$$

COROLLARIUM 2

8. Quia nostra figura speculum concavum refert, eius analogia cum lentibus convexis etiam hic manifesto cernitur; quemadmodum enim lentes convexae imagines inversas post se repraesentant, ita specula concava imagines itidem inversas ante se referunt; iam enim observavimus, quae post lentes contingunt, cum iis comparari debere, quae ante specula contingunt.

PROBLEMA 3

9. *Si a puncto lucido E in axe speculi sito radii incidant in extremitatem speculi P, eorum cum axe concursum in puncto f investigare indeque spatium diffusionis determinare.*

SOLUTIO

Sit iterum distantia $EA = a$ (Fig. 3), radius speculi $OA = OP = f = 2p$ denotante p distantiam speculi focalem. Iam tantum sit speculum, ut sit

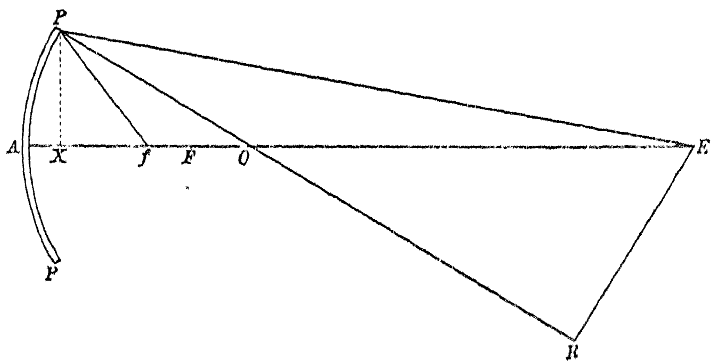

Fig. 3.

angulus $AOP = \omega$, et cum perpendiculum PX denotet semidiametrum aperturae speculi, sit haec linea $PX = x$ eritque $x = f \sin.\omega$. Demisso iam ex puncto lucido E in radium PO productum perpendiculo ER ob $EO = a - f$ et angulum $EOR = \omega$ erit

$$ER = (a - f)\sin.\omega \quad \text{et} \quad OR = (a - f)\cos.\omega$$

hincque

$$PR = f + (a - f)\cos.\omega;$$

unde invenitur

$$EP = V(PR^2 + ER^2) = V(a^2 - 2af + 2f^2 + 2f(a - f)\cos.\omega),$$

quae brevitatis gratia sit $= v$, atque hinc erit anguli incidentiae EPO ideoque etiam anguli reflexionis OPf sinus

$$= \frac{ER}{EP} = \frac{(a-f)\sin.\omega}{v}$$

et cosinus

$$= \frac{f + (a-f)\cos.\omega}{v}.$$

Cum iam in triangulo OPf detur angulus OPf una cum angulo $POf = \omega$ et latere $OP = f$, si vocetur angulus $AfP = \psi$, ob $\psi = \omega + OPf$ erit

$$\sin.\psi = \frac{f\sin.\omega + 2(a-f)\sin.\omega\cos.\omega}{v}$$

atque hinc ex natura trianguli erit $\sin.\psi : OP = \sin.OPf : Of$, ex qua analogia colligitur

$$Of = \frac{f(a-f)}{f + 2(a-f)\cos.\omega}$$

hincque intervallum

$$Af = \frac{f^2 + f(a-f)(2\cos.\omega - 1)}{f + 2(a-f)\cos.\omega},$$

haecque est solutio generalis nostri problematis.

Cum autem in praxi angulus AOP nunquam tantus assumatur, ut non liceat potestates anguli ω quadratica altiores negligere, expressio inventa commode ad formam simpliciorem sequenti modo reducetur. Cum sit

$$\cos.\omega = \sqrt{(1 - \sin.\omega^2)} = 1 - \frac{1}{2}\sin.\omega^2,$$

ob $\sin.\omega = \frac{x}{f}$ erit

$$\cos.\omega = 1 - \frac{x^2}{2f^2}$$

hincque ille denominator $f + 2(a-f)\cos.\omega$ fiet

$$= 2a - f - \frac{(a-f)x^2}{f^2},$$

ex quo pariter proxime erit

$$\frac{1}{f + 2(a-f)\cos.\omega} = \frac{1}{2a - f - \frac{(a-f)x^2}{f^2}} = \frac{1}{2a-f} + \frac{(a-f)x^2}{f^2(2a-f)^2}.$$

Unde intervallum modo inventum fit

$$Of = \frac{f(a-f)}{2a-f} + \frac{(a-f)^2x^2}{f(2a-f)^2}$$

atque hinc intervallum, quod potissimum quaerimus,

$$Af = \frac{af}{2a-f} - \frac{(a-f)^2x^2}{f(2a-f)^2}.$$

Quare, cum ante locum imaginis principalis F ita invenissemus, ut esset $AF = \frac{af}{2a-f}$, nunc innotescit spatium diffusionis

$$Ff = \frac{(a-f)^2 x^2}{f(2a-f)^2}.$$

Praeterea cum etiam plurimum intersit angulum ψ nosse, quo radii reflexi Pf ad axem inclinantur, ex formula supra inventa colligemus itidem proxime

$$\psi = \frac{(2a-f)x}{af}.$$

Quoniam enim potestates ipsius x quadrato maiores negligimus, numerator ibi inventus fit $\frac{(2a-f)x}{f}$ et in denominatore, ubi iam ipsum quadratum x^2 negligere licet, fit simpliciter $= a$.

COROLLARIUM 1

10. Quo haec ad formulas pro lentibus datas accommodemus, ubi tantum binas distantias a et α in computum induximus, ob $\alpha = \frac{af}{2a-f}$ habebimus $f = \frac{2a\alpha}{a+\alpha}$; unde fit

$$a - f = \frac{(a-\alpha)a}{a+\alpha} \quad \text{et} \quad 2a - f = \frac{2a^2}{a+\alpha},$$

atque hinc spatium diffusionis erit

$$Ff = \frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 x^2}{8a^3\alpha},$$

quod ergo, perinde ac in lentibus usu venit, quadrato semidiametri aperturae x^2 est proportionale; quin etiam ipsum hoc spatium Ff in eundem sensum cadit ac in lentibus.

COROLLARIUM 2

11. Simili modo poterimus etiam angulum obliquitatis ψ per solas distantias a et α itemque x exprimere; prodibit enim $\psi = \frac{x}{\alpha}$. Hunc autem angulum supra in calculo circa lentes instituto sollicite definivimus.

SCHOLION

12. Cum quaestio esset de lentibus earumque apertura maxima, quam capere possent, sumsimus x aequale parti quartae radii curvaturae; quodsi ergo hic idem institutum sequamur et sumamus $x = \frac{1}{4}f$, hinc reperietur angulus $\omega = 14^0\,30'$, ita ut totus arcus PAP infra 30^0 capi debeat. Quando autem hoc speculum locum lentis obiectivae sustinet, eius apertura longe aliam determinationem postulat, quam scilicet ex mensura confusionis definiri oportet, unde huius speculi apertura ad multo pauciores gradus reducetur, uti in sequentibus docebitur. Nunc autem etiam opus est, ut ostendamus, quemadmodum radii a nostro speculo reflexi et imaginem diffusam formantes porro ab alio speculo denuo reflectantur et qualem imaginis diffusionem tum sint producturi. Hunc in finem bina sequentia lemmata perpendi conveniet.

LEMMA 1

13. *Si distantia obiecti a speculo $EA = a$ particula minima da ulterius a speculo removeatur, tum imago principalis, cuius distantia a speculo erat $AF = \alpha$, ad speculum propius accedet particula $d\alpha$, ita ut sit $d\alpha = \frac{-\alpha^2 da}{a^2}$.*

DEMONSTRATIO

Cum enim sit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} = \frac{2}{f}$$

atque radius f idem maneat, utcunque distantiae a et α inter se varientur, differentiatio dabit

$$\frac{da}{a^2} + \frac{d\alpha}{\alpha^2} = 0, \quad \text{unde} \quad d\alpha = -\frac{\alpha^2 da}{a^2}.$$

LEMMA 2

14. *Si radii in speculum incidentes ad axem sint inclinati angulo $= \Phi$, invenire angulum ψ, sub quo radii reflexi ad axem speculi erunt inclinati.*

SOLUTIO

Sit igitur angulus $AEP = \Phi$ (Fig. 3, p. 106), quo radii incidentes EP ad axem speculi inclinantur, eritque proxime $\Phi = \frac{x}{a}$ ideoque $x = a\Phi$. Tum vero

vidimus angulum, quo radii reflexi ad eundem axem inclinantur, fore $\psi = \frac{x}{\alpha}$; quocirca erit $\psi = \frac{a\Phi}{\alpha}$ seu erit

$$\Phi : \psi = \alpha : a$$

seu reciproce ut distantiae a speculo.

PROBLEMA 4

15. *Si radii, postquam a primo speculo reflexi imaginem diffusam formaverunt, in aliud speculum super eodem axe constitutum incidant, determinare tam imaginem principalem quam eius diffusionem, quam radii a secundo speculo reflexi exhibebunt.*

SOLUTIO

Cum $F\zeta$ (Fig. 4) sit imago principalis a primo speculo formata, quam invenimus $F\zeta = \frac{\alpha \cdot \zeta}{a}$, sit eius distantia a secundo speculo $FB = b$ atque ipsum

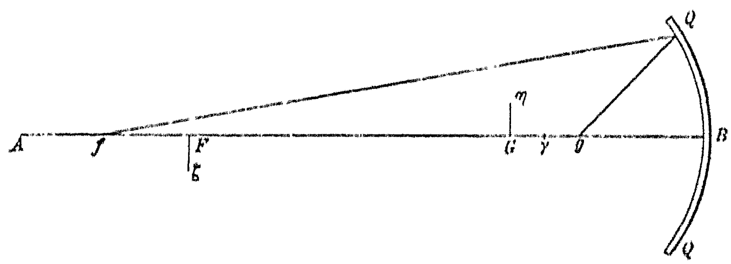

Fig. 4.

hoc speculum ita sit comparatum, ut ab eius reflexione imago principalis formetur $G\eta$, sitque distantia $BG = \beta$ atque, uti iam vidimus, reperietur

$$G\eta = \frac{\beta}{b} \cdot F\zeta = \frac{\alpha\beta}{ab}\zeta,$$

quae imago iterum erit erecta atque a radiis axi proximis formata. Nunc etiam consideremus in spatio diffusionis dato extremitatem f, unde radii emissi cum axe faciant angulum $= \psi = \frac{x}{\alpha}$; verum antequam huius obliquitatis rationem habeamus, fingamus punctum f etiam radios axi proximos emittere, et cum id a speculo B longius sit remotum quam F, eius radii concurrent in puncto huic speculo propiore γ, ad quod inveniendum referet hic $db = Ff$ et $d\beta = - G\gamma$; unde colligitur $G\gamma = \frac{\beta^2}{b^2} \cdot Ff$. Quare, si in f obiectum verum

esset constitutum, eius imago principalis caderet in γ; quatenus autem ex f nulli alii radii emittuntur, nisi qui cum axe faciant angulum $=\psi$, ii denuo reflexi incident in axem in puncto g ipsi speculo B adhuc propiore quam γ, ita ut hic casus similis sit praecedenti problemati, quo punctum f respondet puncto E, punctum γ puncto F et punctum g puncto f, hoc solo discrimine, ut, quod ibi erat a et α, hic sit b et β; licebit enim utique hic pro distantia Bf sumere $BF=b$ et pro distantia $B\gamma$ sumere β; hinc ergo per formulam supra inventam, si loco x hic scribatur y, fiet

$$\gamma g = \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 y^2}{8b^3\beta}.$$

Quid autem nunc sit y, ex angulo ψ facillime definitur. Ducto enim radio fQ sub angulo $BfQ=\psi=\frac{x}{\alpha}$ erit y semidiameter aperturae huius speculi QBQ ideoque

$$y = Bf\cdot\psi = \frac{bx}{\alpha};$$

quo valore substituto prodit

$$\gamma g = \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 x^2}{8\alpha^2 b\beta}.$$

Quocirca totum spatium diffusionis iam erit

$$Gg = \frac{\beta^2}{b^2}\cdot Ff + \gamma g$$

seu

$$Gg = \frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 x^2}{8a^3\alpha} + \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 x^2}{8\alpha^2 b\beta}.$$

Nunc autem post secundam reflexionem angulus, sub quo radii extremi ad axem erunt inclinati, colligitur ex lemmate 2

$$= \frac{b\psi}{\beta} = \frac{b}{\alpha\beta}\cdot x.$$

SCHOLION 1

16. Cum igitur speculum, ad quod referuntur binae distantiae a et α et cuius semidiameter aperturae est $=x$, gignat spatium diffusionis

$$Ff = \frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 x^2}{8a^3\alpha},$$

comparemus hoc spatium cum eo, quod lens sub similibus circumstantiis producit, atque in primo libro (§ 49) vidimus pro tali lente esse spatium diffusionis

$$Ff = \frac{n(4n-1)\alpha^2 x^2}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right),$$

quod quidem iam est minimum, quod a lente ad has distantias a et α relata cum apertura, cuius semidiameter est x, generari potest. Quo autem facilius hanc comparationem instituere valeamus, ponamus utrinque distantiam obiecti a esse infinitam atque e speculo nascetur spatium diffusionis

$$Ff = \frac{x^2}{8\alpha};$$

quod autem a lente nascitur, erit

$$Ff = \frac{n(4n-1)x^2}{8(n-1)^2(n+2)\alpha},$$

ubi $n:1$ denotat rationem refractionis, et sumto $n = 1{,}55$ hoc spatium inventum est $Ff = 0{,}938191 \cdot \frac{x^2}{\alpha}$.

Unde patet a speculo multo minorem diffusionem oriri quam a lente, quandoquidem illa erit ad hanc ut $\frac{1}{8} : 0{,}938191$, hoc est propemodum ut $1 : 7{,}505528$ seu ut $1 : 7\frac{1}{2}$; quae ergo proportio cum proprie in speculis vel lentibus obiectivis locum habeat, hinc praecipua causa innotescit, cur specula loco lentium obiectivarum substituta multo breviora telescopia suppeditaverint, quandoquidem ob minorem confusionem distantiam focalem minorem accipere licet, ad quod accedit, quod in his telescopiis catoptricis radii in speculum obiectivum incidentes primo ad alterum speculum reflectantur, unde denuo per eandem viam revertuntur, antequam per lentes oculares transeunt, ita ut distantia amborum speculorum bis sit computanda sicque longitudo instrumenti denuo fere ad semissem reducatur. Hoc ergo commodum specula praestarent etiam sine ullo respectu ad eorum qualitatem habito, qua radii diversorum colorum a reflexione non disperguntur, uti fit in refractione. Verum tamen hic etiam insigne speculorum incommodum non est reticendum, in eo consistens, quod speculum etiam maxime politum semper multo pauciores radios reflectat, quam per lentem eiusdem magnitudinis transmittuntur. Atque haec causa est, quod telescopia catoptrica plerumque multo minorem claritatis gradum largiantur.

SCHOLION 2

17. Quemadmodum hoc postremum problema resolvimus atque etiam diffusionem imaginis a secundo speculo natam definivimus, ita eadem investigatio ad plura specula accommodari posset, nisi ipsa rei natura speculorum usum ad binarium restringeret. Quamobrem coacti sumus radios a secundo speculo reflexos ad lentes vitreas dirigere, per quas demum ad oculum propagentur, atque ob hanc ipsam rationem ipsum speculum obiectivum circa medium perforatum esse debet, ut radiis a secundo speculo reflexis transitus per hoc foramen concedatur, ubi simul a lentibus excipiantur. Quare, cum hactenus speculum obiectivum tanquam integrum simus contemplati, nunc superest, ut etiam foraminis, quo illud est pertusum, in calculo rationem habeamus, ubi simul erit disquirendum, quomodo speculum secundum respectu huius foraminis comparatum esse debeat, ne scilicet nimiam radiorum copiam intercipiat ac tamen sufficiat omnibus radiis a primo speculo reflexis excipiendis; haecque ergo momenta in sequenti problemate accuratius perpendemus.

PROBLEMA 5

18. *Si in telescopio loco lentis obiectivae adhibeatur speculum concavum* $P\pi A\pi P$ (Fig. 5, p. 114) *in medio pertusum foramine* $\pi A\pi$, *cuius centrum sit in axe* AB, *in quo ad distantiam quasi infinitam obiectum seu punctum lucidum concipiatur, ex quo radii axi paralleli in istud speculum* $P\pi\pi P$ *incidant indeque reflexi ad speculum minus super eodem axe normaliter positum* QBQ *dirigantur, unde porro ad lentem vitream prope foramen* $\pi\pi$ *itidem super eodem axe normaliter sitam reflectantur, determinare imagines per duplicem reflexionem formatas earumque diffusionem.*

SOLUTIO

Sit semidiameter totius speculi obiectivi $AP = x$ et semidiameter foraminis $A\pi = y$, radius vero curvaturae speculi $= f$ ideoque distantia focalis $p = \frac{1}{2} f$, tum vero speculi minoris QBQ sit distantia focalis $= q$ et distantia horum speculorum $AB = k$. His positis, cum obiectum in axe AB ad distantiam infinitam remotum concipiatur, radii inde axi paralleli ad speculum obiectivum PP pervenient; qui ergo ut totam eius superficiem reflectentem $P\pi$ quaquaversus adimpleant, speculum QBQ maius esse non debet quam foramen

$\pi\pi$ neque etiam id minus esse conveniet, quia alioquin radii ab obiecto directe in foramen lentemque ibi sitam ingrederentur et repraesentationem inquinarent; ex quo intelligitur semidiametrum aperturae huius speculi minoris esse debere

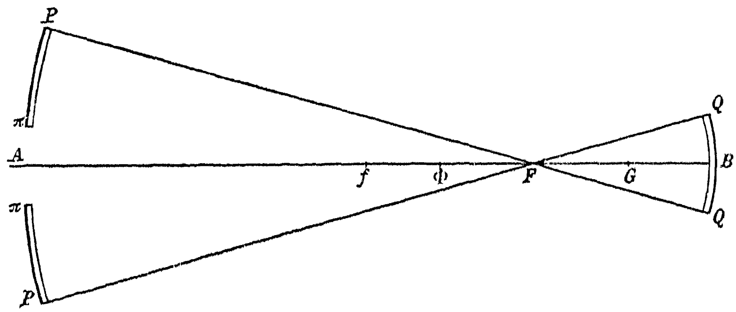

Fig. 5.

$BQ = y$ vel saltem eo non multo maiorem. Quoniam igitur hic distantia obiecti, quae supra posita est $= a$, nostro casu est infinita, si radii axi proximi in speculum incidere possent, iis formaretur imago principalis in F, ita ut esset distantia $AF = \alpha = p$. Quia autem radii axi proximi excluduntur, nulla imago principalis formabitur. Prima ergo imago a radiis circa oram foraminis reflexis formabitur in Φ, ita ut sit intervallum $F\Phi = \frac{y^2}{8\alpha}$, quia hic est y, quod supra erat x, et distantia obiecti $a = \infty$. Imago autem extrema a radiis circa oram speculi PP reflexis formetur in puncto f eritque intervallum $Ff = \frac{x^2}{8\alpha}$; quare, cum ipsa imago principalis hic desit, totum spatium diffusionis hic tantum erit

$$\Phi f = \frac{x^2 - y^2}{8\alpha}.$$

Interim tamen haec puncta F, Φ, f inter se tam erunt propinqua, ut in calculo pro eodem haberi queant. Cum ergo omnes radii a speculo maiore reflexi per punctum F transire sint censendi, ut in speculum QBQ incidant, eius semidiameter BQ tanta esse debet, ut sit

$$AF : AP = BF : BQ,$$

unde fit

$$BQ = \frac{k - \alpha}{\alpha} \cdot x;$$

quae cum ipsi y debeat esse aequalis, habebimus

$$y = \frac{k - \alpha}{\alpha} \cdot x \quad \text{hincque} \quad k = \frac{\alpha(y + x)}{x}.$$

Sin autem minus speculum intra A et F (Fig. 6) esset constitutum, reperiretur

$$BQ = \frac{\alpha - k}{\alpha} \cdot x = y \quad \text{hincque} \quad k = \frac{\alpha(x-y)}{x},$$

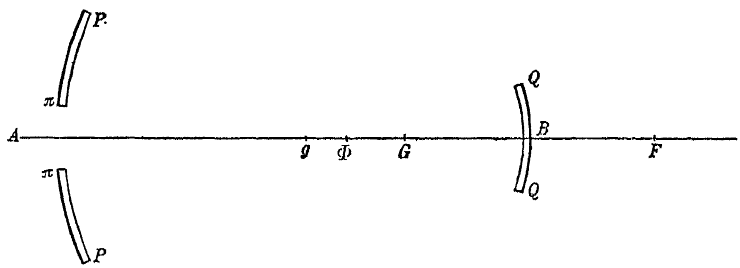

Fig. 6.

quae vero expressio in superiori contenta est censenda, propterea quod radium foraminis y tam positive quam negative capere licet. Cum igitur nunc primae imaginis F distantia a speculo secundo sit $k - \alpha = \frac{\alpha y}{x}$, quam supra vocavimus $= b$, ita ut sit $b = \frac{\alpha y}{x}$, secunda imago a speculo QBQ reflexa cadet in punctum G, ita ut sit $BG = \beta = \frac{bq}{b-q}$, ita ut radii a speculo QBQ reflexi omnes per punctum hoc G transire sint censendi, siquidem hic animum a diffusione imaginis abstrahimus. Nunc igitur insuper efficiendum est, ut isti radii omnes in ipsum foramen $\pi A \pi$ ingrediantur, id quod, cum sit $BQ = A\pi$, eveniet, si modo punctum G propius versus A cadat quam versus B, seu debebit esse $\beta > \frac{1}{2} k$. Invenimus vero

$$\beta = \frac{bq}{b-q} = \frac{\alpha y q}{\alpha y - q x} \quad \text{et} \quad k = \frac{\alpha(y+x)}{x},$$

ita ut nunc esse debeat

$$\frac{\alpha y q}{\alpha y - q x} > \frac{\alpha(y+x)}{2x}, \quad \text{unde oritur} \quad q > \frac{\alpha y(x+y)}{x(3y+x)};$$

ex qua ergo formula distantia focalis speculi minoris definiri poterit, quae ergo determinabitur per semidiametros foraminis et ipsius speculi maioris una cum focali distantia speculi maioris $p = \alpha$; sin autem speculum minus constituatur intra F et A, iam vidimus fore $AB = k = \frac{\alpha(x-y)}{x}$, et cum nunc

sit distantia $b = -\frac{\alpha y}{x}$, distantia $BG = \beta = \frac{\alpha y q}{\alpha y + x q}$; quae ut maior sit quam $\frac{1}{2}k$, necesse est fiat $q > \frac{\alpha y (x-y)}{x(3y-x)}$; unde, si x sit $> 3y$, debebit esse q negativum, ita ut sit

$$q > -\frac{\alpha y (x-y)}{x(x-3y)};$$

at si esset $x = 3y$, capi posset $q = \infty$ sicque speculum minus fieret planum. Quod denique ad diffusionem imaginis secundae in G repraesentatae attinet, ea iterum erit quasi truncata sua imagine principali; quod si litteris $G\Phi g$ repraesentetur ad similitudinem litterarum $F\Phi f$, totum spatium diffusionis tantum erit censendum $= \Phi g$, cuius quantitas ex formula praecedentis problematis reperietur, si loco x^2 scribatur $x^2 - y^2$; unde ob $a = \infty$ erit hic

$$\Phi g = \frac{\beta^2}{b^2} \frac{(x^2-y^2)}{8\alpha} + \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2(x^2-y^2)}{8\alpha^2 b \beta},$$

atque nunc radiorum in Φ concurrentium obliquitas ad axem erit $= \frac{b}{\alpha\beta} \cdot y$, obliquitas vero radiorum in $g = \frac{b}{\alpha\beta} \cdot x$.

COROLLARIUM 1

19. Si ergo minus speculum ultra locum imaginis F collocetur, eius distantia a primo speculo debet esse

$$AB = \frac{\alpha(x+y)}{x} = \alpha + \frac{y}{x} \cdot \alpha,$$

ita ut sit $FB = \frac{\alpha y}{x}$, hocque ergo casu distantia AB maior erit quam distantia focalis speculi principalis; tum vero huius secundi speculi distantia focalis esse debet

$$q > \frac{\alpha y (x+y)}{x(x+3y)}.$$

COROLLARIUM 2

20. Hic autem manifesto supponitur punctum G a puncto B versus A cadere, ita ut distantia β evadat positiva; si enim esset $q > b$, punctum G ad alteram partem speculi QBQ caderet radiique GQ producti manifesto extra foramen praetergrederentur. Quare hic pro q alterum limitem probe observari oportet, ut sit $q < b$ sive $q < \frac{\alpha y}{x}$, tum vero etiam $q > \frac{\alpha y(x+y)}{x(x+3y)}$.

COROLLARIUM 3

21. Sin autem speculum QBQ intra focum F collocetur, oportebit esse distantiam

$$AB = \frac{\alpha(x-y)}{x} = \alpha - \frac{y}{x}\cdot\alpha,$$

ita ut sit

$$FB = \frac{\alpha y}{x}$$

tantoque intervallo prima imago post secundum speculum cadat fiatque $b = -\frac{\alpha y}{x}$, unde deducitur distantia

$$BG = \beta = \frac{\alpha y q}{\alpha y + qx};$$

quae distantia semper est positiva seu versus A dirigitur, nisi forte q sit quantitas negativa; quae cum superare debeat $\frac{1}{2}k$, debet esse

$$2xyq > \alpha y(x-y) + x(x-y)q;$$

deberet ergo esse

$$2xy > x(x-y) \quad \text{seu} \quad y > \tfrac{1}{3}x.$$

Quare si, ut semper in praxi evenit, sit $y < \frac{1}{3}x$, huic conditioni satisfieri nequit, si scilicet alterum speculum sit concavum.

COROLLARIUM 4

22. Hoc ergo casu necesse est, ut minus speculum sit convexum eiusque distantia focalis negativa. Statuatur ergo $q = -\mathfrak{q}$, ut fiat $\beta = \frac{-b\mathfrak{q}}{b+\mathfrak{q}}$, qui valor ob $b = -\frac{\alpha y}{x}$ abit in hunc:

$$\beta = \frac{\alpha y \mathfrak{q}}{\mathfrak{q}x - \alpha y};$$

qui valor ut primo sit positivus, debet esse

$$\mathfrak{q} > \frac{\alpha y}{x}.$$

deinde, ut fiat $2\beta > k$, debet esse

$$2xy\mathfrak{q} > x(x-y)\mathfrak{q} - \alpha y(x-y),$$

ex qua fit

$$\alpha y(x-y) > x(x-3y)\mathfrak{q},$$

unde pro $\mathfrak{q}$ elicitur alter limes

$$\mathfrak{q} < \frac{\alpha y(x-y)}{x(x-3y)} \quad \text{altero existente} \quad \mathfrak{q} > \frac{\alpha y}{x}.$$

COROLLARIUM 5

23. Sin vero praeter consuetudinem foramen tantum fiat, ut sit $3y > x$, tum speculo minori concavo uti licebit, dummodo eius distantia focalis sit $q > \frac{\alpha y(x-y)}{x(3y-x)}$, quemadmodum ex corollario 3 est manifestum, atque hoc casu, quoniam littera q nulla alia conditione restringitur, hoc speculum adeo planum fieri poterit.

SCHOLION

22.[1]) Haec duo specula ita hic sumus contemplati, quemadmodum in telescopiis GREGORIANIS usurpari solent, atque hic tantum ad obiecti punctum medium in axe tubi situm spectavimus, unde radii axi paralleli in speculum principale incidant; alterum vero speculum ita instruximus, ut omnes radios a priori reflexos recipiat eosque porro in foramen proiiciat. Cum autem etiam partes obiecti extra axem sitae visui offerri debeant, quoniam inde radii sub aliqua exigua obliquitate in speculum incidunt, tubum, in quo haec duo specula inseruntur, aliquantillum divergentem confici oporteret vel, quod eodem redit, tubum aliquanto ampliorem effici conveniet quam est diameter speculi; deinde ob eandem rationem etiam speculum minus ultra limites ipsi assignatos extendi deberet, ut etiam istos radios obliquos post reflexionem recipere posset; sed quoniam parum interest, sive extremitates obiecti pari lumine conspiciantur atque eius medium, sive minore, hac amplificatione facile eo magis carere poterimus, quod tota haec obliquitas non ultra aliquot minuta in magnis praesertim multiplicationibus excrescat. Longe aliter autem se habitura esset huius rei tractatio, si etiam specula ad axem instrumenti oblique posita in usum vocarentur, quemadmodum in ipso huius inventionis principio a NEUTONO est factum; sed quia reflexio radiorum oblique incidentium haud exiguam gignit confusionem, hoc argumentum hic neutiquam attingimus.

1) In editione principe loco numerorum 24 et qui sequuntur falso numeri 22 et qui sequuntur scripti sunt. Falsos paragraphorum numeros retinendos esse putavimus. E. Ch.

CAPUT II

DE COMPUTO CONFUSIONIS DUM PRAETER LENTES ETIAM SPECULA AD INSTRUMENTA DIOPTRICA CONFICIENDA ADHIBENTUR

PROBLEMA 1

23. *Si loco primae et secundae lentis specula usurpentur, invenire formulas, quae ob haec duo specula in expressionem supra in Libro I inventam, qua scilicet semidiameter confusionis est inventa, introduci in calculum debent.*

SOLUTIO

In primo libro (§ 91) ostendimus a duabus lentibus oriri spatium diffusionis

$$Gg = \mu\beta^2x^2\left\{\begin{aligned}&+\frac{\alpha^2}{b^2}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)\Big(\lambda\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\Big)^2+\frac{\nu}{a\alpha}\Big)\\&+\frac{b^2}{\alpha^2}\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\Big)\Big(\lambda'\Big(\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}\Big)^2+\frac{\nu}{b\beta}\Big)\end{aligned}\right\}$$

quae expressio ponendo $\alpha = Aa$, $\beta = Bb$, tum vero etiam $\frac{A}{1+A} = \mathfrak{A}$ et $\frac{B}{1+B} = \mathfrak{B}$ abit in hanc:

$$Gg = \frac{\mu A^2B^2x^2}{a}\Big(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}+\frac{b}{A^4a}\Big(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\Big)\Big),$$

atque si hic porro, uti deinceps in tractatu de telescopiis fecimus, ponamus $\frac{\alpha}{b} = \frac{Aa}{b} = -P$, ista expressio induet hanc formam:

$$Gg = \frac{A^2B^2x^2}{a}\Big(\mu\Big(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\Big)-\frac{\mu}{A^3P}\Big(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\Big)\Big).$$

Si nunc loco duarum harum lentium duo substituantur specula, ad quae litterae a, α, b, β cum x similiter sint relatae, in problemate 4 capitis praecedentis (§ 15) invenimus fore spatium diffusionis

$$Gg = \frac{\beta^2}{b^2} \cdot \frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 x^2}{8 a^3 \alpha} + \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 x^2}{8 \alpha^2 b \beta};$$

quae forma posito $\alpha = Aa$, $\beta = Bb$ et $\frac{\alpha}{b} = -P$ induet hanc formam:

$$Gg = \frac{A^2 B^2 x^2}{a} \left(\frac{(1+A)(1-A)^2}{8 A^3} - \frac{(1+B)(1-B)^2}{8 A^3 B^3 P} \right),$$

ex qua cum superiori collata cognoscimus, si loco primae lentis speculum substituatur, tum in computo confusionis loco formulae

$$\mu \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A \mathfrak{A}} \right)$$

scribi debere hanc:

$$\frac{(1+A)(1-A)^2}{8 A^3},$$

ac si etiam loco lentis secundae speculum substituatur, tum simili modo loco formulae

$$\mu \left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B \mathfrak{B}} \right)$$

scribi debere hanc:

$$\frac{(1+B)(1-B)^2}{8 B^3};$$

ac si circumstantiae permitterent, ut etiam loco tertiae lentis speculum simile substitueretur, tum in computo confusionis loco formulae

$$\mu \left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C \mathfrak{C}} \right)$$

scribi deberet haec formula:

$$\frac{(1+C)(1-C)^2}{8 C^3},$$

unde satis superque intelligitur, quomodo quantitas confusionis aestimari debeat, quando loco lentium specula adhibentur.

COROLLARIUM 1

24. Quatenus autem speculum obiectivum foramine est pertusum, cuius radius $= y$, eatenus in factore communi loco x^2 scribi oportet $x^2 - y^2$, ita ut iam expressio pro spatio diffusionis inventa futura sit

$$Gg = \frac{A^2B^2(x^2-y^2)}{a}\cdot\left(\frac{(1+A)(1-A)^2}{8A^3} - \frac{(1+B)(1-B)^2}{8A^3B^3P}\right),$$

ubi notandum est formulam $x^2 - y^2$ proportionalem esse superficiei reflectenti in primo speculo, prorsus uti x^2 proportionale erat superficiei refringenti lentis obiectivae.

COROLLARIUM 2

25. Atque haec formula $x^2 - y^2$ etiam extenditur ad omnes lentes sequentes, quotquot binis speculis insuper adiunguntur; ita, ex. gr., si duae lentes praeter specula adhibeantur, totum spatium diffusionis Ii ita exprimitur:

$$Ii = \frac{A^2B^2C^2D^2(x^2-y^2)}{a}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(1+A)(1-A)^2}{8A^3} - \dfrac{(1+B)(1-B)^2}{8A^3B^3P}\\ + \dfrac{\mu}{A^3B^3PQ}\left(\dfrac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \dfrac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \dfrac{\mu}{A^3B^3C^3PQR}\left(\dfrac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \dfrac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right)\end{array}\right\}$$

unde patet, quid propter specula in nostris formulis generalibus immutari debeat.

COROLLARIUM 3

26. Cum autem nostra specula tantum ad telescopia accommodari queant, ubi est $a = \infty$, $A = 0$ et $Aa = \alpha = p$, ex formulis vinculo inclusis denominator A^3 in factorem communem transfertur sicque pro spatio diffusionis a binis speculis et duabus lentibus orto habebitur haec expressio:

$$Ii = \frac{B^2C^2D^2(x^2-y^2)}{p}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{8} - \dfrac{(1+B)(1-B)^2}{8B^3P}\\ + \dfrac{\mu}{B^3PQ}\left(\dfrac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \dfrac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \dfrac{\mu}{B^3C^3PQR}\left(\dfrac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \dfrac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right)\end{array}\right\}.$$

SCHOLION 1

27. Quoniam autem pro secundo speculo tam littera $B = \frac{\beta}{b}$ quam $P = -\frac{\alpha}{b}$ non amplius ab arbitrio nostro pendet, sed earum valores iam ante

sunt definiti, videamus, quomodo isti valores in computum sint introducendi, atque hic duos casus evolvi conveniet, prouti minus speculum sive ultra focum speculi principalis constituitur, sive citra. Quod quo ad nostras formas succinctius exprimi possit, ponamus in genere $y = \varepsilon x$, ita ut sit $x^2 - y^2 = (1 - \varepsilon^2)x^2$, ubi scilicet ε denotat fractionem foraminis magnitudinem definientem.

I. Primo igitur, quando distantia minoris speculi AB maior est quam distantia focalis p (Fig. 5, pag. 114), tum vidimus (§ 19) esse hanc distantiam AB seu primum intervallum $= (1 + \varepsilon)\alpha = (1 + \varepsilon)p$; quod cum per formulas nostras generales sit $= A\alpha\left(1 - \frac{1}{P}\right) = p\left(1 - \frac{1}{P}\right)$, erit $\frac{1}{P} = -\varepsilon$. Deinde vero etiam vidimus esse $b = \varepsilon p$ et porro, si distantia focalis minoris speculi ponatur $= q$, erit $\beta = \frac{bq}{b - q}$ hincque

$$\frac{\beta}{b} = B = \frac{q}{b - q} = \frac{q}{\varepsilon p - q}.$$

At vero pro q hos dedimus limites: $q < \varepsilon p$ et $q > \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)p}{1 + 3\varepsilon}$; quibus valoribus substitutis spatium illud diffusionis Ii ita exprimetur:

$$Ii = \frac{(1 - \varepsilon^2)C^2D^2q^2x^2}{(\varepsilon p - q)^2 p}\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{8} + \frac{\varepsilon^2(\varepsilon p - 2q)^2 p}{8q^3} \\ - \frac{\mu\varepsilon(\varepsilon p - q)^3}{q^3 Q}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) + \frac{\mu\varepsilon(\varepsilon p - q)^3}{C^3 q^3 QR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right) \end{array}\right\}.$$

II. Sin autem distantia secundi speculi AB minor fuerit quam p (Fig. 6, pag. 115), tum primo erit haec ipsa distantia $= (1 - \varepsilon)p$; quae cum sit $= p\left(1 - \frac{1}{P}\right)$, erit $\frac{1}{P} = \varepsilon$. Deinde erit distantia $b = -\varepsilon p$, et quia secundum speculum debet esse convexum, posito $q = -\mathfrak{q}$ fiet

$$\frac{\beta}{b} = B = \frac{-\mathfrak{q}}{\mathfrak{q} - \varepsilon p};$$

verum pro $\mathfrak{q}$ hos dedimus limites: $\mathfrak{q} > \varepsilon p$ et $\mathfrak{q} < \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)p}{1 - 3\varepsilon}$; quibus valoribus substitutis spatium illud diffusionis ita exprimetur:

$$Ii = \frac{(1 - \varepsilon^2)C^2D^2\mathfrak{q}^2x^2}{(\mathfrak{q} - \varepsilon p)^2 p}\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{8} - \frac{\varepsilon^2(2\mathfrak{q} - \varepsilon p)^2 p}{8\mathfrak{q}^3} \\ - \frac{\mu\varepsilon(\mathfrak{q} - \varepsilon p)^3}{\mathfrak{q}^3 Q}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) + \frac{\mu\varepsilon(\mathfrak{q} - \varepsilon p)^3}{\mathfrak{q}^3 C^3 QR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right) \end{array}\right\}.$$

Quodsi lens in ipso foramine speculi obiectivi constituatur, tum insuper datur intervallum secundum, primo quippe aequale, ac primo quidem casu erit $=(1+\varepsilon)p$. Quod cum per formulas generales sit

$$=-\frac{ABa}{P}\left(1-\frac{1}{Q}\right)=\frac{\varepsilon pq}{\varepsilon p-q}\left(1-\frac{1}{Q}\right),$$

hinc reperitur

$$\frac{1}{Q}=1-\frac{(\varepsilon p-q)(1+\varepsilon)}{\varepsilon q}$$

seu

$$\frac{1}{Q}=\frac{(2\varepsilon+1)q-\varepsilon(1+\varepsilon)p}{\varepsilon q}$$

hincque

$$\frac{1}{PQ}=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p-(2\varepsilon+1)q}{q},$$

ubi notandum est Q fieri non posse positivum nisi q contineatur intra hos limites:

$$q<\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p}{1+2\varepsilon}\quad \text{et}\quad q>\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p}{1+3\varepsilon}.$$

Haec scilicet valent pro casu priore; pro casu vero posteriore reperitur

$$\frac{1}{Q}=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)p-(1-2\varepsilon)\mathfrak{q}}{\varepsilon\mathfrak{q}}$$

et

$$\frac{1}{PQ}=\frac{(2\varepsilon-1)\mathfrak{q}+\varepsilon(1-\varepsilon)p}{\mathfrak{q}},$$

ubi pariter notetur Q fieri negativum, si $\mathfrak{q}$ capiatur intra hos limites:

$$\mathfrak{q}>\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-2\varepsilon}\quad \text{et}\quad \mathfrak{q}<\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-3\varepsilon},$$

at vero Q fieri positivum, si capiatur intra hos limites:

$$\mathfrak{q}<\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-2\varepsilon}\quad \text{et}\quad \mathfrak{q}>\varepsilon p.$$

SCHOLION 2

27.[1]) Quae hic attulimus, ad spatia diffusionis ex speculis et lentibus quotcunque ortae pertinent. Conclusio vero, quae in superiore libro hinc ad

1) Numerus falsus editionis principis; vide notam p. 118. E. Ch.

semidiametrum confusionis ipsam determinandam est deducta, etiam hic quandam mutationem patitur. Quoniam enim semidiametrum confusionis ex ultimae imaginis diffusione conclusimus, notandum est etiam hoc ultimum spatium diffusionis sua imagine principali fore truncatum. Quoniam enim a primo speculo nulla gignitur imago principalis ob defectum radiorum axi proximorum, etiam sequentia spatia diffusionis, quotcunque fuerint lentes, imagine principali destituentur; unde cum horum spatiorum ultimum minus sit propter ipsam hanc mutilationem, inde etiam minor confusio in oculo orietur, quam ob causam etiam semidiameter confusionis, prouti eam in primo libro definivimus, minorem valorem adipiscetur; quam investigationem sequenti problemate suscipiemus.

PROBLEMA 2

28. *Data ultima imagine diffusa, quae tam per bina specula quam omnes lentes sequentes formatur, invenire confusionem in ipso oculo inde oriundam, qua scilicet visio immediate afficitur.*

SOLUTIO

Repraesentet $L\lambda l$ ultimum spatium diffusionis tam per specula quam omnes sequentes lentes formatum, quippe quod est obiectum immediatum visionis,

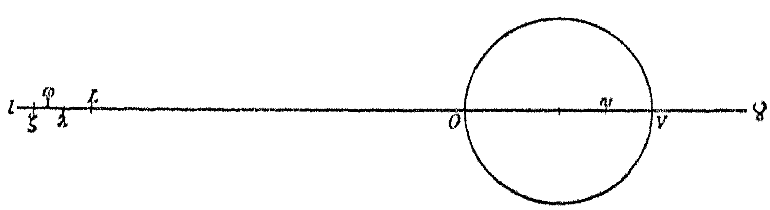

Fig. 7.

unde radii immediate in oculum ingrediuntur; in quo spatio punctum L denotet locum imaginis principalis, ubi radii axi proximi concurrerent, si speculum obiectivum esset integrum; ob foramen autem huius speculi ista imago principalis plane deerit et imago diffusa demum in puncto λ incipiet, ubi radii circa oram foraminis reflexi et per omnes lentes transmissi concurrunt, alter vero terminus sit in l, ubi radii ab extremitate speculi obiectivi reflexi ac per lentes transmissi uniuntur. Quod nunc primo ad magnitudinem huius spatii λl attinet, supra vidimus id esse proportionale formulae $xx - yy$

sive posito $y = \varepsilon x$ huic $(1 - \varepsilon\varepsilon)xx$, unde statuamus hoc spatium:

$$\lambda l = V(1 - \varepsilon\varepsilon)xx.$$

Deinde radiorum in termino λ cum axe concurrentium obliquitas, quam supra ipsi y proportionalem esse vidimus, ponatur $= \mathfrak{B}y = \varepsilon\mathfrak{B}x$; obliquitas vero radiorum extremorum in puncto l concurrentium erit $= \mathfrak{B}x$, ubi litterae V et $\mathfrak{B}$ eosdem valores habent, quos in primo libro (§ 165) assignavimus.

His praemissis quaeramus eum oculi locum, unde haec imago diffusa minima cum confusione conspiciatur. Hunc in finem concipiamus punctum quoddam medium in imagine ζ, a quo oculus ad distantiam suam iustam $= l$ sit remotus, ita ut sit $\zeta O = l$ radiique ex hoc puncto ζ emissi praecise in puncto retinae V congregentur. Hinc ergo puncta cis et ultra hoc punctum ζ vel λ vel l versus sita non in ipsa retina V, sed vel post eam in ϑ vel ante eam in v repraesentabuntur radiique in his punctis se decussantes in ipsa retina circellos sive maiores sive minores referent; atque nunc totum negotium huc reducitur, ut hi circelli quam minimi evadant, quia hoc modo in oculo minima confusio producetur. Primum igitur videndum est, quanti huiusmodi circelli a punctis intra ζ et λ sitis in retina oriantur et quinam eorum futurus sit maximus; quoniam enim hi circelli partim a distantia a puncto ζ, partim a radiorum obliquitate pendent, quae a λ versus ζ progrediendo continuo crescit, facile intelligitur ex puncto quodam medio, puta ω, maximum circellum oriri, quandoquidem tam ex ipso puncto L, ubi obliquitas est nulla, quam ex puncto ζ nullus talis circellus oriretur. Deinde a ζ ad l regrediendo continuo maiores huiusmodi circelli orirentur, ita ut radii ex ipso puncto l emissi ab hac parte maximum circellum gignant; ex quo manifestum est, si punctum ζ ita fuerit assumtum, ut maximi modo dicti circelli ex punctis ω et l orti fiant inter se aequales, tum confusionem in ipsa visione natam omnium fore minimam. Si enim punctum ζ propius ad ω moveretur, tum circellus quidem ab hac parte ortus fieret minor, alter vero ex puncto l ortus tanto maior evaderet; atque contrarium eveniret, si punctum ζ propius versus l caperetur. Ut igitur nunc tam locum puncti ζ quam ei respondentis puncti ω investigemus, totum spatium Ll, etsi id nostro casu parte $L\lambda$ est truncatum, in computum ducamus ponamusque brevitatis gratia $Ll = f$ eritque ex principiis supra expositis

$$f = Vx^2 \quad \text{et} \quad L\lambda = Vy^2 = \varepsilon^2 Vx^2,$$

unde fit, uti initio commemoravimus,

$$\lambda l = (1-\varepsilon^2)\, Vx^2.$$

Praeterea vero vocemus spatia $L\zeta = \zeta$ et $L\omega = \omega$, et quia radii ex hoc puncto ω egressi super retina maximum circellum producere ponuntur, ad hunc inveniendum obliquitatem radiorum in puncto hoc ω nosse oportet. Quia autem obliquitas in L est nulla, in l vero $= \mathfrak{B}x$ et in $\lambda = \varepsilon\mathfrak{B}x$, evidens est obliquitatem crescere in ratione subduplicata distantiae a puncto L; unde obliquitas radiorum in ω erit $= \mathfrak{B}x\sqrt{\frac{\omega}{f}}$.

Radii igitur ex ω egressi concurrent post oculum in puncto ϑ, ita ut sit per principia supra satis stabilita $V\vartheta = \frac{uu}{ll}\cdot\zeta\omega$ denotante u profunditatem oculi OV. Radiorum autem in hoc puncto ϑ concurrentium obliquitas ex iisdem principiis erit

$$= \frac{l}{u}\cdot\mathfrak{B}x\sqrt{\frac{\omega}{f}},$$

ex quibus duobus momentis concluditur circelli in retina depicti radius

$$= \frac{u}{l}\cdot\zeta\omega\cdot\mathfrak{B}x\sqrt{\frac{\omega}{f}},$$

et quia est $\zeta\omega = \zeta - \omega$, erit radius istius circelli

$$= \frac{u}{l}\cdot\mathfrak{B}x(\zeta-\omega)\sqrt{\frac{\omega}{f}};$$

qui ergo ut maximus evadat, spatium ω ita assumi oportet, ut fiat $(\zeta-\omega)\sqrt{\omega} =$ maximo, quod evenit sumendo $\omega = \frac{1}{3}\zeta$; quocirca maximi huius circelli erit radius

$$= \frac{u}{l}\cdot\mathfrak{B}x\cdot\frac{2}{3}\zeta\sqrt{\frac{\zeta}{3f}}.$$

Nunc vero ex altera parte radii ex altero puncto l in oculum incidentes considerentur, qui ante retinam in puncto v colligentur existente spatio $Vv = \frac{uu}{ll}\cdot\zeta l = \frac{uu}{ll}(f-\zeta)$, ibique radiorum obliquitas erit $= \frac{l}{u}\mathfrak{B}x$; unde circelli super retina depicti radius erit $= \frac{u}{l}(f-\zeta)\mathfrak{B}x$, qui consequenter radio prioris circelli inventi aequalis statui debet; ex quo obtinebitur haec aequatio:

$$f-\zeta = \frac{2}{3}\zeta\sqrt{\frac{\zeta}{3f}},$$

ex qua intervallum ζ definiri oportet. Sumtis autem quadratis habebimus

$$f^2 - 2f\zeta + \zeta^2 = \frac{4}{27}\cdot\frac{\zeta^3}{f}$$

sive

$$f^3 - 2f^2\zeta + f\zeta^2 - \frac{4}{27}\zeta^3 = 0,$$

quam perpendenti mox patebit divisibilem esse per $f - \frac{1}{3}\zeta$; divisione autem facta prodit

$$f^2 - \frac{5}{3}f\zeta + \frac{4}{9}\zeta^2 = 0,$$

quae denuo per $f - \frac{1}{3}\zeta$ divisa praebet

$$f - \frac{4}{3}\zeta = 0;$$

quia vero bini priores factores hic locum habere nequeunt, quia absurdum foret esse $\zeta = 3f$, ultimus factor nobis verum praebet intervallum

$$L\zeta = \zeta = \frac{3}{4}f,$$

ita ut sit $l\zeta = \frac{1}{4}f$ et $L\omega = \omega = \frac{1}{4}f$; his valoribus inventis circelli minimi in oculo descripti radius erit $= \frac{u}{4l}f\mathfrak{B}x$, et cum sit $f = Vx^2$, erit iste radius $= \frac{u}{4l}V\mathfrak{B}x^3$. Iam vero si in coelo circulum conspiceremus, cuius radius apparens $= \Phi$, eius imago super retina etiam esset circulus, cuius radius $= u\Phi$; hoc ergo circulo illi aequali posito fit $\Phi = \frac{V\mathfrak{B}x^3}{4l}$ et singula imaginis nostrae puncta ab oculo cernentur tanquam maculae circulares, quarum semidiameter apparens sit $= \frac{V\mathfrak{B}x^3}{4l}$, quam expressionem supra [Lib. I, § 193, 194] nominavimus semidiametrum confusionis.

COROLLARIUM 1

29. In hac solutione assumsimus punctum ω intra λ et l cadere; si enim termino L propius esset quam punctum λ, quoniam imago tantum per spatium Ll est diffusa, istud punctum ω prorsus non in computum venire posset, sed maximus circellus in oculo ex hac parte ab ipso puncto λ oriretur; atque pro hoc casu peculiaris solutio requiretur, quam mox sumus daturi.

COROLLARIUM 2

30. Cum autem sit $L\omega = \frac{1}{3}L\zeta = \frac{1}{4}Ll$, pro termino autem λ sit $L\lambda = \varepsilon\varepsilon \cdot Ll$, punctum ω intra terminos l et λ cadet, quoties fuerit $L\omega > L\lambda$ ideoque quoties fuerit $\varepsilon < \frac{1}{2}$, quamobrem, quia in praxi ε semper assumitur $< \frac{1}{2}$, solutio problematis ad praxin utique est accommodata.

COROLLARIUM 3

31. Quoties igitur fuerit $\varepsilon < \frac{1}{2}$, tum certo affirmare licet ob foramen, quo speculum est pertusum, confusionem nullo modo imminui, sed semper tantam esse, ac si speculum esset integrum totaque sua superficie radios reflecteret, ideoque aequatio generalis supra inventa pro semidiametro confusionis etiam pro speculis valebit, si modo, ut supra iam invenimus, loco formularum ad lentes pertinentium formulae ibi assignatae § 23[1]) substituantur.

COROLLARIUM 4

32. Atque hinc etiam cognoscimus, si telescopium ex meris lentibus constet, confusionem neutiquam diminui, etiamsi lens obiectiva circa medium obtegatur, quemadmodum nonnulli auctores suaserunt, sed optimum remedium confusionem diminuendi certo in hoc constat, ut lens obiectiva circa marginem obtegatur, quippe quo pacto ipsa semidiameter aperturae x diminuitur et confusio adeo in ratione triplicata minor redditur, cum e contrario, si lens circa medium obtegeretur, ne minima quidem confusionis diminutio sit exspectanda, nisi forte pars obtecta semissem totius lentis superet, quo pacto autem claritas nimium diminueretur.

SCHOLION 1

33. Sin autem semidiameter foraminis $y = \varepsilon x$ semissem totius aperturae x superet, ita ut punctum ω inter L et λ cadat, problema nostrum aliam solutionem postulat. Cum enim nunc ex parte $\zeta\lambda$ maximus circellus in oculo ab ipso puncto λ oriatur sitque $L\lambda = \varepsilon\varepsilon f$ ob $Ll = f$ hincque spatium $\zeta\lambda = \zeta - \varepsilon\varepsilon f$, spatiolum post oculum fiet $V\nu = \frac{uu}{ll}(\zeta - \varepsilon\varepsilon f)$ ibique

1) Pag. 119. Vide notam p. 118. E. Ch.

radiorum obliquitas $= \frac{l}{u}\varepsilon \mathfrak{B}x$, circelli hinc super retina formati erit radius $= \frac{u}{l}\varepsilon(\zeta - \varepsilon\varepsilon f)\mathfrak{B}x$. At ex altera parte a termino l nascitur in retina circellus, cuius radius $= \frac{u}{l}(f - \zeta)\mathfrak{B}x$; qui duo radii ob rationes ante allegatas inter se aequales sunt statuendi, ex quo consequimur

$$f - \zeta = \varepsilon\zeta - \varepsilon^3 f$$

hincque

$$\zeta = \frac{f(1+\varepsilon^3)}{1+\varepsilon} = f(1 - \varepsilon + \varepsilon^2);$$

hinc ergo erit

$$f - \zeta = \varepsilon(1-\varepsilon)f$$

sicque semidiameter circellorum in retina erit

$$= \frac{u}{l}\varepsilon(1-\varepsilon)f\mathfrak{B}x = \frac{u}{l}\varepsilon(1-\varepsilon)V\mathfrak{B}x^3.$$

Consequenter hoc casu, quo $\varepsilon > \frac{1}{2}$, semidiameter confusionis erit $= \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{l}V\mathfrak{B}x^3$, quae casu praecedente, quo $\varepsilon < \frac{1}{2}$, erat $= \frac{V\mathfrak{B}}{4l}\cdot x^3$; quamdiu ergo est $\varepsilon < \frac{1}{2}$, semper valet formula $\frac{V\mathfrak{B}}{4l}\cdot x^3$, quae etiamnum locum habet, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$; verum statim ac fit $\varepsilon > \frac{1}{2}$, tum demum confusio diminui incipit atque tandem prorsus evanescit, si fiat $\varepsilon = 1$. Quia autem claritas quoque diminuitur et tandem evanescit, hinc nullum plane lucrum in praxin redundare potest; siquis enim adhuc dubitet, utrum loco lentis solidae, cuius radius sit p, non adhiberi possit limbus vitreus paris superficiei, cuius radius exterior sit $= q$ et interior $= \varepsilon q$, ita ut sit $p^2 = q^2(1-\varepsilon\varepsilon)$ atque confusio istius limbi minor evadat, hoc dubium nunc facile erit resolvere; a lente enim solida nascetur confusio ut $\frac{1}{4}p^3$, ex limbo autem ut $\varepsilon(1-\varepsilon)q^3$; unde ob $p = q\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}$ erit confusio ex lente solida nata ad confusionem ex limbo oriundam uti $(1+\varepsilon)\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)} : 4\varepsilon$; quare, cum sit per hypothesin $\varepsilon > \frac{1}{2}$ (quia altero casu $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ne dubium quidem exsistere potest), posterius membrum 4ε manifesto erit maius quam 2; at quia simul $\varepsilon < 1$, erit $1 + \varepsilon < 2$ ideoque multo magis $(1+\varepsilon)\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)} < 2$, ex quo perspicuum est prius membrum semper esse multo minus posteriore sive confusionem limbi multum excedere confusionem lentis solidae.

SCHOLION 2

34. Cum autem pro usu practico tuto sumere queamus $\varepsilon < \frac{1}{2}$, quo casu speculum obiectivum perforatum aeque magnam gignit confusionem, ac si esset integrum, si in formula generali supra pro telescopiis exhibita, qua semidiameter confusionis exprimitur, loco duarum priorum lentium nostra specula introducamus, aequatio hinc nata sequenti modo se habebit:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{mx^3}{p^3}\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{8} - \frac{(1+B)(1-B)^2}{8B^3P} \\ + \frac{\mu}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \frac{\mu}{B^3C^3PQR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3} + \frac{\nu}{D\mathfrak{D}}\right) + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

ubi notari convenit, si forte lentes post specula adhibitae ex vario vitro conficiantur, tum pro qualibet lente litteras μ et ν ex eo vitri genere sumi debere, ex quo lens fuerit facta.

Reliqua autem praecepta generalia pro constructione telescopiorum nullam mutationem ob specula requirent, exceptis iis tantum formulis, quibus tam margo coloratus tollitur, quam omnis confusio a diversa radiorum refrangibilitate oriunda ad nihilum redigitur. Cum enim in has formulas induxerimus pro singulis lentibus litteras N, N', N'', N''' etc., quae litterae proportionales sunt sumtae formulis differentialibus $\frac{dn}{n-1}$, $\frac{dn'}{n'-1}$ etc., si loco duarum priorum lentium specula substituantur, ob defectum refractionis istae binae litterae priores N et N' nihilo aequales sunt censendae; quo observato omnibus illis formulis generalibus pro speculis perinde uti poterimus, atque in secundo libro est factum, dummodo, quae circa distantias focales speculorum et circa duo intervalla priora in capite praecedente sunt allata, probe observentur.

SCHOLION 3

35. Telescopia autem catadioptrica huius generis sponte ad duo genera principalia revocantur, siquidem supra vidimus secundum speculum vel ultra focum primi constitui posse vel intra eum, atque priori casu secundum speculum fore concavum, altero vero convexum. Deinde cum pro priori casu hos limites pro secundi speculi distantia focali q invenerimus

$$q < \varepsilon p \quad \text{et} \quad q > \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p}{1+3\varepsilon}$$

existente primo intervallo $=(1+\varepsilon)p$, cui secundum debet esse aequale, tum vero

$$b=\varepsilon p \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{b}=\frac{q}{b-q}=B,$$

quo hoc prius genus debite evolvamus, tres casus constitui conveniet: primo scilicet sumamus $q=\varepsilon p$, secundo $q=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p}{1+2\varepsilon}$ et tertio $q=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)p}{1+3\varepsilon}$. Pro altero vero genere secundum speculum intra focum prioris collocabatur, ita ut esset

$$b=-\varepsilon p \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{b}=\frac{q}{b-q}=\frac{-q}{\varepsilon p+q}=B,$$

ibique cum distantia focalis q hoc casu evadat negativa, posito $q=-\mathfrak{q}$ hos ibidem dedimus limites:

$$\mathfrak{q}>\varepsilon p \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}<\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-3\varepsilon},$$

unde iterum tres casus evolvamus: primo scilicet sumamus $q=-\varepsilon p$, secundo $q=\frac{-\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-2\varepsilon}$, tertio $q=\frac{-\varepsilon(1-\varepsilon)p}{1-3\varepsilon}$; hoc autem casu erit intervallum primum $=(1-\varepsilon)p$, cui etiam secundum aequale esse debet.

Ceterum in priori genere erat $\frac{1}{P}=-\varepsilon$, ita ut in primo statim intervallo reperiatur imago realis; in altero vero genere erat $\frac{1}{P}=\varepsilon$, ita ut in primo intervallo nulla occurrat imago realis; praeterea vero, uti iam monuimus, sumimus hic semper $\varepsilon<\frac{1}{3}$, unde postremus adhuc casus considerari merebitur, quo scilicet sit $\varepsilon=\frac{1}{3}$, quoniam tum secundum speculum planum accipere licebit; quocirca secundum hos septem casus haec telescopia catadioptrica sumus pertractaturi.

CAPUT III

DE TELESCOPIIS CATADIOPTRICIS MINORE SPECULO CONCAVO INSTRUCTIS

PROBLEMA 1

36. *Si ante speculum principale PP (Fig. 8) foramine $\pi\pi$ pertusum ad distantiam $AB = (1+\varepsilon)p$ constituatur minus speculum concavum QBQ, cuius distantia focalis $q = \varepsilon p$, definire binas lentes C et D, ita ut quaevis obiecta distincte repraesententur.*

SOLUTIO

Hic denotat p distantiam focalem maioris speculi, cuius semidiameter $AP = x$ eiusque foraminis $A\pi = y = \varepsilon x$, ita ut radius curvaturae huius

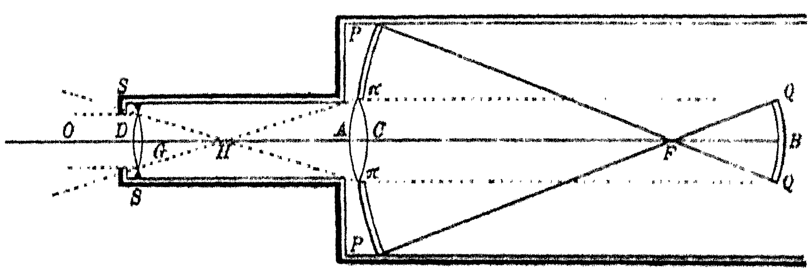

Fig. 8.

speculi $= 2p$. Obiectorum igitur imago principalis ab hoc speculo repraesentabitur in F, ut sit $AF = \alpha = p$, cuius ergo distantia a minore speculo debet esse, uti ante est ostensum, $FB = \varepsilon p$, et semidiameter huius speculi $BQ = y = \varepsilon x$. Cum igitur distantia focalis huius speculi sit $= q = \varepsilon p = FB$, radii hinc reflexi inter se fient paralleli, donec in lentem C incidant; pro

formulis ergo nostris generalibus erit $\frac{1}{P} = -\varepsilon$ et $FB = b = \varepsilon p$, unde utique ob $P = -\frac{\alpha}{b}$ fit $P = -\frac{1}{\varepsilon}$. Deinde, cum fiat $\beta = \frac{bq}{b-q} = \infty$ hincque $B = \frac{\beta}{b} = \infty$, iam quia intervallum secundum in genere est

$$= -\frac{ABa}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right) = -\frac{Bp}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right)$$

hocque primo intervallo aequale est ponendum, fiet $Q = 1$, sed ita tamen, ut sit $B\left(1 - \frac{1}{Q}\right) = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$; per formulas autem generales hoc secundum intervallum $= \beta + c = (1+\varepsilon)p$; unde ob $\beta = \infty$ fit

$$c = (1+\varepsilon)p - \beta = -\infty \quad \text{ideoque} \quad C = \frac{\gamma}{c} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Quare posita lentis in foramine constitutae distantia focali $= r$ erit

$$r = \frac{B\mathfrak{C}}{PQ}p = -\varepsilon B\mathfrak{C}p;$$

unde, cum sit $B = \infty$ et $\mathfrak{C} = 0$, vicissim colligitur

$$B\mathfrak{C} = BC = \frac{-r}{\varepsilon p}$$

atque hinc pro quarta lente SDS habebimus distantiam focalem $s = -\frac{r}{R}$ et intervallum $CD = r\left(1 - \frac{1}{R}\right)$. Ut ergo postrema lens fiat convexa, littera R debet esse negativa sive in intervallum CD incidit imago realis in puncto H atque ex data multiplicatione m formulae generales praebent $PQR = m$, quoniam ob binas imagines reales repraesentatio erit erecta. Hinc ergo fiet $R = \frac{m}{PQ} = -\varepsilon m$, ita ut nunc sit $s = \frac{r}{\varepsilon m}$ et intervallum $CD = r\left(1 + \frac{1}{\varepsilon m}\right) = r + s$; quandoquidem hic fit ex natura rei $CH = r$ et $HD = s$.

Contemplemur nunc campum apparentem et secundum formulas nostras generales secundo speculo tribuamus litteram $\mathfrak{q}$, lenti C litteram $\mathfrak{r}$ et lenti D litteram $\mathfrak{s}$ et semidiameter campi apparentis erit

$$\Phi = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s}}{m-1}\xi$$

sumto ξ pro fractione $\frac{1}{4}$; litterae autem $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ ad summum unitati aequales fieri possunt. Posuimus vero [Lib. II, § 265] brevitatis gratia

$$\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{m-1}=M,$$

ut sit

$$\Phi=M\xi,$$

atque formulae nostrae generales has suppeditant aequationes:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q}=(P-1)M, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}=(PQ-1)M-\mathfrak{q},$$

quae ob valores iam inventos

$$\mathfrak{B}=1, \quad Q=1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}=0$$

praebent ambae

$$\mathfrak{q}=(P-1)M=-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)M.$$

Hinc autem invenimus distantiam oculi post lentem D, scilicet

$$DO=O=\frac{\mathfrak{s}s}{Mm};$$

quae distantia cum sit positiva, quandoquidem nihil impedit, quominus ipsi $\mathfrak{s}$ valor positivus detur isque unitati aequalis, marginem coloratum tollemus, si ob $N'=0$ et $N''=N'''$ (quandoquidem nostrae duae lentes ex eodem vitro parantur) huic aequationi satisfaciamus:

$$0=\frac{\mathfrak{r}}{PQ}+\frac{\mathfrak{s}}{PQR},$$

quae ergo reducitur ad hanc:

$$0=\mathfrak{r}-\frac{\mathfrak{s}}{\varepsilon m},$$

unde colligitur

$$\mathfrak{r}=\frac{\mathfrak{s}}{\varepsilon m};$$

quare, cum sit $\mathfrak{q}=-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)M$, erit

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}=-\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)M+\frac{\mathfrak{s}}{\varepsilon m}+\mathfrak{s}=M(m-1),$$

unde sequitur

$$M = \frac{\mathfrak{z}}{m},$$

ita ut iam sit semidiameter campi apparentis

$$\Phi = \frac{\mathfrak{z}}{m} \cdot \xi.$$

Num autem hic pro $\mathfrak{z}$ unitas scribi queat, intelligemus ex lente C, cuius apertura nobis est praescripta et cuius semidiameter $= y = \varepsilon x$. Iam per formulas nostras haec semidiameter esse debet

$$\chi r \xi + \frac{x}{PQ} = \frac{\mathfrak{z} r}{\varepsilon m} \cdot \xi + \varepsilon x,$$

ubi sufficit maiori membro uti, ex quo sequitur esse debere $\frac{\mathfrak{z} r}{\varepsilon m} \cdot \xi < \varepsilon x$, unde, si statuamus $\mathfrak{z} = 1$ et $\xi = \frac{1}{4}$, necesse est, ut sit $r < 4\varepsilon^2 m x$; si igitur velimus sumere $r > 4\varepsilon^2 m x$, tum $\mathfrak{z}$ unitate minus accipi debet, ex quo campus apparens in eadem ratione diminuetur. Hic autem inprimis quoque ad ultimam lentem attendi oportet, pro qua est $s = \frac{r}{\varepsilon m}$, ita ut esse debeat $s < 4\varepsilon x$ sive $s < 4y$, unde patet foramen non nimis exiguum statui posse.

Totam autem confusionem ex diversa radiorum refrangibilitate oriundam tolleremus ope huius aequationis:

$$0 = \frac{N''}{P^2 Q^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{N'''}{P^2 Q^2 R^2} \cdot \frac{1}{s},$$

quae abit in hanc:

$$0 = N'' + \frac{N'''}{\varepsilon m};$$

quod cum nullo modo fieri possit, etiamsi diverso vitro uti vellemus, hanc confusionem, quae semper est valde exigua, tolerari oportet.

His observatis cardo rei versabitur in semidiametro confusionis, quam insensibilem reddi convenit ope huius aequationis:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{m x^3}{p^3}\left(\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\mu \varepsilon^4 p^3}{r^3} \lambda'' + \frac{\mu \varepsilon^3 p^3}{r^3 m} \lambda'''\right),$$

quae aequatio abit in hanc formam:

$$p\sqrt[3]{\left(\frac{1}{k^3mx^3}-\frac{\mu\varepsilon^4\lambda''}{r^3}-\frac{\mu\varepsilon^3\lambda'''}{mr^3}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\varepsilon)},$$

ex qua aequatione reperitur p; verum quantitatem x tantam assumi convenit, ut inde sufficiens claritatis gradus obtineatur. In doctrina de telescopiis autem pro sufficiente claritatis gradu sumsimus $x=\frac{m}{50}$ dig.; quod autem ibi erat x seu $\sqrt{x^2}$, hic nobis est $\sqrt{(1-\varepsilon^2)x^2}$, ita ut hic habeamus

$$x\sqrt{(1-\varepsilon^2)}=\frac{m}{50}\text{ dig.},$$

siquidem eodem claritatis gradu frui velimus; unde foret $x=\frac{m}{50\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}$ dig. ideoque $x>\frac{m}{50}$ dig. Quia vero specula non tantum radiorum reflectunt, quantum lentes transmittunt, ne hoc quidem modo tantum claritatis gradum adipiscemur quam in telescopiis vulgaribus. Sin autem minori claritatis gradu contenti esse velimus atque statuamus $x=\frac{m}{50}$ dig. sumamusque ut ibi $k=50$, aequatio nostra erit

$$p\sqrt[3]{\left(\frac{1}{m^4}-\frac{\mu\varepsilon^4\lambda''}{r^3}-\frac{\mu\varepsilon^3\lambda'''}{mr^3}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+\varepsilon)},$$

ubi manifesto debet esse $\frac{\varepsilon^4}{r^3}$ multo minus quam prius membrum $\frac{1}{m^4}$ sive $r^3>\varepsilon^4m^4$ ideoque r multo maius quam $\varepsilon m\sqrt[3]{\varepsilon m}$; supra vero vidimus esse debere $r<4\varepsilon^2mx$; quod ut fieri possit, debet esse $4\varepsilon^2mx$ multo maius quam $\varepsilon m\sqrt[3]{\varepsilon m}$ sive $4\varepsilon m>50\sqrt[3]{\varepsilon m}$ ideoque $\varepsilon>\frac{44}{m}$, quod in magnis multiplicationibus effici posset.

At si haec conditio non observetur, effectus in eo consistet, ut non amplius sit $\mathfrak{z}=1$ hincque campus apparens multo minor existat quam

$$\Phi=\frac{\xi}{m}\quad\text{sive}\quad\Phi=\frac{859}{m}\text{ min.}$$

COROLLARIUM 1

37. Cum in telescopiis id semper inprimis sit efficiendum, ut eorum longitudo hincque praecipue distantia focalis p quam minima reddatur, in

aequatione ultima confusio a lentibus oriunda tantopere diminui debet, ut prae confusione speculorum quasi evanescat; quare, cum in ista formula ex primo speculo nascatur portio $\frac{1}{8}$, ex secundo vero $\frac{\varepsilon}{8}$, necesse est, ut portiones sequentes ex lentibus oriundae multo fiant minores, ex quo littera r multo maior esse debet quam $2\varepsilon p$ ideoque r vix minus capi poterit quam p.

COROLLARIUM 2

38. Quodsi igitur statuamus $r = p$, cum ε, uti vidimus, minus esse soleat quam $\frac{1}{3}$, pro confusione definienda tuto uti licebit hac aequatione:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{mx^3(1+\varepsilon)}{8p^3},$$

unde colligimus

$$p = \frac{kx}{2}\sqrt[3]{m(1+\varepsilon)};$$

unde, si pro dato claritatis et distinctionis gradu capiatur $kx = m$ dig., erit

$$p = \frac{1}{2}m\sqrt[3]{m(1+\varepsilon)},$$

quae quantitas circiter duplo minor est quam in telescopiis dioptricis communibus, ita ut hoc modo tota longitudo fere ad partem quartam reducatur.

COROLLARIUM 3

39. Sumto autem $r = p$ pro campo definiendo littera $\mathfrak{z}$ maior accipi nequit, quam ut fiat

$$\frac{\mathfrak{z}p}{4\varepsilon m} = \varepsilon x;$$

hinc ergo pro exemplo speciali, quo $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et $m = 100$, colligetur

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{5}\,^{1)},$$

ex quo patet hoc casu fore campum quinquies minorem, quam si capere liceret $\mathfrak{z} = 1$, sicque in genere patet hoc modo nimis exiguum campum obtineri.

1) Editio princeps: $\mathfrak{z} = \frac{\sqrt[4]{10000}}{100} = \frac{1}{5}$ circiter. Correxit E. Ch.

COROLLARIUM 4

40. Sumto autem $r=p$ pro constructione huiusmodi telescopii distantiae focales sequenti modo se habebunt:

$$p=\frac{1}{2}m\sqrt[3]{m}(1+\varepsilon),\quad q=\varepsilon p,\quad r=p \text{ et } s=\frac{p}{\varepsilon m};$$

tum vero intervalla lentium seu speculorum

$$AB=(1+\varepsilon)p=BC,\quad CD=r+s=p\left(1+\frac{1}{\varepsilon m}\right)$$

et distantia oculi

$$O=s=\frac{p}{\varepsilon m},$$

unde patet tubum arcae, in qua specula continentur, adiungendum admodum fore longum.

SCHOLION

41. Praeter incommoda vero, quae hic iam commemoravimus, huiusmodi telescopia maximo vitio laborarent, propterea quod radii in lentem C incidentes inter se sunt paralleli; tum enim radii peregrini, qui ab obiectis vicinis directe in eandem lentem incidunt, quia etiam sunt paralleli inter se, in transitu per lentes simili modo refringentur ac radii proprii ideoque cum iis simul ad oculum deferentur, et quoniam hi radii peregrini multo sunt fortiores quam proprii, siquidem hi duplicem reflexionem iam sunt passi, in oculo impressionem istorum penitus extinguent. Interim tamen, quia radii peregrini ad axem magis sunt obliqui atque etiam in refractione maiorem obliquitatem conservant, ab egressu in oculum excludi possent ope exigui foraminuli, cui oculus adplicatur; hoc autem modo non solum claritas nimium detrimentum pateretur, sed etiam campus insuper restringeretur; quam ob causam in huiusmodi telescopiis inprimis cavendum est, ne radii peregrini, qui circa minus speculum praeterlabentes ab introitu in C arceri nullo modo possunt, cum radiis propriis similem refractionem patiantur. Quod praestari poterit, si modo radii proprii in lentem C incidentes fuerint vel divergentes vel convergentes, ut post refractionem in alio foco congregentur ac peregrini; tum enim diaphragma debito foramine in isto foco constitutum facile radios peregrinos ab ulteriori progressu ad oculum excludet. Perspicuum autem est,

quo hoc remedium certius succedat, illam sive convergentiam sive divergentiam satis notabilem esse debere, sive efficiendum est, ut per refractionem huius lentis C imago a radiis peregrinis formata multum distet ab imagine a radiis propriis formata, id quod in sequentibus casibus usu veniet.

PROBLEMA 2

42. *Si ante speculum principale PP* (Fig. 8, p. 132) *foramine $\pi\pi$ pertusum ad distantiam $AB=(1+\varepsilon)p$ constituatur minus speculum concavum QBQ, cuius distantia focalis $q=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}\cdot p$, definire binas lentes C et D, ita ut quaevis obiecta distincte repraesententur.*

SOLUTIO

Hic ergo ut ante est distantia $AF=\alpha=p$ et $FB=b=\varepsilon p$ hincque $\frac{1}{P}=-\varepsilon$ ob $AB=(1+\varepsilon)p$. Quia vero hic est $q=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}\cdot p$, fiet

$$\frac{\beta}{b}=\frac{q}{b-q}=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}=B,$$

ita ut iam sit $\beta=(1+\varepsilon)p$, quae distantia ipsi secundo intervallo BC est aequalis, sicque secunda imago in ipsam lentem C incidet, unde fiet $c=0$; unde, cum posuerimus $\frac{\beta}{c}=-Q$, fiet hic

$$Q=-\infty;$$

tum vero pro tertia imagine erit

$$\gamma=\frac{cr}{c-r}=0,$$

ita ut sit

$$C=-1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}=\infty.$$

Quare, cum sit

$$r=\frac{B\mathfrak{C}}{PQ}\cdot p=-\frac{(1+\varepsilon)\mathfrak{C}}{Q}\cdot p,$$

vicissim adparet fore

$$\frac{\mathfrak{C}}{Q}=-\frac{r}{(1+\varepsilon)p}.$$

His inventis distantiae focales erunt

$$p = p, \quad q = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon}\cdot p, \quad r = r \quad \text{et} \quad s = \frac{B}{PQR}\cdot p = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon m}\cdot p \quad \text{ob} \quad PQR = m.$$

Intervalla vero ita erunt expressa:

$$AB = (1+\varepsilon)p = BC, \quad CD = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon m}\cdot p = s,$$

uti rei natura postulat, quandoquidem ultima imago in ipsa lente C manet constituta. Ceterum patet hic duas occurrere imagines reales, alteram in F, alteram in C, ideoque imagines situ erecto repraesentari et recte nos assumsisse $PQR = m$.

Pro campo diiudicando erit

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s}}{m-1},$$

unde fit $\Phi = M\xi$; tum vero esse debet

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P-1)M,$$

hinc

$$\mathfrak{q} = -\frac{(1+2\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M$$

et

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = (PQ-1)M - \mathfrak{q},$$

hinc

$$\mathfrak{r} = \left(\frac{PQ}{\mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{C}}\right)M - \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{C}}.$$

Quia vero

$$\mathfrak{C} = \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathfrak{C}}{Q} = \frac{-r}{(1+\varepsilon)p};$$

erit

$$\mathfrak{r} = \frac{PQM}{\mathfrak{C}} = \frac{(1+\varepsilon)p}{\varepsilon r}\cdot M;$$

hinc ergo fit

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} = \left(\frac{(1+\varepsilon)p}{\varepsilon r} - \frac{(1+2\varepsilon)}{\varepsilon}\right)M + \mathfrak{s} = (m-1)M,$$

unde reperitur

$$M = \frac{\varepsilon r\mathfrak{s}}{m\varepsilon r - (1+\varepsilon)(p-r)};$$

circa $\mathfrak{s}$ autem nihil adhuc definitur, sed cum lentis C semidiameter aperturae

revera sit $= \varepsilon x$, per formulas autem nostras esse debeat

$$= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r = \frac{(1+\varepsilon)pM}{4\varepsilon},$$

sive ipso campo introducto haec semidiameter erit $= \frac{(1+\varepsilon)p\Phi}{\varepsilon}$, quae cum excedere nequeat εx, hoc non est verendum, nisi esset $\Phi = \frac{\varepsilon^2 x}{(1+\varepsilon)p}$ vel maius.

Iam ut margo coloratus evanescat, debet esse

$$0 = \frac{\mathfrak{r}}{PQ} + \frac{\mathfrak{s}}{PQR};$$

ideoque esse deberet

$$\frac{\mathfrak{s}}{m} = 0;$$

unde patet hoc modo marginem coloratum evitari non posse, sed tamen eum fore minimum et vix sensibilem ob denominatores PQ et PQR maximos.

Sumta porro littera $\mathfrak{s}$, uti circumstantiae permittunt, pro loco oculi habebimus

$$O = \frac{\mathfrak{s}s}{Mm}.$$

Denique conditio confusionis tollendae praebet hanc aequationem:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{mx^3}{p^3}\left(\frac{1}{8} + \frac{(1+2\varepsilon)\varepsilon}{8(1+\varepsilon)^3}\right)$$

sequentibus partibus sponte evanescentibus, ita ut statui possit

$$p = \frac{1}{2}\, m\sqrt[3]{m}\left(\frac{(1+\varepsilon)^3 + \varepsilon(1+2\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^3}\right) \text{ dig.}$$

COROLLARIUM 1

43. Cum lentis in C positae semidiameter aperturae esse debeat $= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r$, ea vero revera sit $= \varepsilon x$, hinc colligitur $\mathfrak{r} = \frac{4\varepsilon x}{r}$. Verum ante invenimus $\mathfrak{r} = \frac{(1+\varepsilon)p}{r\varepsilon}\cdot M$; his ergo duobus valoribus aequatis prodit

$$4\varepsilon^2 x = (1+\varepsilon)pM,$$

unde, si esset $\mathfrak{r}=1$, foret $r=4\varepsilon x$, tum vero $r=\frac{M(1+\varepsilon)p}{\varepsilon}$; quia vero est

$$M=\frac{\varepsilon r\mathfrak{s}}{m\varepsilon r-(1+\varepsilon)(p-r)},$$

habebimus nunc substituto pro r illo valore

$$M=\frac{4\varepsilon^2\mathfrak{s}x}{4m\varepsilon^2x-(1+\varepsilon)(p-4\varepsilon x)},$$

qui valor in illa aequatione substitutus dabit

$$\mathfrak{s}=\frac{4m\varepsilon^2x-(1+\varepsilon)(p-4\varepsilon x)}{(1+\varepsilon)p}.$$

COROLLARIUM 2

44. Quia autem $\mathfrak{s}$ unitate maius esse nequit, hoc valore unitati aequali posito prodibit

$$4m\varepsilon^2x=2(1+\varepsilon)p-4\varepsilon(1+\varepsilon)x$$

hincque

$$m=\frac{(1+\varepsilon)p-2\varepsilon(1+\varepsilon)x}{2\varepsilon^2x},$$

quae aequatio subsistere nequit, nisi multiplicatio m aliquot millia excedat, quod in praxi nunquam locum habere potest.

SCHOLION

45. Huiusmodi vero telescopia duplici laborant defectu; primo enim, quia lens C in ipso imaginis loco constituitur, nisi lens ex purissimo vitro sit confecta, repraesentatio vehementer erit inquinata, uti iam saepius observavimus; deinde etiam haud exiguum vitium in eo consistit, quod marginem coloratum non licuit ad nihilum reducere; quam ob causam haec telescopia superfluum foret uberius prosequi, sed potius eiusmodi casum evolvamus, in quo secunda imago post lentem C cadat simulque margo coloratus feliciter tolli queat. Quare, cum pro hoc praestando habeatur aequatio

$$0=\frac{\mathfrak{r}}{PQ}+\frac{\mathfrak{s}}{PQR},$$

necesse est, ut fieri queat $\mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{s}}{R} = 0$, quod commodissime fieri poterit, si fuerit $R = -1$; quia enim tum erit $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$, maximum campum adipisci poterimus, si sumere liceat $\mathfrak{r} = \mathfrak{s} = 1$; tum enim fiet

$$M = \frac{\mathfrak{q} + 2}{m - 1},$$

et quamvis $\mathfrak{q}$ sit fractio negativa, tamen campus hinc orietur satis magnus; ut vero fiat R numerus negativus, secunda imago in intervallum CD cadere debet, ita ut Q maneat quantitas positiva, et quia multiplicatio dat $m = PQR$, ob $P = -\frac{1}{\varepsilon}$, si sumamus $R = -1$, necesse est fiat $Q = \varepsilon m$; unde, cum sit $Q = -\frac{\beta}{c}$, erit

$$c = -\frac{\beta}{\varepsilon m};$$

at vero secundum intervallum $BC = \beta + c$; quod cum primo $(1 + \varepsilon)p$ aequale esse debeat, elicimus

$$\beta = (1 + \varepsilon)p - c = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)mp}{\varepsilon m - 1}.$$

Cum vero sit

$$\beta = \frac{bq}{b - q} \quad \text{et} \quad b = \varepsilon p$$

sive etiam

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta},$$

hinc erit

$$\frac{1}{q} = \frac{1 + 2\varepsilon}{\varepsilon(1 + \varepsilon)p} - \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon)mp};$$

tum vero erit

$$B = \frac{\beta}{b} = \frac{(1 + \varepsilon)m}{\varepsilon m - 1} \quad \text{hincque} \quad \mathfrak{B} = \frac{(1 + \varepsilon)m}{(1 + 2\varepsilon)m - 1},$$

unde fit $q = \mathfrak{B}b$.

Porro vero, cum sit $r = \mathfrak{C}c$, erit

$$\mathfrak{C} = \frac{r}{c} = \frac{-(\varepsilon m - 1)r}{(1 + \varepsilon)p} \quad \text{hincque} \quad C = \frac{-(\varepsilon m - 1)r}{(1 + \varepsilon)p + (\varepsilon m - 1)r}.$$

Pro intervallo autem CD, quod est $\gamma + d = \gamma + s$, quia est

$$\gamma = \frac{cr}{c - r} = \frac{(1 + \varepsilon)pr}{(1 + \varepsilon)p + (\varepsilon m - 1)r},$$

quia vero etiam esse debet $R = -\frac{\gamma}{d} = -1$, hinc erit $s = \gamma$ sicque inter-

vallum $CD = 2\gamma = 2s \left[= \frac{2(1+\varepsilon)pr}{(1+\varepsilon)p+(\varepsilon m-1)r}\right]$.

Quia autem porro est $M = \frac{\mathfrak{q}+2}{m-1}$, sumto scilicet $\mathfrak{r} = \mathfrak{s} = 1$, erit

$$\mathfrak{q} = \frac{-((1+2\varepsilon)m-1)}{\varepsilon m}\cdot M$$

hincque

$$\mathfrak{q}+2 = \frac{-((1+2\varepsilon)m-1)M+2\varepsilon m}{\varepsilon m} = M(m-1);$$

unde sequitur

$$M = \frac{2\varepsilon m}{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1},$$

ex quo vicissim concludimus

$$\mathfrak{q} = \frac{-2((1+2\varepsilon)m-1)}{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1}.$$

Praeterea vero adhuc habetur haec aequatio $\mathfrak{E} = (PQ-1)M-\mathfrak{q}$, quae abit in hanc:

$$\mathfrak{E} = -(m+1)M-\mathfrak{q}$$

seu substitutis valoribus

$$\frac{-(\varepsilon m-1)r}{(1+\varepsilon)p} = \frac{-2\varepsilon m(m+1)+2(1+2\varepsilon)m-2}{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1} = \frac{-2\varepsilon m^2+2(1+\varepsilon)m-2}{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1},$$

unde concludimus fore

$$r = \frac{2(\varepsilon m^2-(1+\varepsilon)m+1)(1+\varepsilon)p}{(\varepsilon m-1)(\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1)} = \frac{2(m-1)(1+\varepsilon)}{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1}\cdot p;$$

hinc, cum sit $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r}-\frac{1}{a}$, reperitur

$$\gamma = \frac{2(m-1)(1+\varepsilon)}{3\varepsilon m^2-(1+\varepsilon)m+1}\cdot p = s,$$

unde porro concluditur distantia oculi

$$O = \frac{\mathfrak{s}s}{Mm} = \frac{\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1}{2\varepsilon m^2}\cdot s = \frac{1}{2}s\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon m}-\frac{1}{\varepsilon m^2}\right) = \frac{1}{2}s \text{ proxime.}$$

Quod autem ad campum apparentem attinet, quoniam sumsimus $\mathfrak{r} = \mathfrak{s} = 1$, dispiciendum est, num etiam ponere liceat $\xi = \frac{1}{4}$. Hoc autem patebit ex lente C, cuius semidiameter aperturae $= \xi r$ excedere nequit εx; posito igitur $\xi r = \varepsilon x$ colligitur

$$\xi = \frac{\varepsilon x(\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1)}{2(m-1)(1+\varepsilon)p},$$

qui valor si fuerit minor quam $\frac{1}{4}$, eo erit utendum, ita ut tum sit $\Phi = M\xi$; sin autem ille valor prodeat maior quam $\frac{1}{4}$, nihilominus sumi debet $\xi = \frac{1}{4}$. Si tanquam exemplum sumatur

$$\varepsilon = \frac{1}{4}, \quad m = 100, \quad x = \frac{5}{2} \text{ dig.} \quad \text{et} \quad p = 25 \text{ dig.},$$

revera prodit $\xi = \frac{1}{4}$, ita ut haec positio $\xi = \frac{1}{4}$ parum a praxi discrepare videatur; unde operae pretium erit has determinationes coniunctim ob oculos ponere.

EXEMPLUM TELESCOPII CATADIOPTRICI

46. Ex modo allatis prima elementa huius telescopii ita se habebunt:

$$a = \infty, \quad b = \varepsilon p, \quad c = \frac{-(1+\varepsilon)}{\varepsilon m - 1} p, \quad d = \gamma,$$

$$\alpha = p, \quad \beta = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)mp}{\varepsilon m - 1}, \quad \gamma = \frac{2(m-1)(1+\varepsilon)p}{3\varepsilon m^2 - (1+\varepsilon)m + 1}, \quad \delta = \infty.$$

Ex quibus deducuntur sequentes valores:

$$B = \frac{(1+\varepsilon)m}{\varepsilon m - 1}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{(1+\varepsilon)m}{(1+2\varepsilon)m - 1},$$

$$C = \frac{-2(m-1)(\varepsilon m - 1)}{3\varepsilon m^2 - (1+\varepsilon)m + 1}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{-2(m-1)(\varepsilon m - 1)}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1},$$

$$P = -\frac{\alpha}{b} = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad Q = -\frac{\beta}{c} = \varepsilon m, \quad R = -\frac{\gamma}{d} = -1.$$

Ex his vero colliguntur distantiae focales

$$p = p, \quad q = \mathfrak{B} b = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)m}{(1+2\varepsilon)m - 1} \cdot p,$$

$$r = \mathfrak{C} c = \frac{2(m-1)(1+\varepsilon)}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1} \cdot p \quad \text{et} \quad s = d = \gamma$$

et pro earum aperturis

$$\mathfrak{q} = \frac{-2((1+2\varepsilon)m - 1)}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1}, \quad \mathfrak{r} = 1, \quad \mathfrak{s} = 1$$

hincque

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} = \frac{2\varepsilon m(m-1)}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1}$$

ideoque

$$M = \frac{2\varepsilon m}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1},$$

ex quo elicitur semidiameter campi apparentis $\Phi = M\xi$, ac si liceat sumere $\xi = \frac{1}{4}$, fiet

$$\Phi = \frac{1718\,\varepsilon m}{\varepsilon m^2 + (1+\varepsilon)m - 1} \text{ minut.};$$

at pro loco oculi invenimus

$$O = \frac{1}{2} s \left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon m} - \frac{1}{\varepsilon m^2}\right).$$

Superest igitur, ut ex conditione confusionis definiatur distantia focalis p, quae reperitur

$$p = kx\sqrt[3]{m}\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{8} + \frac{\varepsilon(m+1)^2((1+2\varepsilon)m-1)}{8(1+\varepsilon)^3m^3} \\ &+ \frac{\mu(\varepsilon m^2+(1+\varepsilon)m-1)^3}{8m^4(m-1)^3(1+\varepsilon)^3}\left(\lambda'' + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})\right) + \frac{\mu(3\varepsilon m^2-(1+\varepsilon)m+1)^3\lambda'''}{8m^4(m-1)^3(1+\varepsilon)^3}\end{aligned}\right\}$$

ubi si tantam claritatem desideremus, qualem supra telescopiis tribuimus, sumi debet $x = \frac{m}{50}$ dig. et pro gradu distinctionis $k = 50$, ut sit $kx = m$.

Sin autem minori claritatis gradu contenti esse velimus, fortasse sufficiet ponere $x = \frac{m}{100}$ dig. vel adeo $x = \frac{m}{200}$ dig.

CONSTRUCTIO HUIUSMODI TELESCOPII PRO MULTIPLICATIONE $m = 100$ SUMTO $\varepsilon = \frac{1}{4}$

47. Pro maiori ergo speculo, cuius semidiameter sit $= x$, foraminis semidiameter erit $= \frac{1}{4}x$, eius vero distantia focalis in genere ponatur $= p$; ex qua sequentes distantiae focales ita definientur:

$$q = \frac{125}{596}p = 0{,}2097\,p,$$

$$r = \frac{5\cdot 99}{5248}p = 0{,}0943\,p,$$

$$s = \frac{5\cdot 99}{14752}p = 0{,}03355\,p.$$

Intervalla autem sequenti modo definientur:

$$1.\quad AB = \frac{5}{4}p = 1{,}25\,p,$$

$$2.\quad BC = \frac{5}{4}p = 1{,}25\,p,$$

$$3.\quad CD = 2s = 0{,}0671\,p,$$

$$4.\quad O = 0{,}5248\,s = [0{,}0176\,p].$$

Praeterea uti speculi maioris semidiameter aperturae est $= x$, ita minoris erit $= \frac{1}{4}\cdot x$, cui etiam aequatur apertura lentis C; lentis vero ocularis D semidiameter aperturae poterit sumi $= \frac{1}{4}s$, unde campi apparentis semidiameter erit circiter $\Phi = 16{,}368$ minut., qui campus locum habet, nisi sit $\frac{1}{4}x < \frac{1}{4}r$ seu $x < r$; hoc enim si evenerit, ut sit $x < r$, tum campus in eadem ratione diminuetur atque in eadem ratione aperturam lentis D diminui conveniet.

At vero pro definienda distantia focali p habetur ista aequatio:

$$p = \frac{1}{2}\,kx\sqrt[3]{(100 + 19{,}45 + 0{,}0095\,\mu(\lambda'' - 5\nu) + 0{,}211\,\mu\lambda''')},$$

ubi, cum partes ex binis lentibus oriundae vix ad dimidium accedant, tota haec quantitas radicalis certe non ad 5 exsurget, ita ut tuto sumi possit $p = \frac{5}{2}kx$; supra autem notavimus esse circiter $k = 50$.

SCHOLION 1

48. Quodsi hic statuamus $k = 50$ et $x = 2$ dig., distantia focalis speculi obiectivi ex hac formula prodit $p = 250$ dig. ideoque maius viginti pedibus, quod merito maxime mirum videbitur, cum talia telescopia circumferantur, in quibus p non superat 24 dig. atque x adeo duobus digitis maior reperitur et quae nihilominus centies multiplicant; cuius ergo phaenomeni causam scrutari oportet. Primo autem manifestum est eam non in hoc esse sitam, quod numerum k nimis magnum assumsimus; etsi enim pro microscopiis contenti esse soleamus valore $k = 20$, tamen fateri debemus confusionem tum satis esse sensibilem, qualem tamen in his telescopiis non deprehendimus, et quamvis praeterea sumeremus $k = 20$, tamen adhuc prodiret $p = 100$ dig. Evidens ergo est causam necessario in eo sitam esse debere,

quod post signum radicale cubicum binae priores partes ad specula relatae non solum multo sint minores, quam hic assumsimus, sed adeo nihilo aequales poni debeant. Interim tamen certum est, si haec specula haberent figuram sphaericam, uti in calculo nostro assumsimus, partes inde in confusionem influentes minores non fore, quam hic sunt definitae; ex quo tuto concludere possumus in his instrumentis specula non ad figuram sphaericam esse elaborata, sed iis ab artifice figuram parabolicam esse inductam, in quo Cel. SHORT[1]) gloriatur se modum invenisse specula ad figuram parabolicam elaborandi, cui invento sine dubio exiguus valor litterae p tribui debet; quodsi enim post signum radicale binas priores partes omittamus, totus valor huius formulae radicalis sumto $\lambda'' = \lambda''' = 1$ ob $\mu = \frac{9}{10}$ circiter reducetur infra $\frac{3}{5}$; sumto autem hoc valore sequitur fore $p = 30$ dig. prorsus fere, uti experientia testatur; facile enim licet k assumere minus quam 50; tum vero etiam aliae constructiones proferri possunt, in quibus haec duo membra posteriora adhuc minores sortirentur coefficientes. Quodsi ergo ambo nostra specula figuram habuerint parabolicam sumereque liceat $p = 30$ dig., existente $x = 2$ dig., erit $r = 2{,}829$ dig. eiusque aperturae semidiameter, quam scilicet foramen suppeditat, $= \varepsilon x = \frac{1}{2}$ dig., unde utique sumi non licebit $\xi = \frac{1}{4}$, sed tantum $\xi = \frac{3}{17}$, et campus supra inventus diminui debet in ratione $\frac{1}{4} : \frac{3}{17}$ sive $17 : 12$ sive suo triente propemodum, ita ut adhuc sit eius semidiameter $\Phi = 11$ minut. Quodsi autem distantia focalis p maior assumi debeat, tum pro ξ adhuc minor valor reperietur.

SCHOLION 2

49. Telescopia autem vulgaria huius generis non mediocriter discrepant a mensuris supra descriptis, unde operae pretium erit mensuras talis telescopii, quod pro excellenti habetur, accuratius examinare. Erat autem speculi maioris distantia focalis duorum pedum seu $p = 24$ dig., semidiameter eius $x = 2\frac{1}{2}$ dig., foraminis vero semidiameter $y = \frac{1}{2}$ dig., unde sequitur fractio $\varepsilon = \frac{1}{5}$. Verum minus speculum a maiore distabat intervallo $AB = 27\frac{1}{8}$ dig.,

1) JAMES SHORT (1710—1768), Edinburgensis, telescopiis excellentibus fabricandis insignem laudem adeptus nonnullas etiam de rebus dioptricis dissertationes scripsit in *Philosophical transactions* a. 1753 et 1769. E. Ch.

unde, cum sit $AF = p = 24$ dig., sequitur distantia $FB = b = 3\frac{1}{3}$ dig. (Fig. 8, p. 132). Quare, cum posuerimus $b = \varepsilon p$, hinc non amplius fiet $\varepsilon = \frac{1}{5}$, sed tantum $\varepsilon = \frac{5}{36}$, ita ut in praxi recepta minus speculum propius collocetur, quam ratio foraminis postulat. Verum rationes non desunt a regula supra stabilita recedendi. Supra enim hoc speculum minus, quod etiam in praxi foramini aequabatur, ita constituimus, ut omnes radios axi parallelos, qui a maiore speculo reflectuntur, non solum reciperet, sed etiam ab iis quasi impleretur. Cum autem ob campum apparentem etiam radii ad axem obliqui a maiori speculo reflectantur, quorum plures in nostra constructione minus speculum praetergrederentur, utique consultum erit istud speculum aliquanto propius admovere, ut etiam hos radios recipere queat. Quamobrem conveniet litterae ε duplicem valorem tribui, alterum ex ratione foraminis petitum, alterum vero ex loco minoris speculi, quos ne inter se confundamus, in posterum statuamus $y = \delta x$, at vero $b = \varepsilon p$, ita ut hoc casu futurum sit $\delta = \frac{1}{5}$ et $\varepsilon = \frac{5}{36}$. Neque vero hinc in nostras formulas alia mutatio inferetur, nisi ut in locis, ubi formula εx seu y occurrit, eius loco scribamus δx, quod quidem tantum, ubi de quantitate foraminis et minoris speculi sermo est, occurrit; in reliquis vero omnibus formulis, ubi ε cum littera p coniungitur, nulla fit mutatio, ita ut nostrae formulae generales etiam hic valeant.

Verum ut ad istud telescopium revertamur, distantia focalis speculi minoris erat $q = 3$ dig., unde concluditur distantia $BG = \beta = \frac{bq}{b-q} = 30$ hincque $CG = 2\frac{2}{3}$. Hic autem probe notandum est, si vel levissima mutatio in loco minoris speculi fiat, tum in hoc intervallo CG insignem mutationem oriri; si enim loco $3\frac{1}{3}$ sumatur $FB = b = 3\frac{3}{8}$, ut sit $BC = 27\frac{3}{8}$, reperietur $BG = \beta = 27$ hincque $CG = -\frac{3}{8}$. Quam ob causam etiam minus speculum ita constitui solet, ut eius locus ope cochleae tantillum immutari possit. In isto autem exemplo speculum minus ita est constituendum, ut inde prodeat $CG = 1\frac{1}{3}$ dig. Unde vicissim verus valor ipsius b definiri poterit; quia enim fit $BG = \frac{3b}{b-3}$, ob $CB = 24 + b$ erit $CG = \frac{3b}{b-3} - b - 24$; quae distantia ut fiat $= \frac{4}{3}$ dig., elicietur

$$b = \frac{\sqrt{1525} - 29}{3} = 3{,}35041,$$

qui valor assumtum $3\frac{1}{3}$ tantum superat particula $\frac{1}{60}$, ita ut in reliquo calculo sumi possit $b = 3\frac{1}{3}$.

Pergamus nunc in nostro examine, et quia lentis in C distantia focalis erat $= 4$ dig. $= r$, ob $c = -\frac{4}{3}$ dig. fiet $CH = \gamma = 1$ dig. Deinde vero erat intervallum $CD = 3$ dig. et lentis ocularis D distantia focalis $s = 2$ dig. sicque prodibit distantia $HD = d = 2$ dig. ideoque $d = s$, uti natura telescopii postulat. Quocirca singula huius telescopii elementa ita se habebunt:

$$\alpha = 24, \quad b = 3{,}35041, \quad c = -1{,}33333, \quad d = 2, \quad \beta = 28{,}68374, \quad \gamma = 1$$

et distantiae focales

$$p = 24, \quad q = 3, \quad r = 4 \quad \text{et} \quad s = 2 \text{ dig.},$$

intervalla vero

$$AB = BC = 27{,}35041, \quad CD = 3 \text{ dig.}$$

Hinc vero reliquae nostrae litterae invenientur

$$B = \frac{\beta}{b} = 8{,}5613, \qquad \mathfrak{B} = 0{,}89541,$$

$$C = \frac{\gamma}{c} = -0{,}75, \qquad \mathfrak{C} = -3$$

et

$$\varepsilon = \frac{b}{p} = 0{,}13960 = \frac{1}{7{,}1633}$$

ac denique

$$P = -\frac{\alpha}{b} = -7{,}1633, \quad Q = -\frac{\beta}{c} = 21{,}51281, \quad R = -\frac{\gamma}{d} = -\frac{1}{2}.$$

His inventis valoribus proprietates huius telescopii sequenti modo definiri poterunt:

1. Quod ad multiplicationem attinet, quia est $m = PQR$, erit $m = 77{,}05$.

2. Ut nunc etiam campum apparentem definiamus, primo ex apertura lentis C, cuius semidiameter est $y = \frac{1}{2}$ dig., sumto $\mathfrak{x} = \frac{1}{4}$ erit $\frac{1}{4}\mathfrak{r}r = \frac{1}{2}$ dig. ideoque $\mathfrak{r} = \frac{1}{2}$ dig.; tum vero est

$$\mathfrak{q} = \frac{(P-1)M}{\mathfrak{B}} = -9{,}1168\,M$$

similique modo

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = (PQ-1)M - \mathfrak{q} = -143{,}99\,M$$

hincque $\mathfrak{r} = 47{,}99\,M$.

Cum igitur ante esset $\mathfrak{r} = \frac{1}{2}$ dig., hinc concluditur

$$M = \frac{1}{96,00} = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{76,05},$$

unde elicitur

$$\mathfrak{s} = \frac{8517}{9600} - 0,5 = 0,3871,$$

qui valor, cum unitate sit minor, veritati erit consentaneus; si enim unitate maior prodiisset, tum litterae $\mathfrak{r}$ valorem semisse minorem tribuere debuissemus. Quocirca semidiameter campi apparentis erit

$$\Phi = M\xi = \frac{1}{4} M = 859\, M \text{ min.} = 8'57''.$$

sive diameter campi erit $= 17'54''$.

3. Videamus, an per hoc telescopium etiam margo coloratus destruatur; quae conditio cum postulet

$$0 = \frac{\mathfrak{r}}{PQ} + \frac{\mathfrak{s}}{PQR} \quad \text{sive} \quad \mathfrak{r} = 2\mathfrak{s},$$

quod cum non multum a veritate discrepet, margo utique debebit esse insensibilis; interim tamen perfectius margo coloratus tolleretur, si prodiisset exacte $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{s}$; id quod quidem levissima mutatione fieri posset.

Tandem autem restabit, ut etiam investigemus, quam exacte aequatio semidiametrum confusionis complectens hic impleatur, sive cum hic iam cognoscamus litteras m, x, p, B, C una cum μ, ν et λ ex indole vitri et figura lentium, definiemus inde litteram k, quam novimus vix infra 50 admitti posse. Sumamus autem primo ambo specula ad figuram sphaericam esse elaborata, quoniam facile erit facto calculo duos terminos priores reiicere, quando noverimus haec specula esse parabolica. Ex forma autem generali supra § 34 data patet fore

$$\frac{1}{k} = 0,222\sqrt[3]{\left(1 + \frac{\varepsilon(1+B)(1-B)^2}{B^3} - \frac{4\mu}{mB^3\mathfrak{C}^3}\left(\lambda'' + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})\right) - \frac{8\mu}{mB^3C^3}\lambda'''\right)}$$

ob

$$x = \frac{5}{2}, \quad p = 24 \quad \text{et} \quad m = 77,05.$$

Deinde cum sit

$$\varepsilon = 0{,}1396, \quad B = 8{,}5613, \quad \mathfrak{B} = 0{,}89541, \quad \mathfrak{C} = -3 \quad \text{et} \quad C = -\frac{3}{4},$$

singuli hi termini ita in numeris evolventur:

$$\frac{1}{k} = 0{,}222\sqrt[3]{(1 + 0{,}1216 + 0{,}000003\,\mu(\lambda'' - 12\nu) + 0{,}00039\,\mu\lambda''')};$$

hinc ergo colligimus, si primum speculum esset sphaericum, certe proditurum esse

$$\frac{1}{k} > 0{,}222, \quad \text{hoc est} \quad \frac{1}{k} > \frac{2}{9} \quad \text{ideoque} \quad k < \frac{9}{2},$$

unde certe confusio enormis nasceretur; quod cum neutiquam fieri debet, necesse est, ut primum speculum sit parabolicum vel proxime saltem, ut primus terminus evanescat. Si porro speculum minus esset sphaericum, prodiret adhuc $\frac{1}{k} > 0{,}111$ seu $k < 9$, unde confusio adhuc intolerabilis nasceretur, ex quo concludimus etiam a secundo speculo nullam confusionem nasci. Reiectis ergo binis prioribus terminis habebitur

$$\frac{1}{k} = 0{,}222\sqrt[3]{(0{,}000003\,\mu(\lambda'' - 12\nu) + 0{,}00039\,\mu\lambda''')},$$

ubi statim patet solum postremum membrum in computum venire; unde ergo, cum sumi possit $\mu\lambda''' = 1$, prodit

$$\frac{1}{k} = 0{,}222 \cdot 0{,}073 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{13}$$

sive

$$k = 59,$$

qui valor iam tantus est, ut nulla confusio sit metuenda, atque hinc iam multo magis intelligimus summam sollertiam ad huiusmodi telescopia conficienda requiri, quae si ab artifice exspectari potest, nullum est dubium, quin species telescopiorum a nobis ante exposita his, quae passim reperiuntur, longe sit anteferenda. In paragrapho igitur superiori 46, ut eam ad modo examinatum telescopium accommodemus, sumi poterit ε, quatenus ad p refer-

tur, $=\frac{1}{7}$, quatenus autem ad x refertur, $=\frac{1}{5}$, ut fiat $y=\frac{1}{5}x$, unde pro quavis multiplicatione huiusmodi telescopia formari poterunt, quae certe multo maiorem campum patefacient simulque marginem coloratum perfectius tollent. Verum si speculum minus fiat convexum, multo maiora commoda inde sperare licebit, uti in sequente capite ostendemus. Casum enim, qui hic adhuc desiderari posset, quo imago realis in intervallum BC caderet, ne quidem attingemus, quoniam tam campum nimis parvum produceret, quam vitio marginis colorati vehementer laboraret. Cum enim tum esset $R>0$, aequatio pro margine tollendo $0=\mathfrak{r}+\frac{\mathfrak{s}}{R}$ subsistere non posset, nisi $\mathfrak{r}$ foret negativum, et quia $\mathfrak{q}$ etiam est negativum, campus fere ad nihilum redigeretur.

CAPUT IV

DE TELESCOPIIS CATADIOPTRICIS MINORE SPECULO CONVEXO INSTRUCTIS

PROBLEMA 1

50. *Constructionem huiusmodi telescopiorum describere, quibus obiecta situ inverso repraesententur seu ubi unica imago realis occurrat.*

SOLUTIO

Cum in hoc genere distantia amborum speculorum sit $AB = (1 - \varepsilon)p$ ideoque $b = -\varepsilon p$, ob $\alpha = p$ erit $P = -\frac{\alpha}{b} = +\frac{1}{\varepsilon}$, ubi ε designat fractionem aliquanto minorem, quam ratio foraminis ad speculum maius $\frac{y}{x}$ designat, ita ut posito $y = \delta x$ sit $\varepsilon < \delta$ ob rationem ante allegatam § 49, qua scilicet obtinetur, ut etiam radii obliqui a minore speculo excipiantur. Interim tamen semidiameter aperturae minoris speculi maneat $= \delta x = y$, ita ut hoc speculum foramini aequetur, uti initio assumsimus.

Nunc statim consideremus aequationem, qua margo coloratus destruitur; quae, si praeter specula duae lentes adhibeantur, reducitur ad hanc formam:

$$0 = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{s}}{R},$$

unde, ut ambae litterae $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ valores positivos habere queant, uti ratio campi postulat, conveniet litterae R valorem tribui negativum et quidem unitate non minorem, ut sumto $\mathfrak{s} = 1$ prior lens C, cuius apertura iam per foramen determinatur, campum non restringat. Ponamus igitur $R = -i$, et

cum ex data multiplicatione m ob repraesentationem inversam sit $PQR = -m$, fiet hinc $PQ = \frac{m}{i}$ et $Q = \frac{\varepsilon m}{i}$. Est vero $Q = -\frac{\beta}{c}$, et quia est

$$\beta + c = BC = AB = (1-\varepsilon)p,$$

hinc colligimus

$$c = -\frac{i(1-\varepsilon)p}{\varepsilon m - i} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{m\varepsilon(1-\varepsilon)p}{\varepsilon m - i};$$

quare, cum in genere sit $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$, erit

$$\frac{1}{q} = \frac{-(1-2\varepsilon)m - i}{m\varepsilon(1-\varepsilon)p} \quad \text{hincque} \quad q = -\frac{m\varepsilon(1-\varepsilon)p}{(1-2\varepsilon)m + i}.$$

Porro ex valoribus b et β colligimus

$$B = \frac{\beta}{b} = \frac{-m(1-\varepsilon)}{\varepsilon m - i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{+m(1-\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)m + i}.$$

Deinde cum sit $C = \frac{\gamma}{c}$ et $\mathfrak{C}c = r$, hinc invenimus

$$\mathfrak{C} = \frac{r}{c} = -\frac{(\varepsilon m - i)r}{i(1-\varepsilon)p}$$

ideoque

$$C = \frac{-(\varepsilon m - i)r}{i(1-\varepsilon)p + (\varepsilon m - i)r} = \frac{\gamma}{c},$$

ex quo porro colligitur

$$\gamma = \frac{i(1-\varepsilon)pr}{i(1-\varepsilon)p + (\varepsilon m - i)r}.$$

Denique, cum sit $R = -\frac{\gamma}{d} = -\frac{\gamma}{s}$ ob $s = d$, erit

$$s = -\frac{\gamma}{R} = \frac{\gamma}{i} = \frac{(1-\varepsilon)pr}{i(1-\varepsilon)p + (\varepsilon m - i)r}$$

hincque tertium intervallum

$$CD = \gamma + s = \frac{(1+i)(1-\varepsilon)pr}{i(1-\varepsilon)p + (\varepsilon m - i)r}.$$

Nunc autem aperturae praebent has aequationes:

1. $\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P-1)M$, unde fit $\mathfrak{q} = \frac{((1-2\varepsilon)m + i)M}{\varepsilon m}$,

2. $\mathfrak{C}\mathfrak{r} = (PQ-1)M - \mathfrak{q} = \frac{\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)im - i^2}{\varepsilon i m} \cdot M$

seu

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \frac{(m+i)(\varepsilon m - i)}{\varepsilon i m} \cdot M,$$

unde elicitur

$$\mathfrak{r} = -\frac{(m+i)(1-\varepsilon)p}{\varepsilon m r} \cdot M,$$

unde, cum sit $\mathfrak{s} = i\mathfrak{r}$ ideoque $\mathfrak{r} + \mathfrak{s} = (1+i)\mathfrak{r}$, erit

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} = \frac{(1-2\varepsilon)mr + ir - (1+i)(m+i)(1-\varepsilon)p}{\varepsilon m r} \cdot M = M(m-1)$$

sicque facta divisione per M inveniemus

$$r = \frac{-(m+i)(1+i)(1-\varepsilon)p}{\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)m - i};$$

qui valor cum sit negativus, ex eo etiam prodibit intervallum CD negativum, unde patet hunc valorem in praxi locum habere non posse.[1])

Verum cum saepenumero problemata duas pluresve solutiones admittant, idem etiam hic usu venit hocque problema praeter solutionem hic inventam insuper aliam complectitur, quam per divisionem ex calculo expulimus. Quod quo facilius appareat, calculum ita instituamus. Cum primo sit

$$\mathfrak{q} = \frac{(1-2\varepsilon)m + i}{\varepsilon m} \cdot M, \quad \text{deinde} \quad \mathfrak{s} = i\mathfrak{r},$$

erit

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} = \frac{(1-2\varepsilon)m + i}{\varepsilon m} \cdot M + (i+1)\mathfrak{r} = M(m-1),$$

unde colligitur

$$M = \frac{\varepsilon m(1+i)\mathfrak{r}}{\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)m - i}$$

ideoque

$$\mathfrak{q} = \frac{(1+i)((1-2\varepsilon)m + i)\mathfrak{r}}{\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)m - i};$$

altera vero aequatio dabit

1) Haec supra dicta non generaliter valent: intervallum CD fit positivum, quando $\varepsilon < \frac{m+i}{m(m+1)}$ ac quando $\varepsilon > \frac{(m+i)i^2}{m(m+i^2)} > \frac{m+i}{m(m+1)}$; priore casu evadit $r > 0$ simulque $CD > 0$, posteriore casu evadit $r < 0$ simulque denominator valoris CD negativus ideoque CD positivus. E. Ch.

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \frac{(m-i)\varepsilon m(1+i)\mathfrak{r} - i(1+i)((1-2\varepsilon)m+i)\mathfrak{r}}{\varepsilon i m^2 - (1-\varepsilon)im - i^2},$$

unde fit

$$\mathfrak{C} = \frac{(1+i)(m+i)(\varepsilon m - i)}{i(\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)m - i)};$$

supra vero iam invenimus

$$\mathfrak{C} = \frac{-(\varepsilon m - i)r}{i(1-\varepsilon)p},$$

unde patet aequalitatem horum duorum valorum duplici modo obtineri posse: 1. scilicet, si fuerit $i = \varepsilon m$, quo quippe uterque valor evanescit, 2. autem, quo facta divisione per $\varepsilon m - i$ fit

$$\frac{(1+i)(m+i)}{\varepsilon m^2 - (1-\varepsilon)m - i} = \frac{-r}{(1-\varepsilon)p},$$

haecque est solutio incongrua ante inventa.[1]) Statuamus igitur nunc $i = \varepsilon m$ fietque $\mathfrak{C} = 0$, littera vero r hinc plane non determinatur et nostra solutio sequenti modo se habebit:

$$\alpha = p, \quad b = -\varepsilon p, \quad \beta = \infty, \quad c = -\infty, \quad \gamma = r, \quad d = \frac{r}{\varepsilon m},$$

ubi notetur fore $\beta + c = (1-\varepsilon)p$.

Hinc porro erit

$$B = \infty, \quad \mathfrak{B} = 1, \quad C = 0, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

tum vero

$$P = \frac{1}{\varepsilon}, \quad Q = 1, \quad R = -\varepsilon m,$$

ita ut sit $PQR = -m$.

Quia vero $B = \infty$ et $C = \mathfrak{C} = 0$, productum in se manet indefinitum; verum cum sit

$$r = \frac{B\mathfrak{C}}{PQ}\cdot p = \varepsilon B\mathfrak{C}p,$$

hinc vicissim erit

$$B\mathfrak{C} = \frac{r}{\varepsilon p}.$$

1) Hanc solutionem incongruam non esse nota p. 156 indicatum est. E. Ch.

Praeterea vero erunt distantiae focales

$$q = -\varepsilon p \quad \text{et} \quad s = d = \frac{r}{\varepsilon m}$$

atque intervalla

$$AB = BC = (1-\varepsilon)p \quad \text{et} \quad CD = r\left(1 + \frac{1}{\varepsilon m}\right).$$

Denique, cum sit

$$\mathfrak{q} = \frac{(1+\varepsilon m)(1-\varepsilon)\mathfrak{r}}{\varepsilon m - 1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{s} = \varepsilon m \mathfrak{r},$$

erit

$$M = \frac{\varepsilon(\varepsilon m + 1)\mathfrak{r}}{\varepsilon m - 1} = \frac{(\varepsilon m + 1)\mathfrak{s}}{m(\varepsilon m - 1)}$$

ideoque semidiameter campi apparentis

$$\Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\varepsilon m + 1)\mathfrak{s}}{m(\varepsilon m - 1)} = 859\,\frac{(\varepsilon m + 1)\mathfrak{s}}{m(\varepsilon m - 1)} \text{ minut.},$$

ubi sumere licebit $\mathfrak{s} = 1$, si modo lens ocularis utrinque fiat aeque convexa.

Oculi vero post hanc lentem distantia reperitur

$$O = \frac{\mathfrak{s} s}{Mm} = \frac{\varepsilon m - 1}{\varepsilon m + 1} \cdot s.$$

Quia autem lentis C semidiameter aperturae maior esse nequit quam $y = \delta x$, ponamus

$$\frac{1}{4}\mathfrak{r} r = \delta x \quad \text{sive} \quad \frac{\mathfrak{s} r}{4\varepsilon m} = \delta x;$$

unde sumto $\mathfrak{s} = 1$ definitur

$$r = 4\delta\varepsilon m x \quad \text{hincque} \quad s = 4\delta x.$$

Verum etiam ad aperturam minoris speculi est attendendum, cuius semidiameter revera est $= \delta x$ et quae ob campum esse deberet $= \frac{1}{4}\mathfrak{q}q$; quam ob causam necesse est sit

$$\frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon m + 1)\mathfrak{s} p}{4m(\varepsilon m - 1)} < \delta x$$

ideoque

$$\mathfrak{s} < \frac{4m(\varepsilon m - 1)\delta x}{(1-\varepsilon)(\varepsilon m + 1)p}.$$

Tuto igitur sumere licebit $\mathfrak{s} = 1$, si modo fuerit

$$4m(\varepsilon m - 1)\,\delta x > (1 - \varepsilon)(\varepsilon m + 1)p.$$

Contra vero $\mathfrak{s}$ unitate minus accipi deberet.

Tantum igitur superest, ut ex formula semidiametri confusionis definiamus distantiam focalem speculi principalis p, quae ita reperitur expressa:

$$p = kx\sqrt[3]{m}\left(\frac{1-\varepsilon}{8} + \mu\frac{\varepsilon^4 p^3}{r^3}\lambda'' + \mu\frac{\varepsilon^3 p^3}{mr^3}\lambda'''\right),$$

siquidem ambobus speculis figura sphaerica inducatur; at si ambo habeant figuram parabolicam, debebit esse

$$r = k\varepsilon x\sqrt[3]{\mu m\left(\varepsilon\lambda'' + \frac{\lambda'''}{m}\right)},$$

ita ut iam aliter non definiatur nisi ex quantitate speculi, cum sine dubio semper esse debeat p multo maius quam x. Quia vero iam ante definivimus $r = 4\delta\varepsilon mx$, habebitur nunc

$$4\delta m = k\sqrt[3]{\mu m\left(\varepsilon\lambda'' + \frac{\lambda'''}{m}\right)}.$$

Cum nunc sit proxime $\mu = 1$ sumique possit $\lambda'' = 1$ et λ''' binario sit minus, k vero infra 50 capi non debeat, valorem ipsius ε aestimare poterimus; tantus enim esse debet, ut numerus

$$\frac{4\delta m}{\sqrt[3]{(\varepsilon m + 2)}}$$

non minor prodeat quam 50; unde patet pro ε sumi debere fractionem valde parvam; si enim esset $\delta = \frac{1}{5}$ et $m = 100$, colligitur circiter $\varepsilon = \frac{1}{50}$.

EXEMPLUM

51. Ponamus $m = 100$, $x = 2$ dig., $y = \frac{1}{2}$ dig. ideoque $\delta = \frac{1}{4}$, et ut

$$\frac{4\delta m}{\sqrt[3]{(\varepsilon m + 2)}}$$

satis magnum obtineat valorem, sumamus $\varepsilon = \frac{1}{20}$; sic enim prodit $k = \frac{100}{\sqrt[3]{7}}$ seu $k > 50$; hinc ergo erit $r = 10$ dig. et $s = 2$ dig. Deinde cum pro speculo minore debeat esse $8000 > 57p$, erit

$$p < \frac{8000}{57}.$$

Unde tuto sumi poterit $p = 25$ dig. sicque erit $q = -\frac{5}{4}$ dig. et intervallum $AB = BC = 23\frac{3}{4}$ dig. et $CD = 12$ dig. Oculi vero distantia $O = \frac{4}{3}$ dig., at campi apparentis semidiameter $\Phi = 12'53''$, ubi probe notandum hic ambo specula assumi perfecte parabolica.

SCHOLION

52. Quamvis autem haec constructio perfecte succedat, tamen tale telescopium tam insigni vitio erit praeditum, ut omni usu destituatur; cum enim radii a minore speculo reflexi iterum fiant inter se paralleli, radii peregrini circa hoc speculum transeuntes et in lentem C incidentes cum illis refractionem communem patientur simulque cum iis in oculum deferentur, ita ut verum obiectum cum vicinis prorsus permixtum visioni repraesentetur, neque ullo modo separari poterunt. Cum igitur huius vitii causa in eo sit sita, quod radii a minore speculo reflexi fiant paralleli seu intervallum $\beta = \infty$, ne hoc fiat, diligenter erit cavendum, quod fiet, si distantia β minor fuerit intervallo BC, ita ut in hoc intervallum imago realis incidat litteraque Q negativum obtineat valorem. Praeterea vero, quia etiam R negativum valorem habere debet ob marginem coloratum, duae iam habebuntur imagines reales et obiecta situ erecto cernentur. Neque vero duabus tantum lentibus adhibendis scopo nostro satisfacere poterimus, sed tertiam insuper lentem in subsidium vocari oportebit, quae commodissime ita instrui poterit, ut aperturam quam minimam requirat, siquidem hoc modo segregatio radiorum peregrinorum felicissime succedet, quemadmodum in sequente problemate ostendemus.

PROBLEMA 2

52[a][1]. *Huiusmodi telescopium cum speculo minore convexo et tribus lentibus vitreis construere, quod obiecta situ erecto distincte repraesentet.*

SOLUTIO

Maneat ut ante $y = \delta x$ et intervallum speculorum $AB = (1-\varepsilon)p = BC$, ut sit $b = -\varepsilon p$. Iam cum debeat esse $\beta < (1-\varepsilon)p$ et tamen superare

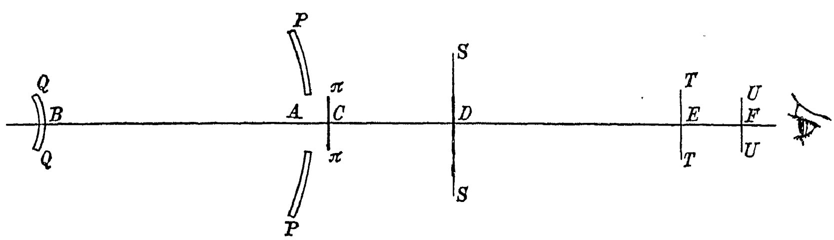

Fig. 9.

debeat eius semissem $\frac{1}{2}(1-\varepsilon)p$, statuamus $\beta = \zeta(1-\varepsilon)p$, ita ut ζ inter limites 1 et $\frac{1}{2}$ contineatur; hinc ergo fiet

$$q = \frac{\zeta\varepsilon(1-\varepsilon)}{\varepsilon-\zeta(1-\varepsilon)}\cdot p = \frac{-\zeta\varepsilon(1-\varepsilon)}{\zeta-\varepsilon(\zeta+1)}\cdot p.$$

Tum vero erit

$$B = \frac{\beta}{b} = \frac{-\zeta(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{\zeta(1-\varepsilon)}{\zeta-\varepsilon(\zeta+1)}.$$

Porro vero erit

$$c = (1-\varepsilon)(1-\zeta)p$$

sicque habebimus

$$P = \frac{1}{\varepsilon}, \quad Q = \frac{-\beta}{c} = \frac{-\zeta}{1-\zeta}.$$

Statuatur igitur praeterea $R = -k$ fiatque

$$PQRS = m = \frac{\zeta k}{\varepsilon(1-\zeta)}\cdot S,$$

1) Editio princeps falso pro numero 53 iterat numerum 52. E. Ch.

unde reliquae distantiae focales erunt

$$r = (1-\varepsilon)(1-\zeta)\,\mathfrak{C}p, \qquad s = \frac{(1-\varepsilon)(1-\zeta)\,C\mathfrak{D}}{k}\cdot p$$

et

$$t = \frac{-\zeta(1-\varepsilon)CD}{\varepsilon m}\cdot p$$

reliquaque intervalla

$$CD = (1-\varepsilon)(1-\zeta)\left(1+\frac{1}{k}\right)Cp,$$

$$DE = (1-\varepsilon)(1-\zeta)\left(1-\frac{1}{S}\right)CDp,$$

unde intelligemus esse debere $C>0$ ideoque $\mathfrak{C}<1$ et $\left(1-\frac{1}{S}\right)D>0$. Ut vero fiat $t>0$, debet esse $D<0$ ideoque $S<1$.

Consideretur nunc aequatio pro margine colorato tollendo, quae est

$$0 = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{s}}{R} + \frac{\mathfrak{t}}{RS} \quad \text{sive} \quad \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{s}}{k} + \frac{\mathfrak{t}}{kS};$$

ut iam secunda lens nulla apertura indigeat, statuatur $\mathfrak{s}=0$ eritque

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{t}}{kS};$$

aequationes autem pro litteris $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, posito

$$M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}+\mathfrak{t}}{m-1} = \frac{\mathfrak{q}+(1+kS)\mathfrak{r}}{m-1},$$

sunt

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M,$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r} = \frac{-((1-\varepsilon)\zeta+\varepsilon)}{\varepsilon(1-\zeta)}\cdot M - \mathfrak{q},$$

$$3.\quad 0 = \frac{\zeta(\varepsilon+k)-\varepsilon}{\varepsilon(1-\zeta)}\cdot M - \mathfrak{q} - \mathfrak{r}.$$

Ex prima autem habetur

$$\mathfrak{q} = \frac{\zeta-\varepsilon(\zeta+1)}{\varepsilon\zeta}\cdot M.$$

Ex tertia autem fit

$$\mathfrak{q} = \frac{\zeta(\varepsilon+k)-\varepsilon}{\varepsilon(1-\zeta)}\cdot M - \mathfrak{r},$$

qui duo valores inter se aequati dant

$$M = \frac{\varepsilon\xi(1-\xi)\mathfrak{r}}{\xi^2(1+k)-\xi(1+\varepsilon)+\varepsilon}$$

hincque

$$\mathfrak{q} = \frac{(1-\xi)(\xi-\varepsilon(1+\xi))\mathfrak{r}}{\xi^2(1+k)-\xi(1+\varepsilon)+\varepsilon}.$$

Tum vero ob $M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}(1+kS)}{m-1}$ reperietur etiam

$$M = \frac{kS\mathfrak{r}}{m-1+\frac{-\xi(\varepsilon+k)+\varepsilon}{\varepsilon(1-\xi)}},$$

ex quorum valorum aequalitate ob $m = \frac{\xi k}{\varepsilon(1-\xi)}\cdot S$ reperitur tandem

$$\zeta\big(\zeta kS-\varepsilon(1-\zeta)-\zeta(\varepsilon+k)+\varepsilon\big) = kS\big(\zeta^2(1+k)-\zeta(1+\varepsilon)+\varepsilon\big)$$

seu

$$\zeta^2 = S(\zeta(1+\varepsilon)-k\zeta^2-\varepsilon),$$

unde concludimus esse debere

$$\zeta(1+\varepsilon) > k\zeta^2+\varepsilon \quad \text{sive} \quad k < \frac{\xi(1+\varepsilon)-\varepsilon}{\xi^2}.$$

Praeterea vero, ut ex secunda aequatione pro $\mathfrak{C}$ prodeat valor positivus, necesse est, ut sit $\mathfrak{q} < 0$ ideoque etiam $\mathfrak{B} < 0$, unde speculum minus foret concavum; verum ut fiat $\mathfrak{B} < 0$, debet esse $\zeta < \varepsilon(\zeta+1)$ seu $\varepsilon > \frac{\xi}{\xi+1}$. Hoc vero non sufficit, sed insuper necesse est, ut sit

$$-\mathfrak{q} > \frac{(1-\varepsilon)\xi+\varepsilon}{\varepsilon(1-\xi)}\cdot M$$

seu

$$\frac{-\xi+\varepsilon(\xi+1)}{\xi} > \frac{(1-\varepsilon)\xi+\varepsilon}{(1-\xi)},$$

unde sequitur $\varepsilon > \frac{\xi}{1-\xi}$; quod cum nullo modo fieri queat, quia ζ intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur et ε unitate minus esse debet, nunc demum intelligimus hunc casum locum habere non posse.

ALIA SOLUTIO

53. Quoniam igitur hoc incommodum inde nascitur, quod sumsimus R negativum, consideremus alterum casum, quo S fit negativum manente R positivo, et quoniam Q positum est negativum, ponamus

$$Q = -i \quad \text{et} \quad S = -k,$$

ut sit

$$PQRS = \frac{iRk}{\varepsilon} = m;$$

calculus autem commodior evadet, si littera i retineatur, et cum sit $i = \frac{\beta}{c}$ et $\beta + c = (1-\varepsilon)p$, evidens est capi debere $i > 1$ eritque

$$\beta = \frac{i(1-\varepsilon)}{1+i} \cdot p \quad \text{et} \quad c = \frac{1-\varepsilon}{1+i} \cdot p,$$

unde fit

$$B = +\frac{\beta}{b} = -\frac{i(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1+i)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = +\frac{i(1-\varepsilon)}{i(1-2\varepsilon)-\varepsilon}$$

hincque

$$q = -\frac{i\varepsilon(i-\varepsilon)}{i(1-2\varepsilon)-\varepsilon} \cdot p.$$

Reliquae vero distantiae focales erunt

$$r = +\frac{(1-\varepsilon)\mathfrak{C}}{(1+i)} \cdot p, \quad s = -\frac{(1-\varepsilon)C\mathfrak{D}}{(1+i)R} \cdot p \quad \text{et} \quad t = -\frac{(1-\varepsilon)CD}{(1+i)Rk} \cdot p$$

et duo reliqua intervalla erunt

$$CD = +\frac{(1-\varepsilon)C}{1+i}\left(1-\frac{1}{R}\right)p,$$

$$DE = -\frac{(1-\varepsilon)CD}{(1+i)R}\left(1+\frac{1}{k}\right)p.$$

Ut igitur fiat $t > 0$, debet esse CD negativum, quo ipso etiam ultimum intervallum fit positivum. Ut vero et penultimum fiat positivum, debet esse $C\left(1-\frac{1}{R}\right)$ positivum.

Conditio porro marginis colorati sumto $\mathfrak{s} = 0$ praebet $\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{t}}{Rk}$ sive $\mathfrak{t} = Rk\mathfrak{r}$, et cum sit

$$M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{t}}{m-1} = \frac{\mathfrak{q}+(1+Rk)\mathfrak{r}}{m-1},$$

satisfieri oportet his tribus aequationibus:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M,$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r} = -\frac{(i+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M - \mathfrak{q},$$

$$3.\quad 0 = +\frac{(iR+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M + \mathfrak{q} + \mathfrak{r}.$$

Ex tertia ergo fit

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} = -\frac{(iR+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M$$

hincque

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r}(1 + Rk) = -\frac{(iR+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M + Rk\mathfrak{r} = M(m-1),$$

unde colligitur

$$M = \frac{Rk\mathfrak{r}}{m + \frac{iR}{\varepsilon}}$$

simulque

$$\mathfrak{q} = -\frac{Rk(iR+\varepsilon)}{m\varepsilon + iR}\cdot\mathfrak{r} - \mathfrak{r} = -\frac{(kiR^2 + R(i+k\varepsilon) + m\varepsilon)}{m\varepsilon + iR}\cdot\mathfrak{r},$$

ex quo valor ipsius $\mathfrak{q}$ prodit negativus; qui cum ex prima forma prodeat positivus, siquidem est $\mathfrak{B} > 0$, patet etiam hanc solutionem locum habere non posse, siquidem secundum speculum est convexum, uti assumsimus.

TERTIA SOLUTIO

54. Pro repraesentatione igitur erecta unicus tantum casus superest, quo sumto Q positivo ambae litterae R et S negativos obtinent valores. Statuamus igitur

$$Q = +i,\; R = -k \text{ et } S = -k',$$

ut sit

$$PQRS = m = \frac{ikk'}{\varepsilon} \quad\text{hincque}\quad k' = \frac{\varepsilon m}{ik}.$$

Porro erit

$$\beta = \frac{i(1-\varepsilon)}{i-1}\cdot p,\quad c = -\frac{(1-\varepsilon)}{i-1}\cdot p,$$

unde fit

$$B = \frac{-i(1-\varepsilon)}{\varepsilon(i-1)} \quad\text{et}\quad \mathfrak{B} = \frac{i(1-\varepsilon)}{i(1-2\varepsilon)+\varepsilon};$$

quare distantiae focales sequenti modo se habebunt:

$$q = \frac{-\varepsilon i(1-\varepsilon)}{i(1-2\varepsilon)+\varepsilon}\cdot p, \quad r = \frac{-(1-\varepsilon)\mathfrak{C}}{i-1}\cdot p, \quad s = \frac{-(1-\varepsilon)C\mathfrak{D}}{(i-1)k}\cdot p$$

et

$$t = \frac{-(1-\varepsilon)CD}{(i-1)kk'}\cdot p = \frac{-i(1-\varepsilon)CD}{\varepsilon(i-1)m}\cdot p.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$CD = \frac{-(1-\varepsilon)C}{i-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)p,$$

$$DE = \frac{-(1-\varepsilon)CD}{(i-1)k}\left(1+\frac{1}{k'}\right)p,$$

unde intelligimus esse debere $C<0$ et $D>0$ ideoque $\mathfrak{D}<1$ et $\mathfrak{D}>0$.

Nunc autem conditio marginis colorati dabit

$$0 = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{t}}{kk'},$$

unde patet esse debere $\mathfrak{r}<0$ seu ob lentem C campum diminui. Ponamus ergo hic $\mathfrak{r} = -\omega$, ut fiat $\mathfrak{t} = \omega kk' = \frac{\varepsilon m}{i}\cdot\omega$, quandoquidem etiam hic assumsimus $\mathfrak{s} = 0$; pro campo ergo apparente erit

$$M = \frac{i\mathfrak{q} + \omega(\varepsilon m - i)}{i(m-1)},$$

cui sequentes tres aequationes sunt adiungendae:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M,$$

$$2.\quad -\mathfrak{C}\omega = \frac{i-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M - \mathfrak{q},$$

$$3.\quad 0 = -\frac{(ik+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M - \mathfrak{q} + \omega.$$

Ex hac ultima ergo concludimus

$$\mathfrak{q} = \omega - \frac{(ik+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M;$$

addatur utrinque $\omega\left(\frac{\varepsilon m}{i}-1\right)$ eritque

$$\mathfrak{q}+\omega\left(\frac{\varepsilon m}{i}-1\right)=\frac{\varepsilon m}{i}\cdot\omega-\frac{(ik+\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M=M(m-1),$$

ex quo colligitur

$$M=\frac{\varepsilon^2 m\,\omega}{i(m\varepsilon+ik)},$$

unde vicissim

$$\mathfrak{q}=\frac{\varepsilon m(i-ik-\varepsilon)+i^2k}{i(\varepsilon m+ik)}\cdot\omega.$$

Ex prima vero aequatione fit

$$\mathfrak{q}=\frac{(\varepsilon i(1-2\varepsilon)+\varepsilon^2)m\omega}{i^2(m\varepsilon+ik)},$$

quorum valorum aequalitas suppeditat hanc aequationem:

$$\varepsilon im(i-ik-\varepsilon)+i^3k=\varepsilon m(i(1-2\varepsilon)+\varepsilon)$$

seu

$$\varepsilon m(i^2(1-k)-i(1-\varepsilon)-\varepsilon)+i^3k=0,$$

ex qua aequatione invenimus

$$k=\frac{\varepsilon m(i^2-i(1-\varepsilon)-\varepsilon)}{i^2(\varepsilon m-i)}$$

seu

$$k=\frac{\varepsilon m(i+\varepsilon)(i-1)}{i^2(\varepsilon m-i)},$$

qui valor debet esse positivus; quem in finem sumi debet $i>1$ et $i<\varepsilon m$. Iam substituto valore ipsius k reperitur

$$M=\frac{\varepsilon(\varepsilon m-i)\omega}{\varepsilon im-i(1-\varepsilon)-\varepsilon}.$$

Ex secunda denique aequatione colligimus

$$\mathfrak{C}=-\frac{k(\varepsilon m-i)}{\varepsilon m+ik}.$$

Secunda vero aequatio[1]) dat

$$\mathfrak{C}=-\frac{\varepsilon m(i+\varepsilon)(i-1)}{i^2(\varepsilon m+ik)},$$

1) Scilicet aequatio $k=\frac{\varepsilon m(i+\varepsilon)(i-1)}{i^2(\varepsilon m-i)}$. E. Ch.

qui valor ergo est negativus ideoque et $C < 0$, uti supra iam requirebatur. Litterae autem $\mathfrak{D}$ et D arbitrio nostro manent permissae, dummodo D positive capiatur; quod tandem ad ipsam quantitatem p attinet, eam ex confusione definiri convenit ope formulae notae, ubi inprimis dispiciendum erit, utrum speculis figura sphaerica inducta sit an parabolica.

COROLLARIUM 1

55. Si ergo littera $\mathfrak{t}$ in calculum introducatur, quam licebit unitati aequalem sumere, pro campo apparente habebimus

$$M = \frac{i(\varepsilon m - i)}{m(\varepsilon i m - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)} \cdot \mathfrak{t},$$

quippe qui valor per 859 min. multiplicatus dat semidiametrum campi Φ. Vidimus autem litteram i intra limites 1 et εm capi debere.

COROLLARIUM 2

56. Si caperetur $i = 1$, foret $\beta = \infty$ et radii a speculo minore reflexi fierent inter se paralleli, unde vitium supra memoratum oriretur, quod scilicet radii peregrini ita cum propriis permiscerentur, ut nullo modo separari possent; qui casus cum sit sollicite evitandus, litteram i unitate multo maiorem accipi conveniet, neque tamen alteri limiti εm aequalis assumi potest, quia alioquin campus prorsus evanesceret.

COROLLARIUM 3

57. Calculum instituenti facile patebit maximum in hac expressione M locum non habere et eius valorem eo magis diminutum iri, quo maior littera i accipiatur. Quare, cum esse debeat $i > 1$, si sumamus $i = 2$, erit

$$M = \frac{2(\varepsilon m - 2)\mathfrak{t}}{m(2\varepsilon m + \varepsilon - 2)}$$

sicque pro magnis multiplicationibus $M = \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{t}$, qui valor etiam prodit, si capiatur $i = 3$ vel 4 etc., dummodo i sit multo minus quam εm, qui campus

simplex censeri solet. Sin autem medium inter limites sumendo capiatur $i = \frac{\varepsilon m + 1}{2}$, fiet

$$M = \frac{(\varepsilon m + 1)\mathfrak{t}}{2m(\varepsilon m + \varepsilon + 1)}$$

et pro magnis multiplicationibus campus ad dimidium redigetur.

COROLLARIUM 4

58. Idem etiam patet ex primitivo valore ipsius M, qui est

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{t}}{m - 1},$$

pro quo $\mathfrak{r} = -\omega = -\frac{i\mathfrak{t}}{\varepsilon m}\cdot$ Etsi autem $\mathfrak{q}$ addi debet, tamen ex superioribus patet esse $\mathfrak{q} < \omega$; erat enim ex tertia aequatione

$$\mathfrak{q} = \omega - \frac{(ik + \varepsilon)}{\varepsilon}\cdot M.$$

SCHOLION 1

59. Circa campum autem inprimis est inquirendum, an loco $\mathfrak{t}$ scribere liceat unitatem, quod iudicium ex prima lente C est petendum, cuius semidiameter aperturae revera est $= \delta x$, ob campum autem esse debet $= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r$. Cum igitur sit $\mathfrak{r} = -\frac{i\mathfrak{t}}{\varepsilon m}$ et

$$r = \frac{-(1-\varepsilon)\mathfrak{C}}{i-1}\cdot p \quad \text{seu} \quad r = \frac{\varepsilon m(1-\varepsilon)(i+\varepsilon)}{i^2(\varepsilon m + ik)}\cdot p,$$

iam supra autem invenerimus esse

$$\varepsilon m + ik = \frac{\varepsilon m(i(\varepsilon m + \varepsilon - 1) - \varepsilon)}{i(\varepsilon m - i)} = \frac{\varepsilon m(\varepsilon i m - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}{i(\varepsilon m - i)},$$

quocirca erit

$$r = \frac{(\varepsilon m - i)(1-\varepsilon)(i+\varepsilon)}{i(\varepsilon i m - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}\cdot p;$$

unde, nisi fuerit

$$\frac{(\varepsilon m - i)(1-\varepsilon)(i+\varepsilon)}{\varepsilon m(\varepsilon i m - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}\cdot p > 4\delta x,$$

tum sumere licebit $t = 1$. Contra vero t tanto minus unitate capi debebit, ubi notasse iuvabit esse $\delta > \varepsilon$. Quoniam autem hae formulae nimis sunt complicatae, quam ut in genere omnia momenta pro constructione telescopii commode exprimi queant, statuamus $i = \frac{1}{2}(\varepsilon m + 1)$, ut intervallum CD minus evadat, etsi campus ad semissem redigitur; deinde enim videbimus, quomodo campus amplificari possit. Posito autem $i = \frac{\varepsilon m + 1}{2}$ erit

$$k = \frac{2\varepsilon m(\varepsilon m + 2\varepsilon + 1)}{(\varepsilon m + 1)^2},$$

qui valor abit in $k = 2$ pro magnis multiplicationibus.

Deinde vero

$$\mathfrak{C} = \frac{-(\varepsilon m + 2\varepsilon + 1)(\varepsilon m - 1)^2}{2(\varepsilon m + 1)((\varepsilon m + 1)(\varepsilon m + \varepsilon - 1) - 2\varepsilon)} \left[= -\frac{(\varepsilon m + 2\varepsilon + 1)(\varepsilon m - 1)}{2(\varepsilon m + 1)(\varepsilon m + \varepsilon + 1)} \right],$$

unde C reperitur.

SCHOLION 2

60. Quia vero valor $i = \frac{\varepsilon m + 1}{2}$ merito nimis magnus videri potest, pro i potius medium geometricum sumamus sitque $i = \sqrt{\varepsilon m}$, ac primo pro campo apparente fiet

$$M = \frac{\varepsilon}{\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon} \cdot t.$$

Deinde vero habebimus

$$k = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m}}{\sqrt{\varepsilon m}}$$

hincque

$$B = \frac{-(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m}}{\varepsilon(\sqrt{\varepsilon m} - 1)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m}}{(1-2\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{-(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m})(\sqrt{\varepsilon m} - 1)}{\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon} \quad \text{et} \quad C = \frac{-(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m})(\sqrt{\varepsilon m} - 1)}{2\varepsilon m + \varepsilon\sqrt{\varepsilon m}}.$$

Ex his, si ponamus $D = \theta$, ut sit $\mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta}$, reperientur distantiae focales

$$p = p, \quad q = \frac{-\varepsilon(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m}}{(1-2\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon} \cdot p, \quad r = \frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m})}{\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon} \cdot p,$$

$$s = \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon} \cdot p, \quad t = \frac{\theta(1-\varepsilon)(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m})}{\varepsilon m(\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon m})} \cdot p.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$AB = BC = (1-\varepsilon)p,$$

$$CD = \frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon m})}{2\varepsilon m + \varepsilon\sqrt{\varepsilon m}} \cdot p,$$

$$DE = \frac{\theta(1-\varepsilon)(\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon)}{\varepsilon m(\varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon m})} \cdot p.$$

Pro loco autem oculi erit

$$O = \frac{tt}{Mm} = \frac{\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon}{\varepsilon m} \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{t}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon m}} + \frac{1}{m}\right).$$

Pro aperturis autem invenimus

$$\mathfrak{q} = \frac{(1-2\varepsilon)\sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon}{(\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon)\sqrt{\varepsilon m}} \cdot \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{r} = -\frac{\mathfrak{t}}{\sqrt{\varepsilon m}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{s} = 0.$$

Licebit autem sumere $\mathfrak{t} = 1$, nisi prodeat

$$\frac{(1-\varepsilon)(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m})}{(\varepsilon m + \sqrt{\varepsilon m} + \varepsilon)\sqrt{\varepsilon m}} \cdot p > 4\delta x.$$

Lenti autem in D, pro qua est $\mathfrak{s} = 0$, apertura tribui debet, cuius semidiameter sit $= \frac{x}{PQR} = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon m}}$, ita ut huius lentis apertura sit tam exigua, ut ad radios peregrinos arcendos apprime sit accommodata. Interim tamen, quia campus apparens hic nimis est exiguus, utique operae erit pretium huic generi telescopiorum maiorem campum procurare, quod in sequente problemate praestabimus.

PROBLEMA 3

61. *Telescopiorum generi in problemate praecedente descripto novum gradum perfectionis addere, dum eius campus apparens amplificatur.*

SOLUTIO

Fit hoc additione novae lentis, ita ut nunc telescopium ex duobus speculis et quatuor lentibus componatur. Maneat autem ut ante

$$P = \frac{1}{\varepsilon}, \quad Q = i, \quad R = -k \quad \text{et} \quad S = -k',$$

quibus accedente littera T sit

$$\frac{ikk'T}{\varepsilon}=m;$$

deinde sit etiam ut ante

$$B=\frac{-i(1-\varepsilon)}{\varepsilon(i-1)}\quad\text{hincque}\quad\mathfrak{B}=\frac{i(1-\varepsilon)}{i(1-2\varepsilon)+\varepsilon},$$

ex quibus distantiae focales ita formabuntur:

$$q=-\frac{\mathfrak{B}}{P}\cdot p=-\varepsilon\mathfrak{B}p,\quad r=\frac{B\mathfrak{C}}{PQ}\cdot p=\frac{\varepsilon B\mathfrak{C}}{i}\cdot p,\quad s=\frac{\varepsilon BC\mathfrak{D}}{ik}\cdot p,\quad t=\frac{\varepsilon BCD\mathfrak{E}}{ikk'}\cdot p$$

et

$$u=-\frac{\varepsilon BCDE}{ikk'T}\cdot p=-\frac{BCDE}{m}\cdot p$$

et intervalla

$$AB=BC=(1-\varepsilon)p,\quad CD=\frac{\varepsilon BC}{i}\left(1+\frac{1}{k}\right)p,\quad DE=\frac{\varepsilon BCD}{ik}\left(1+\frac{1}{k'}\right)p$$

et

$$EF=\frac{\varepsilon BCDE}{ikk'}\left(1-\frac{1}{T}\right)p,$$

ubi, cum sit $B<0$, debet esse $C<0$, deinde $D>0$. Porro ut fiat u positivum, debet esse $E<0$ hincque ob ultimum intervallum $T<1$. Nunc statuatur etiam $\mathfrak{r}=-\omega$, $\mathfrak{s}=0$, et ut campus maximus evadat, $\mathfrak{u}=\mathfrak{t}$, ut sit

$$M=\frac{\mathfrak{q}-\omega+2\mathfrak{t}}{m-1}.$$

Ut vero margo coloratus evanescat, debet esse

$$\omega=\frac{\mathfrak{t}}{kk'}+\frac{\mathfrak{u}}{kk'T}=\frac{\mathfrak{t}}{kk'}\left(1+\frac{1}{T}\right),$$

et quia debet esse $T<1$, sumatur statim $T=\frac{1}{2}$, ut sit $m=\frac{ikk'}{2\varepsilon}$ hincque $kk'=\frac{2\varepsilon m}{i}$; tum igitur erit $\omega=\frac{3i}{2\varepsilon m}\mathfrak{t}$ ac vicissim $\mathfrak{t}=\frac{2\varepsilon m\omega}{3i}$; unde fit

$$M=\frac{\mathfrak{q}+\omega\left(\frac{4\varepsilon m}{3i}-1\right)}{m-1}.$$

Nunc autem considerari oportet sequentes quatuor aequationes:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M,$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\omega = \frac{i-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M - \mathfrak{q},$$

$$3.\quad 0 = -\left(\frac{ik+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M - \mathfrak{q} + \omega,$$

$$4.\quad \mathfrak{E}\mathfrak{t} = \frac{ikk'-\varepsilon}{\varepsilon}\cdot M - \mathfrak{q} + \omega.$$

Ex tertia igitur habemus

$$\mathfrak{q} - \omega = -\left(\frac{ik+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M;$$

addatur utrinque $\frac{4\varepsilon m\omega}{3i}$ ac prodibit

$$M(m-1) = \frac{4\varepsilon m\omega}{3i} - \left(\frac{ik+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M,$$

unde invenitur

$$M = \frac{4\varepsilon m\omega}{3i\left(m+\frac{ik}{\varepsilon}\right)} = \frac{4\varepsilon^2 m\omega}{3i(m\varepsilon+ik)}$$

seu substituto valore ipsius ω

$$M = \frac{2\varepsilon}{m\varepsilon+ik}\cdot \mathfrak{t},$$

atque insuper ex eadem aequatione erit

$$\mathfrak{q} = \frac{3i(m\varepsilon+ik) - 4\varepsilon m(ik+\varepsilon)}{3i(m\varepsilon+ik)}\cdot\omega;$$

at vero prima aequatio dat

$$\mathfrak{q} = \frac{4(1-\varepsilon)\varepsilon m\omega}{3i(m\varepsilon+ik)\mathfrak{B}},$$

quorum valorum aequalitas praebet

$$3i(m\varepsilon+ik) - 4\varepsilon m(ik+\varepsilon) = \frac{4\varepsilon(1-\varepsilon)m}{\mathfrak{B}} = \frac{4\varepsilon m(i(1-2\varepsilon)+\varepsilon)}{i},$$

unde fit

$$ik(4\varepsilon m - 3i) = \varepsilon m(3i - 4\varepsilon) - \frac{4\varepsilon m(i(1-2\varepsilon)+\varepsilon)}{i} = \frac{\varepsilon m}{i}(3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon)$$

seu

$$ik = \frac{\varepsilon m(3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon)}{i(4\varepsilon m - 3i)};$$

qui valor ut sit positivus, debet esse

$$i < \frac{4}{3}\varepsilon m \quad \text{simulque} \quad i > \frac{2}{3}\left(1 - \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}\right).$$

Hinc autem valore ipsius k definito secunda aequatio dabit

$$\mathfrak{C} = \frac{-4\varepsilon m(i^2 - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}{3i^2(m\varepsilon + ik)} = \frac{-4\varepsilon m(i-1)(i+\varepsilon)}{3i^2(m\varepsilon + ik)}$$

sive ex altero valore ipsius $\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{C} = \frac{-\varepsilon m(1+4k) + 3ik}{3(m\varepsilon + ik)};$$

erit ergo ob $\mathfrak{C} < 0$ etiam $C < 0$, uti requiritur; ex quorum valorum aequalitate idem valor pro k qui ante prodit. Notetur autem hic esse

$$\varepsilon m + ik = \frac{4\varepsilon m(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}{i(4\varepsilon m - 3i)},$$

unde fit

$$M = \frac{i(4\varepsilon m - 3i)\mathfrak{t}}{2m(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}.$$

Deinde vero littera D arbitrio nostro permittitur, dummodo sumatur positiva.

Quarta denique aequatio nobis praebet valorem litterae

$$\mathfrak{E} = \frac{2(2\varepsilon m + ik)}{\varepsilon m + ik} = \frac{4(2\varepsilon im - (1-\varepsilon)i - \varepsilon) - 3i^2}{2(\varepsilon im - (1-\varepsilon)i - \varepsilon)},$$

qui valor sponte positivus et unitate maior est; quare $E < 0$, uti oportet.[1])

1) Editio princeps: *Quarta denique aequatio nobis praebet valorem litterae*

$$\mathfrak{E} = \frac{4\varepsilon im - 2i(1-\varepsilon) - 2\varepsilon}{i(m\varepsilon + ik)}$$

quare ut E prodeat negativum, oportet esse $\mathfrak{E} > 1$ *sive*

$$4\varepsilon im - 2i(1-\varepsilon) - 2\varepsilon > i(\varepsilon m + ik)$$

et valore ipsius $\varepsilon m + ik$ *substituto*

$$(4\varepsilon m - 3i)(4\varepsilon im - 2i(1-\varepsilon) - 2\varepsilon) > 4\varepsilon m(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)$$

quod ut fiat necesse est sit

$$6\cdot\varepsilon^2 im^2 - 2\varepsilon m(3i^2 + i(1-\varepsilon) + \varepsilon) + 3i^2(1-\varepsilon) + 3\varepsilon i > 0,$$

quod sponte evenit, cum certo sit $i < \varepsilon m$. Correxit E. Ch.

Tandem pro loco oculi habebimus

$$O = \frac{tu}{Mm} = \frac{2(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}{i(4\varepsilon m - 3i)} \cdot u$$

sive

$$O = \frac{1}{2} u \left(1 + \frac{3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon}{i(4\varepsilon m - 3i)}\right).$$

Superest porro, ut diiudicemus, an pro t unitas accipi queat, quod licebit, si fuerit

$$r < \frac{4\delta x}{\omega} \quad \text{seu} \quad r < \frac{8\delta\varepsilon m x}{3i}.$$

Contra vero accipi debet $t = \frac{8\delta\varepsilon m x}{3ir}$, quo casu campus in eadem ratione diminuetur, in qua t ab unitate deficit. Quod autem ad quantitatem p attinet, ea ex aequatione nota definiri debet speculorum ratione habita, utrum sint sphaerica an parabolica.

COROLLARIUM 1

62. Quia lens in D, quam minimo foraminulo pertundi sufficit, a lente C distat intervallo

$$CD = \frac{\varepsilon BC}{i}\left(1 + \frac{1}{k}\right)p,$$

radii autem peregrini in lentem C incidentes post eam colliguntur ad distantiam $r = \frac{\varepsilon B\mathfrak{C}}{i} \cdot p$, ut hi radii excludantur, necesse est, ut hae duae distantiae a se invicem discrepent, seu notabilis differentia esse debet inter has quantitates $C\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $\mathfrak{C}$, hoc est inter $1 + \frac{1}{k}$ et $1 - \mathfrak{C}$ seu inter $\frac{1}{k}$ et $-\mathfrak{C}$. Est vero

$$\frac{1}{k} = \frac{i^2(4\varepsilon m - 3i)}{\varepsilon m(3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon)} \quad \text{et} \quad -\mathfrak{C} = \frac{(4\varepsilon m - 3i)(i-1)(i+\varepsilon)}{3i(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)};$$

quare, cum ratio inter has quantitates debeat esse admodum inaequalis, haec fractio:

$$\frac{3i^3(\varepsilon im - i(1-\varepsilon) - \varepsilon)}{\varepsilon m(i-1)(i+\varepsilon)(3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon)}$$

plurimum ab unitate discrepare debet; at differentia inter numeratorem et denominatorem satis est magna, ut aequalitas non sit metuenda.

COROLLARIUM 2

63. Quodsi autem sumamus $i=2$, fractio illa ab unitate diversa evadet $=\frac{6(2\varepsilon m+\varepsilon-2)}{\varepsilon m(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}$, quae utique satis ab unitate discrepat, ut transitus radiorum peregrinorum neutiquam sit metuendus. Campi autem ratio maxime exigit, ut ipsi i tam parvum valorem tribuamus, quam circumstantiae permittunt. Ceterum multo magis ille transitus evitabitur, si capiatur $i<2$.

EXEMPLUM 1

Pro multiplicatione $m=50$

64. Ponamus hic $\delta=\frac{1}{4}$, $\varepsilon=\frac{1}{5}$, et quia haec multiplicatio postulat $x=1$ dig., erit $y=\frac{1}{4}$ dig. Deinde statuamus $i=3$; erit

$$(i+\varepsilon)(i-1)=6{,}4,\quad 3i^2-4i(1-\varepsilon)-4\varepsilon=16{,}6,\quad \varepsilon m=10,\quad 4\varepsilon m-3i=31,$$

$$B=-6,\quad \mathfrak{B}=\frac{6}{5},$$

$$ik=\frac{166}{93}=1{,}785^{1)},\quad [k=0{,}595],\quad \varepsilon m+ik=15{,}355,$$

$$\mathfrak{C}=-0{,}6175,\quad C=-0{,}3817,\quad \mathfrak{E}=2{,}4921,\quad E=-1{,}6702,$$

unde elementa primitiva sequenti modo definientur ponendo θ loco D, ut sit $\mathfrak{D}=\frac{\theta}{1+\theta}$:

$$\alpha=p,\quad \beta=1{,}2p,\quad \gamma=0{,}1526p,$$

$$b=-\frac{1}{5}p=-0{,}2p,\quad c=-0{,}4p,\quad d=0{,}0855p,$$

$$\delta=\quad 0{,}0855\,\theta p,^{2)}\qquad e=0{,}0229\,\theta p,$$

$$\varepsilon=-0{,}0382\,\theta p,^{2)}\qquad f=0{,}0764\,\theta p,$$

---

1) Editio princeps: $k=\frac{166}{93}$. Ob falsum valorem k et inaccuratam formulam pro $\mathfrak{E}$ (vide notam pag. 174) omnes numeri a k et $\mathfrak{E}$ dependentes in § 64—72 inaccurati evadunt; quia autem parvi momenti esse videtur illos numeros accuratius induci, eorum emendatio hic omittitur. E. Ch.

2) Hac in paragrapho littera δ duos differentes valores habet, alterum $\delta=\frac{1}{4}$, alterum $\delta=dD$, i. e. distantia determinatrix posterior secundae lentis SS; similiter littera ε denotatur modo $\varepsilon=\frac{1}{5}$, modo distantia determinatrix posterior $\varepsilon=eE$ tertiae lentis TT. E. Ch.

ex quibus intervalla colliguntur

$$AB = BC = 0{,}8p, \quad CD = 0{,}2381p, \quad DE = 0{,}1084\theta p, \quad EF = 0{,}0382\theta p,$$

sicque tubus foramini speculi annectendus erit circiter $= \frac{1}{3}p$.

Distantiae vero focales erunt

$$q = \mathfrak{B}b = -0{,}24p, \quad r = \mathfrak{C}c = 0{,}247p, \quad s = \mathfrak{D}d = 0{,}0855\frac{\theta}{1+\theta}\cdot p,$$
$$t = \mathfrak{E}e = 0{,}0571\theta p, \quad u = f = 0{,}0764\theta p.$$

Praeterea pro hoc casu habebimus

$$M = \frac{93}{2740}\mathfrak{t} = 0{,}0339\mathfrak{t} \quad (8{,}530\,7323).$$

Tum vero

$$\mathfrak{q} = 0{,}113\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{r} = -\omega = -0{,}45\mathfrak{t}.$$

Nunc igitur videamus, an pro $\mathfrak{t}$ sumi possit unitas nec ne? Quem in finem consideremus valorem

$$\mathfrak{r}r = 4\delta x \quad \text{seu} \quad 0{,}111p\mathfrak{t} = 1 \text{ dig.},$$

unde fit $\mathfrak{t} = \frac{1}{0{,}111p} = \frac{9}{p}$, unde apparet, si p fuerit novem digitorum vel minus, tum sumi posse $\mathfrak{t} = 1$, sin autem fuerit $p > 9$ dig., tum sumi debet $\mathfrak{t} = \frac{9}{p}$, et campus tanto fiet minor. Circa locum oculi vero notandum est esse

$$O = \frac{1}{2}u\left(1 + \frac{16{,}6}{93}\right) = 0{,}59u.$$

Nunc vero restat praecipua investigatio distantiae focalis p, quae ex mensura confusionis colligitur,

$$p = kx\sqrt[3]{50}\left\{\begin{array}{c} 0{,}125 - 0{,}0283 + 0{,}00131\mu(\lambda + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})) \\ + 0{,}0031\mu\left(\frac{(1+\theta)^3\lambda'}{\theta^3} + \frac{\nu(1+\theta)}{\theta^2}\right) + \frac{0{,}00005\mu}{\theta^3}(\lambda'' + \nu\mathfrak{E}(1-\mathfrak{E})) + \frac{0{,}00036\mu}{\theta^3}\lambda''' \end{array}\right\}$$

Circa hanc expressionem vero sequentia observemus:

I. Si speculum principale sit parabolicum, primum membrum post signum radicale 0,125 omitti debet; ac si etiam minus speculum esset parabolicum, tum quoque secundum terminum omittere liceret. Consultius autem

videtur solum primum speculum parabolicum efficere, alteri vero figuram sphaericam perfectam inducere; tum enim sequentia membra ita instrui sive litterae λ, λ', λ'' cum littera θ ita assumi poterunt, ut ista membra a secundo, quod est negativum, perfecte tollantur sicque tota confusio ad nihilum redigatur. Quod si successerit, sufficiet litteram p ex sola apertura definire, sumendo scilicet $p = 4x$ vel $6x$ vel $7x$, prouti visum fuerit. Hoc ergo casu ob $x = 1$ dig. distantia focalis p tuto minor quam 9 dig. accipi poterit.

II. Cum igitur sumi possit $p < 9$ dig., ponere licebit $\mathfrak{t} = 1$ et campi apparentis semidiameter erit $= 859\,M$ minut. $= 29$ minut. Tum autem binas postremas lentes utrinque aeque convexas confici oportet, unde, si lentes ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, parentur, erit

$$\lambda''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2 = 1{,}6299,$$

at

$$\lambda'' = 1 + 0{,}6299\,(1 - 2\mathfrak{C})^2 = 10{,}9991.$$

III. Quia adeo capere liceret $p = 4$ dig., ne distantia focalis ultimae lentis fiat nimis parva, sufficiet statuere $\theta = 1$ atque hinc erit ultimum membrum nostrae formulae $= 0{,}00055$. Pro penultimo membro erit

$$\nu\,\mathfrak{C}\,(1 - \mathfrak{C}) = -\,0{,}8649$$

ideoque

$$\lambda'' + \nu\,\mathfrak{C}\,(1 - \mathfrak{C}) = 10{,}1342$$

ac propterea totum membrum $= 0{,}00047$. Quocirca ambo postrema membra iunctim sumta dabunt $0{,}00102$.

IV. Pro prima autem lente erit

$$\nu\,\mathfrak{C}\,(1 - \mathfrak{C}) = -\,0{,}2323,$$

unde totum membrum inde natum fiet

$$= 0{,}00123\,\lambda - 0{,}00028.$$

Pro secunda autem lente erit

$$\frac{(1+\theta)^3}{\theta^3}\cdot\lambda' + \frac{\nu(1+\theta)}{\theta^2} = 8\,\lambda' + 2\nu$$

hincque totum membrum erit

$$= 0{,}0232\,\lambda' + 0{,}00135.$$

V. His ergo inventis litteras λ et λ' ita definiri oportet, ut fiat

$$0{,}0283 = 0{,}00123\,\lambda + 0{,}0232\,\lambda' + 0{,}00209$$

sive

$$0{,}0262 = 0{,}00123\,\lambda + 0{,}0232\,\lambda',$$

ubi notandum litteras λ et λ' unitate minores esse non posse; statuamus ergo $\lambda' = 1$ et esse debebit $0{,}0030 = 0{,}00123\,\lambda$ hincque

$$\lambda = \frac{0{,}00300}{0{,}00123} = \frac{300}{123} = 2{,}44.$$

Hinc igitur consequimur sequentem constructionem:

TELESCOPIUM CATADIOPTRICUM PRO MULTIPLICATIONE $m = 50$

65. Ex iis, quae modo evolvimus, obtinemus sequentes determinationes:

I. Pro speculo principali, quod exactissime secundum figuram parabolicam elaborari debet, distantia focalis accipi posset $p = 4$ dig. Interim tamen litteram p quasi indeterminatam in calculo retineamus.

Semidiameter aperturae huius speculi $x = 1$ dig. et semidiameter foraminis $y = \delta x = \frac{1}{4}$ dig.

II. Ante hoc speculum ad intervallum $= 0{,}8p$ constituatur speculum secundum QBQ, pro quo debet esse distantia focalis $q = -0{,}24p$, ita ut hoc speculum debeat esse convexum et ad figuram sphaericam exacte elaboratum. Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}$ dig.

III. Post hoc speculum in ipso foramine speculi maioris ad distantiam $BC = \frac{4}{5}p = 0{,}8p$ constituatur lens prima ex vitro communi $n = 1{,}55$ paranda, cuius distantia focalis sit $r = 0{,}247p$, capiendo

$$\text{radium faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{r}{1{,}4285} = 0{,}1729\,p \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{r}{0{,}3896} = 0{,}6339\,p. \end{cases}$$

Semidiameter aperturae $=\frac{1}{4}$ dig. ut foraminis et intervallum usque ad lentem secundam

$$=0{,}2381\,p=CD.$$

IV. Pro secunda lente SDS, cuius distantia focalis $s=0{,}0427\,p$, ob $\mathfrak{D}=\frac{1}{2}$ et $\lambda'=1$ capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{s}{\sigma-\frac{1}{2}(\sigma-\varrho)}=\dfrac{s}{0{,}9090}=0{,}04697\,p\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{s}{\varrho+\frac{1}{2}(\sigma-\varrho)}=\dfrac{s}{0{,}9090}=0{,}04697\,p.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter

$$=\frac{x}{PQR}=\frac{1}{26{,}775}=0{,}037\text{ dig.}$$

et intervallum ad tertiam lentem

$$DE=0{,}1084\,p.$$

V. Pro tertia lente, cuius distantia focalis $t=0{,}0571\,p$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei}=0{,}0628\,p.$$

Eius aperturae semidiameter $=\frac{1}{4}t=0{,}0142\,p$ et intervallum ad quartam lentem $=0{,}0382\,p$.

VI. Pro quarta lente, cuius distantia focalis $u=0{,}0764\,p$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei}=0{,}0840\,p.$$

Eius aperturae semidiameter $=\frac{1}{4}u=0{,}0191\,p$ et intervallum ad oculum $=0{,}58\,u=0{,}0443\,p$.

VII. Tubi ergo anterioris ambo specula continentis longitudo aliquanto maior est quam $0{,}8\,p$. Tubi vero posterioris lentes continentis longitudo erit $=0{,}4292\,p$ sicque totius instrumenti longitudo erit circiter $=1{,}4292\,p$, ita ut sumto $p=5$ dig. haec longitudo futura sit 7 dig.

VIII. Campi autem apparentis semidiameter iam supra indicata est $= 29$ minut., quae pro multiplicatione $m = 50$ satis est notabilis.

IX. Diaphragmatis sive septis in locis imaginum realium collocandis hic plane non erit opus, cum secunda lens tam exiguam habeat aperturam, quae radios peregrinos omnes excludat. Interim tamen, si in loco primae imaginis realis, quae post primam lentem cadit, ad intervallum $\gamma = 0{,}1526p$ collocetur diaphragma, eius foraminis semidiameter sumi debet $= 0{,}127p$; hoc vero diaphragmate vix erit opus, cum radiorum peregrinorum in lentem primam incidentium imago cadat post hanc lentem ad distantiam $r = 0{,}247p$, dum ea radiorum propriorum cadit ad distantiam $\gamma = 0{,}1526p$, quod discrimen satis est notabile.

X. Si quis metuat, ne a tam exiguo speculo, cuius semidiameter est $= 1$ dig. quodque adeo foramine est pertusum, nimis exigua luminis copia ad oculum transmittatur, is tantum mensuram digitorum pro lubitu augeat; nihil enim impedit, quominus mensura digiti adeo duplicetur. Hoc enim modo claritas ad lubitum augeri poterit neque tamen instrumenti longitudo, quae per se est parva, ob hanc causam enormis evadet.

EXEMPLUM 2

Pro multiplicatione $m = 100$

66. Statuamus hic $\delta = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = \frac{1}{5}$, ut sit $\varepsilon m = 20$. Tum vero sumamus $i = 4$, quo tubus brevior evadat, atque habebimus

$$P = \frac{1}{\varepsilon} = 5, \quad Q = i = 4, \quad R = -k = -\frac{43}{68} = -0{,}63235$$

ob

$$3i^2 - 4i(1-\varepsilon) - 4\varepsilon = 34\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad 4\varepsilon m - 3i = 68,$$

porro

$$S = -k' = -\frac{680}{43} = -15{,}814 \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Unde fit

$$PQ = 20, \quad PQR = -12{,}647, \quad PQRS = 200 \quad \text{et} \quad PQRST = 100.$$

Reliquae vero litterae reperientur

$$\mathfrak{B} = \frac{16}{13} = 1{,}231, \quad B = -\frac{16}{3} = -5{,}333,$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{17 \cdot 21}{383} = -0{,}93211\ (9{,}9694694), \quad C = -\frac{357}{740} = -0{,}4824\ (9{,}6834398)$$

et

$$\mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad D = \theta,$$

$$\mathfrak{E} = \frac{17 \cdot 783}{2 \cdot 5 \cdot 383} = 3{,}4755\ (0{,}5410119)^{1)}, \quad E = -\frac{3{,}4755}{2{,}4755} = -1{,}4039\ (0{,}1473490),$$

unde colligimus

$$\begin{aligned} &\log. B\mathfrak{C} = 0{,}6964410, && \log. BC\mathfrak{E} = 0{,}9514233, \\ &\log. BC = 0{,}4104114, && \log. BCE = 0{,}5577604(-). \end{aligned}$$

His praemissis elementa nostra erunt

$$\begin{aligned} &\alpha = p, && b = -\frac{\alpha}{P} = -\frac{1}{5}\alpha = -0{,}2p, \\ &\beta = Bb = 1{,}0666p, && c = -0{,}2666p, \\ &\gamma = Cc = 0{,}1286p, && d = 0{,}20344p, \\ &\delta = Dd = 0{,}20344\,\theta p, && e = 0{,}01286\,\theta p, \\ &\varepsilon = Ee = -0{,}01806\,\theta p, && f = 0{,}03612\,\theta p, \end{aligned}$$

unde statim obtinemus intervalla

$$AB = 0{,}8p, \quad BC = 0{,}8p, \quad CD = 0{,}3320p,$$
$$DE = 0{,}2163\,\theta p, \quad EF = 0{,}01806\,\theta p.$$

Distantiae vero focales ita se habebunt:

$$q = \mathfrak{B}b = -0{,}246p, \quad r = \mathfrak{C}c = 0{,}2485p,$$

$$s = \mathfrak{D}d = 0{,}2034\frac{\theta}{1+\theta}p, \quad t = \mathfrak{E}e = 0{,}0447\,\theta p, \quad u = f = 0{,}0361\,\theta p.$$

Praeterea vero erit $\omega = 0{,}3\,\mathfrak{t} = -\mathfrak{r}$, unde aequatio $\mathfrak{r}r = 4\delta x$ abit in hanc:

1) Vide notam 1 p. 176. E. Ch.

$0{,}07455\,tp = x$; quare, si sumatur $x = 2$ dig., hinc fiet $t = \frac{2}{0{,}07455\,p}$. Dummodo igitur fuerit $p < 26$ dig., capere licebit $t = 1$ binasque ultimas lentes utrinque aeque convexas fieri oportet. Verum si etiam hic liceat totam confusionem ad nihilum redigere, ob $x = 2$ dig. sumi adeo posset $p = 8$ dig., etiamsi praestet ipsi p maiorem valorem tribuere; unde patet tuto assumi posse $\theta = 1$.

Praeterea vero pro campo apparente habebitur $M = \frac{34}{1915}t$; quare, si capi poterit $t = 1$, semidiameter campi apparentis erit

$$\Phi = \frac{859 \cdot 34}{1915}\text{ min.} = 15\tfrac{1}{4}\text{ min.}$$

et pro loco oculi habebimus

$$O = 0{,}563\,u = 0{,}02037\,p.$$

Denique ut tota confusio evanescat, primum speculum perfecte parabolicum confici necesse est atque tum esse debebit

$$\frac{\varepsilon(1+B)(1-B)^2}{8B^3} = \frac{\mu}{B^3\mathfrak{C}^3PQ}(\lambda + \nu\,\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})) - \frac{\mu}{B^3C^3PQR}(8\lambda' + 2\nu)$$
$$+ \frac{\mu}{B^3C^3\mathfrak{E}^3PQRS}(\lambda'' + \nu\,\mathfrak{E}(1-\mathfrak{E})) - \frac{\mu}{B^3C^3E^3m}\lambda''',$$

ubi ut ante, si refractio vitri sit $n = 1{,}55$, erit

$$\lambda''' = 1{,}6299$$

et

$$\lambda'' = 1 + 0{,}6299\,(1 - 2\mathfrak{E})^2 = 23{,}308,$$

unde aequatio nostra praebebit

$$\begin{aligned} 0{,}02864 = 0{,}000382\,\lambda &- 0{,}00016 \\ + 0{,}034843\,\lambda' &+ 0{,}00200 \\ &- 0{,}00001 \\ &+ 0{,}00015 \\ &+ 0{,}00032 \end{aligned}$$

sive

$$0{,}02634 = 0{,}000382\,\lambda + 0{,}03484\,\lambda',$$

quae aequalitas, quia λ et λ' unitate minores esse nequeunt, subsistere non

potest. Quamobrem coacti sumus ipsi θ maiorem valorem tribuere; sit ergo $\theta = 2$ et nostra aequatio fiet

$$\begin{aligned} 0{,}02809 = 0{,}000382\,\lambda &- 0{,}00016 \\ +\, 0{,}01143\;\; \lambda' &+ 0{,}00075 \\ &- 0{,}00001 \\ &+ 0{,}00002 \\ &+ 0{,}00004 \end{aligned}$$

sive

$$0{,}02744 = 0{,}000382\,\lambda + 0{,}01143\,\lambda'^{\,1)}.$$

Ne hinc valor ipsius λ prodeat nimis magnus, sumamus $\lambda' = 2$ eritque $0{,}00458 = 0{,}000382\,\lambda$ hincque $\lambda = \frac{4580}{382} = 12$. Sin autem sumsissemus $\lambda' = 2\frac{1}{3}$, obtinuissemus $\lambda = \frac{770}{382} = 2$.

Utamur ergo his postremis valoribus $\lambda = 2$ et $\lambda' = 2\frac{1}{3}$ existente $\theta = 2$ hincque $\mathfrak{D} = \frac{2}{3}$; unde colligitur sequens

CONSTRUCTIO TELESCOPII CATADIOPTRICI PRO $m = 100$

67. Haec ergo constructio constabit sequentibus determinationibus:

I. Primum speculum perfecte secundum figuram parabolicam elaboretur, cuius distantia focalis sit $= p$, quam ad minimum 8 dig. statui oportet; eius aperturae semidiameter $= x = 2$ dig., foraminis autem semidiameter $= \frac{1}{2}$ dig. et distantia a speculo minore $AB = 0{,}8p$.

II. Minus speculum figuram sphaericam habeto, cuius distantia focalis sit $q = -0{,}246p$ et semidiameter aperturae $= \frac{1}{2}$ dig. indeque distantia ad primam lentem $BC = 0{,}8p$.

1) Huius membri accuratus valor est $0{,}014699\,\lambda'$, aequatio autem

$$0{,}02744 = 0{,}000382\,\lambda + 0{,}014699\,\lambda'$$

existente $\lambda' = 2$ praebet negativum valorem quantitatis λ; θ debet igitur sumi maior, ex. gr. $\theta = 3$. E. Ch.

III. Pro prima lente, cuius distantia focalis $r = 0{,}2485p$, numeri vero

$$\mathfrak{C} = -0{,}9321 \quad \text{et} \quad \lambda = 2,$$

capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma-\varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda-1)}} = \dfrac{r}{2{,}9666 - 0{,}9051} = 0{,}1205p\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma-\varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda-1)}} = \dfrac{r}{-1{,}1485 + 0{,}9051} = -1{,}0210p.\end{cases}$$

Semidiameter aperturae foramini aequalis $= \frac{1}{2}$ dig. et distantia ad lentem secundam $CD = 0{,}3320p$.

IV. Pro secunda lente, cuius distantia focalis $s = 0{,}1356p$ et numeri

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \lambda' = 2{,}3333,$$

capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{s}{\sigma - \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{s}{1{,}7147} = 0{,}0791p\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{s}{\varrho + \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{s}{0{,}1034} = 1{,}3114p.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{x}{PQR} = 0{,}16$ dig. et distantia a lente tertia $DE = 0{,}4326p$.

V. Pro lente tertia, cuius distantia focalis $t = 0{,}0894p$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei} = 0{,}0983p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}t = 0{,}0224p$ et distantia ad lentem quartam $EF = 0{,}03612p$.

VI. Pro lente quarta, cuius distantia focalis $u = 0{,}0722p$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei} = 0{,}0794p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}u = 0{,}0181p$ et distantia oculi

$$O = 0{,}563u = 0{,}0204p.$$

VII. Longitudo ergo tubi prioris aliquanto maior erit quam $0,8p$, tubi autem affixi longitudo $= 0,8211\,p$ hincque totius instrumenti circiter $= 1,6211\,p$.

VIII. Campi apparentis semidiameter $= 15\frac{1}{4}$ min., et quae supra observavimus, praeterea etiam hic locum habent.

EXEMPLUM 3

Pro multiplicatione $m = 150$

68. Maneant ut ante $\delta = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = \frac{1}{5}$, ut sit $\varepsilon m = 30$; sumatur autem $i = 5$, et ut claritate sufficiente fruamur, sit $x = 3$ dig., ut sit $y = \frac{3}{4}$ dig., et hinc colligimus

$$P = 5, \quad Q = 5, \quad R = -k = -0,6652,$$
$$S = -k' = -18,040 \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2};$$

hinc

$$PQ = 25, \quad PQR = -16,63, \quad PQRS = 300 \quad \text{et} \quad PQRST = 150;$$

inde vero reliquae litterae reperientur

$$\mathfrak{B} = \frac{5}{4} = 1,25, \quad B = -5,$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{33,28}{33,320} = -0,9986\,(9,9994001) \qquad C = -\frac{0,9986}{1,9986} = -0,49966\,(9,6986742),$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\theta}{1+\theta}, \quad D = \theta,$$

$$\mathfrak{E} = \frac{118,32}{33,320} = 3,5504\,(0,5502750)^{1)}, \quad E = -\frac{3,5504}{2,5504} = -1,3921\,(0,1436667),$$

unde colligimus

$$\log B\mathfrak{C} = 0,6983701, \quad \log BC = 0,3976442,$$
$$\log BC\mathfrak{E} = 0,9479192, \quad \log BCE = 0,5413109\,(-).$$

His praemissis elementa nostra erunt

1) Vide notam 1 p. 176. E. Ch.

$$\alpha = p, \quad b = -0{,}2p, \quad \beta = p, \quad c = -0{,}2p, \quad \gamma = 0{,}099932p,$$
$$d = 0{,}15023p, \quad \delta = 0{,}15023\,\theta p, \quad e = 0{,}00833\,\theta p.$$
$$\varepsilon = -0{,}01159\,\theta p, \quad f = +0{,}02318\,\theta p,$$

unde colligimus intervalla

$$AB = 0{,}8p = BC, \qquad CD = 0{,}25016\,p,$$
$$DE = 0{,}15856\,\theta p, \qquad EF = 0{,}01159\,\theta p.$$

Distantiae vero focales ita se habebunt:

$$q = -0{,}25p, \quad r = 0{,}19972p, \quad s = 0{,}15023\frac{\theta}{1+\theta}p,$$
$$t = 0{,}02956\,\theta p \quad \text{et} \quad u = 0{,}02318\,\theta p.$$

Porro est $\omega = \frac{1}{4}\mathfrak{t} = -\mathfrak{r}$, unde aequatio $\mathfrak{r}r = 4\delta x$ dabit

$$\mathfrak{t} = \frac{12}{0{,}19972\,p} = \frac{60}{p} \quad \text{proxime;}$$

dum ergo p sit < 60, tuto sumere licebit $\mathfrak{t} = 1$, et quia tum erit $M = \frac{2}{166{,}630}$, hinc semidiameter campi

$$\Phi = 10\tfrac{1}{3} \text{ min.}$$

et pro loco oculi

$$O = 0{,}555\,u = 0{,}01285\,\theta p.$$

Denique si primum speculum conficiatur parabolicum, omnis confusio tolletur huic aequationi satisfaciendo

$$0{,}0288 = 0{,}00030144\,\lambda - 0{,}00013994 + 0{,}0036177\frac{\lambda'(1+\theta)^3}{\theta^3}$$
$$+ 0{,}00084146\frac{1+\theta}{\theta^2} + \frac{0{,}0001002}{\theta^3} + \frac{0{,}00024176}{\theta^3}$$

sive

$$0{,}0289399 = 0{,}00030144\,\lambda + 0{,}0036177\frac{(1+\theta)^3}{\theta^3}\lambda' + 0{,}00084146\frac{1+\theta}{\theta^2} + \frac{0{,}0003419}{\theta^3}.$$

Hic patet statim sumi non posse $\theta = 1$; tentetur ergo positio $\theta = \frac{3}{2}$ eritque

$$0{,}0289399 = 0{,}00030144\,\lambda + 0{,}0167487\,\lambda' + 0{,}00093495 + 0{,}0001013$$

sive

$$0{,}0279037 = 0{,}00030144\,\lambda + 0{,}0167487\,\lambda';$$

quare, si hic statuatur $\lambda' = 1$, fiet

$$\lambda = \frac{0,01115500}{0,00030144} = \frac{11155}{301} = 37,$$

sin autem sumamus $\lambda = 1$, fiet

$$\lambda' = \frac{0,0276023}{0,0167487} = \frac{276023}{167487} = 1,648.$$

Sin autem λ statueretur 2 vel 3, valor ipsius λ' vix inde mutaretur, unde pro usu practico praestare videtur, si ipsi λ' certus quidam valor tribuatur; quia enim tum ob levissimos errores λ multum variare potest, plures lentes pro variis valoribus λ parari poterunt, ex quibus aptissimam experientia declarabit. Statuamus ergo $\lambda' = \frac{3}{2}$ ac reperietur

$$\lambda = \frac{0,0027807}{0,0003014} = \frac{27807}{3014} = 9,$$

unde in praxi ternae lentes parari poterunt ex valoribus $\lambda = 8$, $= 9$, $= 10$.

Posito ergo $\theta = \frac{3}{2}$, ut sit $\mathfrak{D} = \frac{3}{5}$, sumatur $\lambda' = \frac{3}{2}$ et $\lambda = 9$, unde colligitur sequens

CONSTRUCTIO TELESCOPII CATADIOPTRICI PRO $m = 150$

69. Haec constructio sequentibus determinationibus continetur:

I. Speculum obiectivum accuratissime secundum figuram parabolicam elaboretur, cuius distantia focalis minor non sit duodecim digitis, quam hic littera p designemus. Eius aperturae semidiameter vero sit $x = 3$ dig., foraminis vero semidiameter $= \frac{3}{4}$ dig. et distantia ad speculum minus $AB = 0,8p$.

II. Speculum minus exactissime ad figuram sphaericam elaboretur, cuius distantia focalis sit $q = -0,25p$, quippe quod est convexum. Eius aperturae semidiameter $= \frac{3}{4}$ dig. et distantia ad primam lentem $BC = 0,8p$.

III. Pro prima lente, cuius distantia focalis est $r = 0,19972p$ numerique $\mathfrak{C} = -0,9986$ et $\lambda = 9$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma-\varrho) \pm \tau\sqrt{8}} = \dfrac{r}{0{,}5025} = 0{,}39745\,p\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma-\varrho) \mp \tau\sqrt{8}} = \dfrac{r}{1{,}3156} = 0{,}15181\,p.\end{cases}$$

Sin autem sumeretur $\lambda = 10$, prodiret

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{r}{0{,}3468} = 0{,}57589\,p\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{r}{1{,}4713} = 0{,}13574\,p,\end{cases}$$

unde concludimus in genere sumi posse

$$\text{radium faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= (0{,}39745 \pm 0{,}17844\,\omega)p\\ \text{posterioris} &= (0{,}15181 \mp 0{,}01607\,\omega)p,\end{cases}$$

ubi ω per experientiam definiri conveniet.

Huius autem lentis semidiameter aperturae $= \frac{3}{4}$ dig. et distantia ad lentem secundam $CD = 0{,}25016\,p$.

IV. Pro secunda lente, cuius distantia focalis $s = 0{,}090138\,p$ et numeri $\mathfrak{D} = \frac{3}{5}$ et $\lambda' = 1{,}5$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{s}{\sigma - \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) \pm \tau\sqrt{0{,}5}} = \dfrac{s}{0{,}1254} = 0{,}71880\,p\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{s}{\varrho + \mathfrak{D}(\sigma-\varrho) \mp \tau\sqrt{0{,}5}} = \dfrac{s}{1{,}69281} = 0{,}05325\,p\,^{1)}.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{x}{PQR} = \frac{2}{11}$ dig. $= 0{,}18$ dig. et distantia ad lentem tertiam $DE = 0{,}23784\,p$.

V. Pro tertia lente, cuius distantia focalis $t = 0{,}04434\,p$, sumatur

$$\text{radius faciei utriusque} = 0{,}048774\,p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}t = 0{,}01108\,p$ et distantia ad lentem quartam $EF = 0{,}01738\,p$.

1) Editio princeps: $-\frac{s}{0{,}0818} = -2{,}8864\,p$. Correxit E. Ch.

VI. Pro lente quarta, cuius distantia focalis $u = 0{,}03477\,p$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei} = 0{,}03824\,p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}u = 0{,}00869\,p$ et distantia ad oculum $O = 0{,}555\,u = 0{,}01929\,p$.

VII. Longitudo ergo tubi prioris specula continentis aliquantum superabit $0{,}8\,p$, posterioris vero erit $= 0{,}52467\,p$, ita ut totius instrumenti longitudo sit circiter $= 1{,}32467\,p$. Tum vero semidiameter campi apparentis erit $= 10\frac{1}{3}$ minut.

SCHOLION

70. Remedium in subsidium praxeos, quod hic pro prima lente attulimus, etiam facile ad exempla praecedentia accommodatur. Ponamus enim pro hac lente inventos esse radios facierum f et g et nunc quaestio eo redit, quomodo hos radios variari oporteat, ut distantia focalis maneat eadem. Ponatur prior $= f + x$, posterior $= g - y$ et necesse est, ut fiat

$$\frac{fg}{f+g} = \frac{(f+x)(g-y)}{f+g+x-y},$$

unde sumto x pro lubitu sive negative sive positive capi debebit

$$y = \frac{g^2 x}{f^2 + (f+g)x};$$

quare, cum x et y sint satis parva, erit $y = \frac{g^2 x}{f^2}$ sive

$$x : y = f^2 : g^2,$$

ita ut posito $x = f^2\omega$ futurum sit $y = g^2\omega$. Pro lente ergo prima, cuius radii supra inventi sint f et g, alias successive substitui conveniet, quarum radii sint $f \pm f^2\omega$ et $g \mp g^2\omega$. Deinde hic etiam notasse iuvabit pro lente prima minorem aperturam sufficere posse, quam hic assignavimus foramini aequalem. Sufficiet enim apertura, cuius semidiameter $= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r = \frac{1}{16}r = 0{,}01248\,p$; unde, si $p = 12$ dig., ista semidiameter foret $= 0{,}1497$ dig. $= \frac{1}{7}$ dig. circiter; ac si adeo esset $p = 20$ dig., foret ista semidiameter $= \frac{1}{4}$ dig.,

ex quo concludimus sufficere, si huic lenti apertura tribuatur, cuius semidiameter sit $\frac{1}{4}$ dig.; quo pacto ingentem copiam radiorum peregrinorum ab introitu arcebimus sicque reliqui eo felicius a secunda lente excludentur, etsi eius apertura non tam est exigua ut in praecedentibus exemplis, cuius rei ratio est, quod litteram i in multo minore ratione auximus quam multiplicationem m; quam ob causam in sequente exemplo litterae i multo maiorem valorem tribuemus, quia inde nihil aliud est metuendum nisi exigua diminutio campi.

EXEMPLUM 4

Pro multiplicatione $m = 200$

71. Manentibus litteris $\delta = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = \frac{1}{5}$ capiatur $i = 10$, et ut sufficiens claritatis gradus obtineatur, sumamus $x = 5$ dig., ut sit semidiameter foraminis $= \delta x = \frac{5}{4}$ dig. et $\varepsilon m = 40$. Hinc ergo colliguntur valores

$$P = 5, \quad Q = 10, \quad R = -k = -0{,}8221,$$
$$S = -k' = -9{,}7312 \quad \text{et} \quad T = \tfrac{1}{2}$$

hincque

$$PQ = 50, \quad PQR = -41{,}105, \quad PQRS = 400 \quad \text{et} \quad PQRST = 200;$$

reliquae vero litterae ita determinabuntur:

$$\mathfrak{B} = \tfrac{40}{31} = 1{,}2903, \quad B = -\tfrac{40}{9} = -4{,}4444,$$
$$\mathfrak{C} = -1{,}0153\ (0{,}0066052)(-), \quad C = -0{,}50381\ (9{,}7022655)(-),$$
$$\mathfrak{E} = 3{,}2841\ (0{,}5164093)^{1)}, \quad E = -1{,}4377\ (0{,}1576942),$$

unde colliguntur sequentes logarithmi:

$$\log. B\mathfrak{C} = 0{,}6544183, \qquad \log. BC = 0{,}3500786,$$
$$\log. BC\mathfrak{E} = 0{,}8664879, \quad \log. BCE = 0{,}5077728\ (-);$$

hinc elementa sequenti modo definientur:

---

1) Vide notam 1 p. 176. E. Ch.

$$\begin{array}{llll} \alpha = p, & b = -0{,}2p, & \beta = & 0{,}8889p, \\ & c = -0{,}0889p, & \gamma = & 0{,}04478, \\ & d = \quad 0{,}054473p, & \delta = & 0{,}054473\,\theta p, \\ & e = \quad 0{,}005598\,\theta p, & \varepsilon = & -0{,}008048\,\theta p \end{array}$$

et

$$f = 0{,}016096\,\theta p,$$

ex quibus colliguntur intervalla

$$AB = 0{,}8p = BC, \qquad CD = 0{,}09925p,$$

$$DE = 0{,}060071\,\theta p, \qquad EF = 0{,}008048\,\theta p,$$

distantiae vero focales

$$q = -0{,}2581p, \qquad r = 0{,}09025p,$$

$$s = 0{,}05447\frac{\theta}{1+\theta}p, \qquad t = 0{,}01838\,\theta p$$

et

$$u = 0{,}016096\,\theta p.$$

Porro est $\omega = -\mathfrak{r} = \frac{3}{8}\mathfrak{t}$; unde aequatio $\mathfrak{r}r = 4\delta x$ dabit $\mathfrak{t} = \frac{160}{p}$ dig., unde patet, dummodo p minor sit quam 160 dig., tuto sumi posse $\mathfrak{t} = 1$; at si liceat confusionem ad nihilum redigere, adeo sumere licebit $p = 20$ dig.; tum autem fiet $M = \frac{1}{120}$, unde semidiameter campi erit $\frac{859}{120}$ min. $= 7\frac{1}{6}$ min. Praeterea vero pro loco oculi habebitur $O = 0{,}6u$.

Tantum igitur superest, ut confusionem ad nihilum redigamus, quod fiet hac aequatione:

$$0{,}029074 = 0{,}00020418\,\lambda - 0{,}0000972 + 0{,}0020329\frac{(1+\theta)^3}{\theta^3}\lambda'$$

$$+ 0{,}00047286\frac{1+\theta}{\theta^2} + \frac{0{,}000111}{\theta^3} + \frac{0{,}00000116}{\theta^3}$$

sive

$$0{,}029171 = 0{,}00020418\,\lambda + 0{,}0020329\frac{(1+\theta)^3}{\theta^3}\lambda'$$

$$+ 0{,}0004729\frac{1+\theta}{\theta^2} + \frac{0{,}0001122}{\theta^3},$$

ubi iam nihil obstat, quominus statuatur $\theta = 1$, hincque habebimus

$$0{,}028113 = 0{,}0002042\,\lambda + 0{,}016264\,\lambda'.$$

Ne igitur hinc valor ipsius λ prodeat nimis magnus, commode statui poterit $\lambda' = 1\frac{1}{2}$ atque reperietur $\lambda = \frac{3717}{204} = 18$ proxime. Commodius vero erit sumere $\lambda' = 1\frac{2}{3}$, unde fiet $\lambda = \frac{1006}{204} = 5$. Retineamus igitur valores $\theta = 1$, $\lambda' = 1\frac{2}{3}$, ut fiat $\lambda = 5$, cui adiungere poterimus valores finitimos $\lambda = 4$ et $\lambda = 6$, quo praxi melius consulatur; atque hinc colligetur sequens

CONSTRUCTIO TELESCOPII CATADIOPTRICI PRO MULTIPLICATIONE $m = 200$

72. Statuamus hic ut hactenus distantiam focalem speculi principalis $= p$, quam, ut vidimus, minorem quam 20 dig. assumi non convenit. Praestabit autem eam haud mediocriter maiorem assumere.

I. Speculum igitur primum adcuratissime forma parabolica elaboretur, cuius distantia focalis sit $= p$; eius aperturae semidiameter $x = 5$ dig. et semidiameter foraminis $y = 1\frac{1}{4}$ dig. Distantia vero ad speculum minus $AB = 0{,}8p$.

II. Pro secundo speculo minore convexo eius figura accuratissime sphaerice elaboretur, ut sit eius distantia focalis $q = -0{,}2581p$. Eius aperturae semidiameter $= 1\frac{1}{4}$ dig. et distantia ad primam lentem in foramine $= BC = 0{,}8p$.

III. Pro lente prima, cuius distantia focalis $r = 0{,}09025p$ et numeri $\mathfrak{C} = -1{,}0153$ et $\lambda = 5$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{4}} = \dfrac{r}{3{,}0861 \mp 1{,}8102} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{4}} = \dfrac{r}{-1{,}2680 \pm 1{,}8102},\end{cases}$$

hinc

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = 0{,}070734p \\ \text{posterioris} = 0{,}16639p.\end{cases}$$

Sin autem sumeremus $\lambda = 4$, prodiret

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{r}{3{,}0861 \mp 1{,}5677} = 0{,}05944p \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{-1{,}2680 \pm 1{,}5677} = 0{,}30113p.\end{cases}$$

At si sumeretur $\lambda = 6$, foret

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{r}{3{,}0861 \mp 2{,}0239} = 0{,}08496\,p\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{r}{-1{,}2680 \pm 2{,}0239} = 0{,}11940\,p.\end{cases}$$

Ex quibus casibus deducimus in subsidium praxeos sequentes conclusiones:

Prior: Si $\lambda = 5 - \omega$ denotante ω fractionem arbitrariam, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= (0{,}07073 - 0{,}01129\,\omega)p\\ \text{posterioris} &= (0{,}16639 + 0{,}13474\,\omega)p.\end{cases}$$

Posterior: Sin autem $\lambda = 5 + \omega$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= (0{,}07073 + 0{,}01423\,\omega)p\\ \text{posterioris} &= (0{,}16639 - 0{,}04699\,\omega)p.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= 1\frac{1}{4}$ dig. et distantia ad lentem secundam $CD = 0{,}09925\,p$.

IV. Pro secunda lente, cuius distantia focalis est $s = 0{,}02723\,p$ et numeri $\mathfrak{D} = \frac{1}{2}$ et $\lambda' = 1{,}6667$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{s}{\frac{1}{2}(\sigma+\varrho) \mp \tau\sqrt{0{,}6667}} = \dfrac{s}{0{,}9090 \mp 0{,}7390}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{s}{\frac{1}{2}(\sigma+\varrho) \pm \tau\sqrt{0{,}6667}} = \dfrac{s}{0{,}9090 \pm 0{,}7390}\end{cases}$$

seu

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= 0{,}01652\,p\\ \text{posterioris} &= 0{,}16018\,p.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{x}{PQR} = \frac{1}{8}$ dig. et distantia a lente tertia $DE = 0{,}06007\,p$.

V. Pro lente tertia, cuius distantia focalis $t = 0{,}01838\,p$, capiatur

$$\text{radius faciei utriusque} = 0{,}02022\,p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}t = 0{,}00459\,p$ et distantia a lente quarta $EF = 0{,}007798\,p$.

VI. Pro lente quarta, cuius distantia focalis $u = 0{,}015596p$, capiatur

$$\text{radius faciei utriusque} = 0{,}01715p.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}u = 0{,}0039p$ et distantia ad oculum $= 0{,}6u = 0{,}00936p$.

VII. Hinc ergo longitudo tubi prioris erit quasi $= p$, quia maior esse debet quam $\frac{4}{5}p$, posterioris vero lentes continentis $= 0{,}17648p$, ita ut tota longitudo futura sit circiter $= 1{,}17648p$. Campi vero apparentis semidiameter erit $= 7\frac{1}{6}$ minut.

VIII. Si pro lente prima tantum ad claritatem spectemus, eius aperturae semidiameter deberet esse $= \frac{x}{PQ} = \frac{1}{10}$ dig., sin autem ad campum spectemus, haec semidiameter esse debet

$$= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r = \frac{3}{32}r = 0{,}00846p,$$

quae, si adeo esset $p = 40$ dig., fieret

$$0{,}3384 \text{ dig.} = \frac{1}{3} \text{ dig.}$$

Quare, cum semidiameter foraminis $= 1\frac{1}{4}$ dig., tuto oram huius lentis obtegere licebit, donec eius aperturae semidiameter fiat $= \frac{1}{3}$ dig., quo pacto radii peregrini iam maximam partem excludentur.

IX. Cum igitur ne opus quidem sit tantam magnitudinem primae lenti tribuere, ipsum foramen maioris speculi multo minus statuere licebit quam $1\frac{1}{4}$ dig. hocque modo, dum ipsum hoc speculum maiorem superficiem adipiscetur, etiam claritatis gradus augebitur, neque vero ideo necesse erit et minoris speculi magnitudinem imminuere, cum sufficiens radiorum copia in speculum cadere possit. Radii peregrini colliguntur post lentem C in distantia $r = 0{,}09025p$, radii vero proprii in distantia $\gamma = 0{,}0448p$.

X. Cum deinde prima imago realis post lentem primam cadat ad distantiam $\gamma = 0{,}0448p$, radii autem peregrini in hanc lentem incidentes suam imaginem forment ad distantiam $r = 0{,}09025p$, quae cum illa plus quam duplo sit maior, neutiquam metuendum erit, ne radii peregrini ad oculum usque propagentur.

DIOPTRICAE
PARS TERTIA,
CONTINENS
LIBRVM TERTIVM,
DE
CONSTRVCTIONE
MICROSCOPIORVM
TAM
SIMPLICIVM,
QVAM
COMPOSITORVM.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO.
ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LOND.

PETROPOLI,
Impensis Academiae Imperialis Scientiarum.
1771.

INDEX CAPITUM
IN TOMO III CONTENTORUM

SECTIO QUARTA

DE MICROSCOPIIS COMPOSITIS IN QUIBUS DUAE IMAGINES REALES OCCURRUNT

INTRODUCTIO

DE MICROSCOPIIS IN GENERE VEL PRAECEPTA GENERALIA CIRCA CONSTRUCTIONEM MICROSCOPIORUM

DEFINITIO

1. *Microscopium est instrumentum dioptricum, per quod obiecta propinqua multo maiora quam nudis oculis clare et distincte conspicere licet quodque una pluribusve lentibus super eodem axe constitutis constare solet.*

COROLLARIUM 1

2. Quod ad magnitudinem visam attinet, constat quidem idem obiectum, quo propius oculo admoveatur, sub eo maiore angulo apparere, verum si nimis fuerit propinquum, non sine maxima confusione conspici posse; quare ut obiectum distincte appareat, per microscopium ita debet repraesentari, quasi in iusta ab oculo distantia existeret. Hinc, quia oculus bene constitutus in distantia maxima distincte cernere solet, iustam illam distantiam, quam in primo libro posuimus $= l$, perinde ac in libro de telescopiis infinitam assumemus.

COROLLARIUM 2

3. Sive igitur microscopium una sive pluribus lentibus constet, eae ita dispositae esse debent, ut radii ex quolibet obiecti puncto per omnes lentes transmissi inter se reddantur paralleli ideoque pro lente oculari distantia determinatrix posterior fiat infinita; ex quo prior ipsi huius lentis distantiae focali erit aequalis.

COROLLARIUM 3

4. Multiplicatio autem, quam hic etiam littera m indicabimus, ita intelligi debet, ut obiectum, quod per microscopium contemplamur, nobis sub angulo m vicibus maiore appareat, quam si idem obiectum ad certam distantiam $= h$ remotum nudis oculis intueremur; quae distantia h vulgo octo digitorum assumi solet.

COROLLARIUM 4

5. Tum vero etiam lentes ita dispositas esse oportet, ut repraesentatio obiecti fiat satis distincta seu ut confusio certum quendam limitem non excedat, quem in finem semidiameter confusionis supra in genere inventa infra certum limitem deprimi debet; praeterea vero etiam hanc repraesentationem a margine colorato liberari conveniet ac, si fieri potest, omnis plane confusio a diversa radiorum refractione oriunda tolli debebit.

SCHOLION

6. Quando autem insignis multiplicatio desideratur, vix ac ne vix quidem effici poterit, ut claritas ad nostrum arbitrium determinetur, quemadmodum id in telescopiis est factum, sed plerumque pro maioribus multiplicationibus minore claritatis gradu contenti esse debemus; cui defectui autem remedium adferri solet ipsum obiectum forti lumine illuminando, quod, quia obiecta vicina in nostra sunt potestate, sine difficultate fieri potest. Deinde etiam in id maxime est incumbendum, ut haec instrumenta perinde ac telescopia notabilem campum apparentem obtineant seu ut non nimis exigua portio obiecti obtutui repraesentetur; quae portio non simpliciter per angulum ad lentem obiectivam formatum definiri potest, quia etiam minima portiuncula, si lenti obiectivae proxime admoveatur, ingentem angulum formare posset, sed vera semidiameter huius portionis visae, quam supra posuimus $= z$, in computum duci debet; denique etiam, cum distantia obiecti a lente obiectiva, quam ponimus $= a$, ab arbitrio nostro pendeat, haec tractatio plurimum a praecedente discrepabit, siquidem non solum gradus claritatis, sed etiam campi apparentis iudicium longe aliam investigationem requirat. Quamobrem in hoc primo capite formulas generales in primo libro inventas ad has circumstantias accommodari necesse erit, ante quam in ipsam constructionem microscopiorum inquiramus.

PROBLEMA 1

7. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, singula elementa exhibere, quibus tam lentium dispositio quam earum intervalla et distantiae focales determinantur.*

SOLUTIO

Distantias determinatrices singularum lentium sequenti modo conspectui exponamus:

Distantiae	Distantiae
obiecti a lente 1^{ma} $= a$,	a lente 1^{ma} ad imaginem 1^{mam} $= \alpha$
ab imagine 1^{ma} ad lentem 2^{dam} $= b$	a lente 2^{da} ad imaginem 2^{dam} $= \beta$
ab imagine 2^{da} ad lentem 3^{tiam} $= c$	a lente 3^{tia} ad imaginem 3^{tiam} $= \gamma$
ab imagine 3^{tia} ad lentem 4^{tam} $= d$	a lente 4^{ta} ad imaginem 4^{tam} $= \delta$
$\vdots$	$\vdots$
ab imag. penult. ad lent. ult. $= l$	a lente ult. ad imag. ult. $= \lambda = \infty$.

Hic scilicet intelligendum est a singulis lentibus imagines proiici, sive eae sint reales sive fictae, quarum discrimen, uti iam observavimus, in eo est situm, ut imagines reales intra lentem, a qua formantur, et lentem sequentem cadant, fictae vero extra hoc spatium.

Deinde vero, quo commodius haec elementa inter se comparemus, litteras maiusculas duplicis generis introducamus:

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \varepsilon = Ee \quad \text{etc.},$$

$$\frac{\alpha}{b} = -P, \quad \frac{\beta}{c} = -Q, \quad \frac{\gamma}{d} = -R, \quad \frac{\delta}{e} = -S \quad \text{etc.},$$

ubi litterarum A, B, C, D etc. ultima sit $L = \infty$, litterarum vero P, Q, R etc. ultima sit $= Z$ intervallo inter binas ultimas lentes respondens.

His litteris introductis omnia elementa sequenti modo per primum a exprimentur:

$$\alpha = Aa, \quad \beta = -\frac{AB}{P}\cdot a, \quad \gamma = \frac{ABC}{PQ}\cdot a, \quad \delta = -\frac{ABCD}{PQR}\cdot a \quad \text{etc.},$$

$$b = -\frac{A}{P}\cdot a, \quad c = \frac{AB}{PQ}\cdot a, \quad d = -\frac{ABC}{PQR}\cdot a, \quad e = \frac{ABCD}{PQRS}\cdot a \quad \text{etc.}$$

et litterarum b, c, d etc. ultima

$$l = \mp \frac{ABC\ldots K}{PQR\ldots Z}\cdot a$$

et litterarum α, β, γ etc. ultima

$$\lambda = \pm \frac{ABC\ldots L}{PQR\ldots Z}\cdot a = \infty,$$

ex quibus intervalla lentium ita ordine repraesentantur:

$$\begin{aligned}
&\text{Primum} && \alpha + b = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right),\\
&\text{secundum} && \beta + c = -\frac{AB}{P}a\left(1 - \frac{1}{Q}\right),\\
&\text{tertium} && \gamma + d = \frac{ABC}{PQ}a\left(1 - \frac{1}{R}\right),\\
&\text{quartum} && \delta + e = -\frac{ABCD}{PQR}a\left(1 - \frac{1}{S}\right) \text{ etc.};
\end{aligned}$$

quae cum omnia debeant esse positiva, etiam quodlibet per praecedens divisum quotum dare debet positivum sicque esse oportet

$$1.\quad -\frac{B}{Q}\cdot\frac{Q-1}{P-1} > 0, \qquad 2.\quad -\frac{C}{R}\cdot\frac{R-1}{Q-1} > 0,$$

$$3.\quad -\frac{D}{S}\cdot\frac{S-1}{R-1} > 0, \qquad 4.\quad -\frac{E}{T}\cdot\frac{T-1}{S-1} > 0$$

etc.

Quo denique distantias focales singularum lentium, quas litteris minusculis p, q, r, s, t etc. indicamus, concinnius exprimamus, litteras maiusculas germanicas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. introducamus, ita ut sit

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}, \quad \mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}, \quad \mathfrak{C} = \frac{C}{C+1}, \quad \mathfrak{D} = \frac{D}{D+1} \quad \text{etc.}$$

hincque vicissim

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}}, \quad D = \frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}} \quad \text{etc.},$$

ita ut pro ultima harum litterarum sit

$$\mathfrak{L} = \frac{L}{L+1} = 1 \quad \text{ob} \quad L = \infty \quad \text{et} \quad L = \frac{\mathfrak{L}}{1-\mathfrak{L}} = \infty.$$

Ex his ergo litteris distantiae focales ita exprimentur:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = \frac{AB\mathfrak{C}}{PQ}\cdot a, \quad s = -\frac{ABC\mathfrak{D}}{PQR}\cdot a \text{ etc.,}$$

ultimae autem lentis distantia focalis fiet $= l$.

COROLLARIUM 1

8. Litterae ergo A, B, C, D etc. singulis lentibus, primae, secundae, tertiae etc., ordine respondent; at litterae P, Q, R etc. ad singula intervalla, primum, secundum, tertium etc., ordine referuntur; quam ob causam numerus harum posteriorum litterarum unitate minor erit quam priorum.

COROLLARIUM 2

9. Quatenus litterae P, Q, R etc. ut positivae spectantur, imagines erunt fictae, ita ut, si omnes istae litterae essent positivae, nulla imago realis in microscopio occurreret, sin autem omnes hae litterae essent negativae, in singulis intervallis imago realis reperiretur; unde quot fuerint imagines reales in microscopio, tot istarum litterarum valores sortientur negativos.

COROLLARIUM 3

10. Cum istae litterae P, Q, R etc. per bina elementa ad lentes sibi succedentes pertinentia determinentur, si huiusmodi littera fuerit positiva, binorum elementorum, ex quibus oritur, alterum erit positivum, alterum negativum, sin autem talis littera fuerit negativa, ambo elementa, ex quibus oritur, erunt positiva, quippe quia omnia intervalla debent esse positiva.

PROBLEMA 2

11. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, singularum imaginum, sive sint fictae sive reales, quantitatem definire hincque multiplicationem, quam instrumentum producit, assignare tam pro repraesentatione erecta quam inversa.*

SOLUTIO

Posita semidiametro obiecti, quatenus id per microscopium est conspicuum, $= z$ semidiametri singularum imaginum per ipsa elementa sequenti

modo supra sunt expressae:

$$\begin{array}{lll} \text{Semidiameter imaginis primae} & = \frac{\alpha}{a}\cdot z = Az & \text{(inversa)} \\ \text{semidiameter imaginis secundae} & = \frac{\alpha\beta}{ab}\cdot z = ABz & \text{(erecta)} \\ \text{semidiameter imaginis tertiae} & = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\cdot z = ABCz & \text{(inversa)} \\ \text{semidiameter imaginis quartae} & = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}\cdot z = ABCDz & \text{(erecta)} \end{array}$$

etc.,

unde imaginis ultimae semidiameter erit $= ABC\ldots Lz$; quae imago erit erecta, si litterarum A, B, $C, \ldots L$ numerus sit par, inversa autem, si is sit impar; quae ultima imago, cum fiat obiectum visionis post ultimam lentem ad distantiam infinitam $\lambda = Ll$ cadens, quam oculus circa ultimam lentem constitutus ideoque in distantia Ll contemplatur, ei apparebit sub angulo $ABC\ldots K\frac{z}{l}$. Ut nunc hinc multiplicationem, quae sit $= m$, definiamus, istum angulum comparare debemus cum angulo, sub quo ipsum obiectum z ad distantiam $= h$ oculo esset appariturum; qui angulus cum sit $\frac{z}{h}$, manifestum est fore multiplicationem

$$m = ABC\ldots K\cdot\frac{h}{l}.$$

An autem haec repraesentatio futura sit erecta sive inversa, duo casus sunt perpendendi.

I. Si numerus lentium ideoque etiam litterarum A, B, $C, \ldots L$ fuerit impar, ultima imago erit inversa; quae cum post oculum ad distantiam infinitam cadat, eam oculus ante se in situ erecto conspiciet. Quare si in formula nostra pro m inventa numerus litterarum A, B, $C, \ldots K$ fuerit par, obiectum situ erecto cernetur, quatenus scilicet haec formula positivum valorem obtinet.

II. Sin autem numerus lentium ideoque etiam litterarum A, B, C, $D, \ldots L$ fuerit par, facile intelligitur contrarium locum habere debere. Quare si in expressione ipsius m numerus litterarum A, B, $C, \ldots K$ fuerit impar, obiectum situ inverso cernetur, quatenus scilicet ista expressio fuerit negativa.

Quodsi vero in superiores formulas litteras P, Q, R etc. introducamus, invenietur

$$\begin{aligned}
&\text{semidiameter imaginis primae} &&= \alpha\cdot\frac{z}{a}\\
&\text{semidiameter imaginis secundae} &&= P\beta\cdot\frac{z}{a}\\
&\text{semidiameter imaginis tertiae} &&= PQ\gamma\cdot\frac{z}{a}\\
&\text{semidiameter imaginis quartae} &&= PQR\delta\cdot\frac{z}{a}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\\
&\text{semidiameter imaginis ultimae} &&= PQR\ldots Z\lambda\cdot\frac{z}{a};
\end{aligned}$$

quae imagines omnes sunt inversae, siquidem istae formulae valores habuerint positivos. Quare cum hic omnis ambiguitas cesset haecque ultima imago ad distantiam infinitam $=\lambda$ post oculum cadat, oculus eam ante se situ erecto conspiciet sub angulo $=PQR\ldots Z\cdot\frac{z}{a}$; unde sequitur multiplicationem fore

$$m = PQR\ldots Z\cdot\frac{h}{a}$$

pro situ erecto, si scilicet haec formula fuerit positiva; sin autem ea valorem habeat negativum, repraesentatio erit inversa; tum vero hoc casu ipsam litteram m negative capi conveniet. Facile autem intelligitur hanc posteriorem expressionem pro multiplicatione priori longe esse anteferendam, quia nulla ambiguitate laborat, eaque in sequentibus perpetuo utemur.

COROLLARIUM 1

12. Quodsi ergo in locis imaginum realium diaphragmata constitui conveniat, ex his formulis statim intelligimus, quantum foramen iis induci oporteat, postquam scilicet cognoverimus, quantam obiecti portionem, cuius semidiametrum hic vocamus $=z$, instrumentum spectandam offerat.

COROLLARIUM 2

13. Si omnes litterae P, Q, R etc. fuerint positivae ideoque nulla plane imago realis occurat, tunc instrumentum semper obiecta situ erecto repraesentabit; sin autem unica occurrat imago realis ideoque unica istarum litte-

rarum fuerit negativa, tum repraesentatio semper fiet situ inverso, quo casu ipsa littera m signo contrario in calculum introduci debebit; at si duae imagines reales locum habeant, repraesentatio iterum erit erecta.

COROLLARIUM 3

14. Hinc adparet, quanti momenti sit introductio harum litterarum P, Q, R, S etc., cum eae tam perspicue distinctionem inter imagines reales et fictas commonstrent, praecipue cum hunc tractatum aeque ac praecedentem de telescopiis secundum imagines reales dividi conveniat, quippe in quo essentiale discrimen inter diversa microscopiorum genera continetur.

PROBLEMA 3

15. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, si detur apertura primae lentis obiectivae, per quam radii ex obiecti quasi centro transmittantur, definire aperturas singularum lentium ad ulteriorem transmissionem necessarias et gradum claritatis, quo oculus obiectum contuebitur.*

SOLUTIO

Ex principiis fundamentalibus supra satis expositis hae aperturae facillime definiuntur ex apertura primae lentis cognita, unde semidiametri singularum aperturarum sequenti modo per litteras P, Q, R etc. exprimentur:

$$\begin{aligned}
&\text{Semidiameter aperturae lentis primae} &&= x\\
&\text{semidiameter aperturae lentis secundae} &&= \frac{b}{\alpha}\cdot x = \frac{1}{P}\cdot x\\
&\text{semidiameter aperturae lentis tertiae} &&= \frac{bc}{\alpha\beta}\cdot x = \frac{1}{PQ}\cdot x\\
&\text{semidiameter aperturae lentis quartae} &&= \frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}\cdot x = \frac{1}{PQR}\cdot x
\end{aligned}$$

etc.,

unde concludimus pro ultima lente requiri semidiametrum aperturae

$$= \frac{x}{PQR\ldots Z};$$

cum autem ante invenerimus

$$m = PQR\ldots Z \cdot \frac{h}{a},$$

erit ista formula

$$= \frac{h}{ma} \cdot x.$$

Tantam nempe aperturam lens ocularis ad minimum habere debet, ut radios per lentem obiectivam ingressos transmittat, et cum nunc radii inter se sint paralleli, ii quasi penicillum radiosum repraesentabunt, qui a centro obiecti in oculum intrat; ex quo, si semidiameter huius penicilli $\frac{hx}{ma}$ semidiametro pupillae aequaretur, tunc visio plena claritate frueretur; quatenus autem ista expressio minor est quam semidiameter pupillae, eatenus gradus claritatis evadit minor. Unde, cum supra gradus claritatis littera y fuerit expressus, erit hic $y = \frac{hx}{ma}$; qui valor quoties fuerit minor semidiametro pupillae, quae circiter $\frac{1}{20}$ dig. aestimatur, toties claritas minor erit censenda quam naturalis seu plena, vel potius in ratione duplicata, prouti per se est manifestum.

COROLLARIUM 1

16. Data igitur claritate y cum multiplicatione m reperitur $x = \frac{may}{h}$; unde apertura lentis obiectivae innotescit, quae ceteris paribus eo maior esse debet, quo maior fuerit distantia obiecti a lente obiectiva sive a. Cum igitur x a distantia focali lentis obiectivae pendeat, hinc colligere licet, quomodo haec lens ratione distantiae a debeat esse comparata.

COROLLARIUM 2

17. Tam hinc quam ex praecedente problemate etiam patet, quomodo multiplicatio m ad distantiam illam h, quae vulgo 8 dig. assumitur, referatur, quandoquidem in hoc negotio multiplicationem m non absolute definire licet, sicque $\frac{m}{h}$ proprie id denotat, quod sub notione multiplicationis menti offertur.

PROBLEMA 4

18. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, momenta, quae a singulis lentibus ad campum apparentem conferuntur earumque aperturam definiunt, exponere locumque oculi assignare.*

SOLUTIO

Ad hoc supra litteras peculiares in calculum introduximus; cum enim cuiusque lentis apertura ita ab eius distantia focali pendeat, ut certam eius partem superare non debeat, semidiameter aperturae cuiusque lentis post primam sequenti modo per eius distantiam focalem est stabilita:

$$\text{secundae} = \pi q, \quad \text{tertiae} = \pi' r, \quad \text{quartae} = \pi'' s, \quad \text{quintae} = \pi''' t \quad \text{etc.};$$

unde, si semidiameter obiecti conspicui sit $= z$ voceturque $\frac{z}{a} = \Phi$, ostendimus esse

$$z = a\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi'''' \text{ etc.}}{ma - h} \cdot ah,$$

quod intelligendum est de situ erecto; pro inverso enim situ multiplicatio m negative accipi debet.

Nunc autem, quo facilius de quantitate campi iudicare queamus, sit aperturae maximae, quam quaepiam lens, cuius distantia focalis sit v. gr. $= q$, recipere potest, semidiameter $= \xi q$, cuius scilicet haec lens foret capax, si esset utrinque aequalis, denotante ξ vulgo $\frac{1}{4}$; pro singulis lentibus, quatenus minores habere possunt aperturas, introducamus novas litteras et ponamus

$$\pi = -\mathfrak{q}\xi, \quad \pi' = +\mathfrak{r}\xi, \quad \pi'' = -\mathfrak{s}\xi, \quad \pi''' = +\mathfrak{t}\xi \quad \text{etc.},$$

ut fiat

$$z = a\Phi = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \mathfrak{t} \text{ etc.}}{ma - h} \cdot ah\xi,$$

in qua porro brevitatis gratia ponamus

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \mathfrak{t} \text{ etc.}}{ma - h} \cdot h,$$

ut fiat

$$z = a\Phi = Ma\xi \quad \text{seu} \quad \Phi = M\xi;$$

quibus positis novae hae litterae $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ etc. sequenti modo ad ante introductas referentur:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P-1)M,\\
&2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r} = (PQ-1)M-\mathfrak{q},\\
&3.\quad \mathfrak{D}\mathfrak{s} = (PQR-1)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r},\\
&4.\quad \mathfrak{E}\mathfrak{t} = (PQRS-1)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r}-\mathfrak{s}\\
&\qquad\text{etc.},
\end{aligned}
$$

quarum formarum differentiae etiam notatu dignae sunt, nimirum

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}-\mathfrak{B}\mathfrak{q} = P(Q-1)M-\mathfrak{q},\\
&2.\quad \mathfrak{D}\mathfrak{s}-\mathfrak{C}\mathfrak{r} = PQ(R-1)M-\mathfrak{r},\\
&3.\quad \mathfrak{E}\mathfrak{t}-\mathfrak{D}\mathfrak{s} = PQR(S-1)M-\mathfrak{s}\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Illarum igitur aequationum ultima ita erit expressa:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}\mathfrak{z} &= (PQR..Z-1)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r}\cdots-\mathfrak{y}\\
&= \left(\frac{ma}{h}-1\right)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r}\cdots-\mathfrak{y}.
\end{aligned}
$$

Ante vero ostendimus esse $\mathfrak{L}=1$; unde fiet

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}\cdots+\mathfrak{z} = \left(\frac{ma}{h}-1\right)M,$$

quae est ipsa illa aequatio, qua littera M determinatur.

Nunc igitur superest, ut locum oculi seu eius distantiam post ultimam lentem, quam supra vocavimus $=O$, definiamus; quod quidem primo secundum lentium numerum ex superioribus repetamus:

Pro una lente

$$O=0.$$

Pro duabus lentibus

$$O = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi-\Phi} = \frac{\mathfrak{q}b}{Ma}\cdot\frac{h}{m} = \frac{\mathfrak{q}q}{M}\cdot\frac{h}{ma}.$$

Pro tribus lentibus

$$O = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \frac{\mathfrak{r}c}{Ma}\cdot\frac{h}{m} = \frac{\mathfrak{r}r}{M}\cdot\frac{h}{ma}.$$

Pro quatuor lentibus

$$O = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{\mathfrak{s}d}{Ma}\cdot\frac{h}{m} = \frac{\mathfrak{s}s}{M}\cdot\frac{h}{ma}$$

etc.,

unde concludimus pro lentium numero quocunque fore distantiam oculi

$$O = \frac{\mathfrak{z}l}{M}\cdot\frac{h}{ma}.$$

COROLLARIUM 1

19. Hinc igitur novas determinationes pro aperturis singularum lentium sumus consecuti, quas scilicet adparitio campi postulat et quae non sunt confundendae cum superioribus, quas gradus claritatis postulat; cuilibet autem lenti ea apertura, quae est maior, tribui debet; unde sequentes formulae probe sunt observandae:

Semidiameter aperturae pro prima lente $= 0\xi p \; . \; . \; . \; x$,

semidiameter aperturae pro secunda lente $= \mathfrak{q}\xi q \; . \; . \; . \; \frac{x}{P}$,

semidiameter aperturae pro tertia lente $= \mathfrak{r}\xi r \; . \; . \; . \; \frac{x}{PQ}$,

semidiameter aperturae pro quarta lente $= \mathfrak{s}\xi s \; . \; . \; . \; \frac{x}{PQR}$,

unde

pro ultima lente $= \mathfrak{z}\xi l \; . \; . \; . \; \frac{hx}{ma}$,

ubi notetur litteras $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ etc. fractiones esse unitate minores, quarum valores unitatem superare nequeant.

COROLLARIUM 2

20. Si forte repraesentatio fuerit inversa, quo casu, ut supra iam monuimus, multiplicatio m negative accipitur seu $-m$ loco m scribi debet, eo

casu quoque singulis litteris $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ signum negativum tribui debet, ita ut tum fiat

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \mathfrak{t} \text{ etc.}}{ma + h} \cdot h.$$

COROLLARIUM 3

21. Quoniam circumstantiae quaedam postulare solent, ut pro utroque casu litterarum $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ etc. una vel altera negativum valorem sortiri debeat, hoc praecipue, uti in telescopiis vidimus, in prioribus harum litterarum usu venit; posteriores vero semper positivae atque adeo ipsi unitati aequales tuto assumi possunt, ita ut earum ultima certo pro unitate haberi possit; ex quo perspicuum est distantiam oculi O semper fore positivam, quoties postrema lens fuerit convexa; sin autem haec lens fuerit concava, tum etiam distantia O prodibit negativa.

SCHOLION

22. Ceterum hic monendum est, cum in primo libro littera l usurpata sit ad iustam oculi distantiam significandam, quae hic perpetuo ut infinita spectatur, hic eandem litteram longe alio significatu adhiberi, siquidem hic semper significat distantiam focalem lentis ultimae seu ocularis, quae eadem est distantia penultimae imaginis ante ultimam lentem; ex quo sequitur, si ultima lens fuerit convexa, penultimam imaginem certe ante eam repraesentari debere; quocirca ante ultimam lentem certe imago realis esset casura. Hinc igitur perspicuum est, id quod supra non tam clare patebat, si nulla plane adsit imago realis, tum lentem ultimam convexam esse non posse ideoque pro loco oculi distantiam O semper prodire negativam, pro quo casu etiam coacti fuimus peculiarem formulam pro margine colorato destruendo tradere, quae penitus diversa est ab ea, quae locum habet, quoties quantitas O est positiva; quos ergo duos casus etiam hic seorsim tractari conveniet.

PROBLEMA 5

23. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, si distantia oculi post ultimam lentem O prodierit positiva, destruere marginem coloratum, ex quacunque vitri specie singulae lentes fuerint paratae.*

SOLUTIO

Quoniam hic solutionem ita generalem postulamus, quae etiam ad lentes ex diversis vitri speciebus paratas pateat, rationem refractionis pro prima lente ponamus $=n$, pro secunda $=n'$, pro tertia $=n''$ etc., uti in superioribus libris fecimus; atque hinc statuamus formulas differentiales, quibus dispersio radiorum exprimitur, sequenti modo:

$$\frac{dn}{n-1}=N, \quad \frac{dn'}{n'-1}=N', \quad \frac{dn''}{n''-1}=N'' \text{ etc.};$$

quibus notatis supra [Lib. I. Suppl. VII, p. 239] ostendimus pro destructione marginis colorati satisfieri debere huic aequationi:

$$0=\frac{N'\cdot b\pi}{Aa\Phi}+\frac{N''\cdot c\pi'}{ABa\Phi}+\frac{N'''\cdot d\pi''}{ABCa\Phi}+\frac{N''''\cdot e\pi'''}{ABCDa\Phi} \quad \text{etc.};$$

quae aequatio, si tam loco litterarum π, π' etc. quam loco b, c, d etc. valores ante assignati substituantur, transibit in hanc formam:

$$0=\frac{N'\cdot\mathfrak{q}}{P}+\frac{N''\cdot\mathfrak{r}}{PQ}+\frac{N'''\cdot\mathfrak{z}}{PQR}+\frac{N''''\cdot\mathfrak{t}}{PQRS} \quad \text{etc.};$$

in qua aequatione terminus ultimus ita erit expressus: $\frac{N^{\cdots\cdots}\mathfrak{z}h}{ma}$.

COROLLARIUM 1

24. Patet ergo marginem coloratum tolli non posse, nisi vel litterarum $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ etc. vel P, Q, R etc. una pluresve fuerint negativae, quia alioquin omnes termini essent positivi eorumque aggregatum nihilo aequari non posset.

COROLLARIUM 2

25. Si ergo nulla adsit imago realis, quod evenit, si omnes litterae P, Q, R etc. fuerint positivae, tum necessario litterarum $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$ etc. una vel altera debet esse negativa; quae autem earum fuerint negativae, iis campus apparens diminuitur.

PROBLEMA 6

26. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, si distantia oculi O prodeat negativa ideoque oculus ultimae lenti immediate adplicari debeat, destruere marginem coloratum, ex quacunque vitri specie singulae lentes fuerint paratae.*

SOLUTIO

Manentibus iisdem, quae in praecedente problemate circa diversitatem vitri sunt posita, supra [Lib. I. Suppl. VII, p. 239] pro hoc casu secundum lentium numerum peculiares formulae sunt datae, quae ad nostrum institutum translatae ita se habent:

Pro una lente

$$0 = 0.$$

Pro duabus lentibus

$$0 = N(A+1)\mathfrak{q}.$$

Pro tribus lentibus

$$0 = N(A+1)B\mathfrak{r} - \frac{N'}{P}((B+1)\mathfrak{r} + \mathfrak{q}).$$

Pro quatuor lentibus

$$0 = N(A+1)BC\mathfrak{s} - \frac{N'}{P}((B+1)C\mathfrak{s} - \mathfrak{q}) + \frac{N''}{PQ}((C+1)\mathfrak{s} + \mathfrak{r}).$$

Pro quinque lentibus

$$0 = N(A+1)BCD\mathfrak{t} - \frac{N'}{P}((B+1)CD\mathfrak{t} + \mathfrak{q}) + \frac{N''}{PQ}((C+1)D\mathfrak{t} - \mathfrak{r})$$
$$- \frac{N'''}{PQR}((D+1)\mathfrak{t} + \mathfrak{s}).$$

Pro sex lentibus

$$0 = N(A+1)BCDE\mathfrak{u} - \frac{N'}{P}((B+1)CDE\mathfrak{u} - \mathfrak{q}) + \frac{N''}{PQ}((C+1)DE\mathfrak{u} + \mathfrak{r})$$
$$- \frac{N'''}{PQR}((D+1)E\mathfrak{u} - \mathfrak{s}) + \frac{N''''}{PQRS}((E+1)\mathfrak{u} + \mathfrak{t}).$$

Pro septem lentibus

$$0 = N(A+1)BCDEF\mathfrak{v} - \frac{N'}{P}((B+1)CDEF\mathfrak{v}+\mathfrak{q}) + \frac{N''}{PQ}((C+1)DEF\mathfrak{v}-\mathfrak{r})$$
$$-\frac{N'''}{PQR}((D+1)EF\mathfrak{v}+\mathfrak{s}) + \frac{N''''}{PQRS}((E+1)F\mathfrak{v}-\mathfrak{t}) - \frac{N'''''}{PQRST}((F+1)\mathfrak{v}+\mathfrak{u});$$

quas formulas concinnius exhibere non licet ideoque iis quovis casu oblato erit utendum.

PROBLEMA 7

27. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, omnem plane confusionem, quae ob diversam radiorum refrangibilitatem praeter marginem coloratum est metuenda, ad nihilum redigere, ex quacunque vitri specie singulae lentes fuerint paratae.*

SOLUTIO

Introductis etiam litteris N, N' etc., uti in praecedentibus problematibus est factum, aequatio in libro primo inventa [Lib. I. Suppl. VII, p. 240], cui est satisfaciendum, sequenti modo generatim pro quovis lentium numero expressa reperietur:

$$0 = N\cdot\frac{A+1}{A} - \frac{N'}{P}\cdot\frac{B+1}{AB} + \frac{N''}{PQ}\cdot\frac{C+1}{ABC} - \frac{N'''}{PQR}\cdot\frac{D+1}{ABCD} \quad \text{etc.},$$

quae etiam hoc modo exhiberi potest:

$$0 = N\cdot\frac{1}{p} + \frac{N'}{P^2}\cdot\frac{1}{q} + \frac{N''}{P^2Q^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{N'''}{P^2Q^2R^2}\cdot\frac{1}{s} \quad \text{etc.}$$

vel etiam, si libuerit, hoc modo:

$$0 = N\cdot\frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{N'}{P}\cdot\frac{1}{A\mathfrak{B}} + \frac{N''}{PQ}\cdot\frac{1}{AB\mathfrak{C}} - \frac{N'''}{PQR}\cdot\frac{1}{ABC\mathfrak{D}} \quad \text{etc.}$$

COROLLARIUM 1

28. Cum productum omnium litterarum P, Q, R, S... multiplicationem praebeat, si haec fuerit valde magna, termini huius aequationis mox fient tam parvi, ut sufficiat binos vel ternos terminos initiales assumsisse, ex quibus commode vel littera $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{C}$ definiri poterit.

COROLLARIUM 2

29. Iam supra [Lib. II, p. 292] autem ostensum est, nisi litterae N, N' etc. fuerint inter se diversae, hanc ultimam aequationem nullo modo adimpleri posse; unde eatenus tantum huic conditioni satisfieri poterit, quatenus lentes non ex eadem vitri specie conficiuntur.

SCHOLION

30. Istud quidem tantum pro telescopiis supra demonstravimus, idem autem quoque pro casu praesente demonstrari potest hoc modo. Ad hoc scilicet utamur prima forma nostrae aequationis in eaque litterae N inter se ponantur aequales, cuius singuli termini in duas partes discerpantur, ut prodeat haec forma:

$$0 = 1 + \frac{1}{A} - \frac{1}{ABP} + \frac{1}{ABCPQ} - \frac{1}{ABCDPQR}$$

$$- \frac{1}{AP} + \frac{1}{ABPQ} - \frac{1}{ABCPQR} + \frac{1}{ABCDPQRS} \quad \text{etc.},$$

quae per a multiplicata censeatur, et cum sit ex elementis

$$a = \frac{\alpha}{A} = -\frac{Pb}{A} = -\frac{P\beta}{AB} = \frac{PQc}{AB} = \frac{PQ\gamma}{ABC} \quad \text{etc.},$$

hi valores successive in nostra aequatione substituantur et aequatio nostra abibit in hanc formam:

$$0 = a + \frac{\alpha + b}{A^2} + \frac{\beta + c}{A^2B^2} + \frac{\gamma + d}{A^2B^2C^2} + \frac{\delta + e}{A^2B^2C^2D^2} \quad \text{etc.};$$

ubi cum numeratores intervalla lentium designent, denominatores vero omnes sint numeri quadrati, omnes isti termini necessario sunt positivi. Tantum de ultima parte solitaria dubium superesse posset; scilicet hic, quousque hos terminos continuavimus, insuper adiungi deberet terminus

$$\frac{\varepsilon}{A^2B^2C^2D^2E^2},$$

qui est casus quinque lentium, pro quo ε quidem est ∞; notandum autem est esse etiam $E = \infty$, cum sit $\varepsilon = Ee$; quo valore substituto istum terminum

insuper adiungendum sponte evanescere manifestum est. Ceterum, uti iam saepius monuimus, etiam diversa vitra adhibendo neutiquam necesse est, ut huic ultimae aequationi accuratissime satisfiat, cum iam satis praeclare nobis agatur, si modo eius valor satis exiguus reddi queat, id quod etiam de duabus praecedentibus aequationibus est tenendum; neque enim natura rei ipsa huiusmodi solutionem rigorosam permittit, cum nunquam sit sperandum per experimenta valores litterarum N, N' etc. ita exacte definiri posse, ut non notabiliter a veritate aberrent; et quia unicam vitri speciem usurpando semper coacti sumus hanc ultimam confusionem tolerare, si modo eam minorem reddere licuerit, id certe pro maximo lucro erit habendum.

PROBLEMA 8

31. *Ex quotcunque lentibus microscopium fuerit compositum, semidiametrum confusionis, quae a lentium apertura oritur, assignare totamque hanc confusionem infra datum limitem reducere, ut repraesentationi non amplius officiat.*

SOLUTIO

Ad hoc praestandum novae litterae λ, λ' etc. pro singulis lentibus in calculum sunt introducendae, quemadmodum in primo libro sufficienter est explicatum. Tum vero, si singulas lentes ex peculiari vitri specie factas consideremus, expressio pro semidiametro confusionis supra [Lib. I. Supplem. VII, p. 238] inventa litteris P, Q, R etc. adhibendis ad sequentem formam revocabitur:

$$\frac{mx^3}{4a^2h}\left\{\begin{array}{l} \mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right)-\frac{\mu'}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)+\frac{\mu''}{A^3B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3}+\frac{\nu''}{C\mathfrak{C}}\right)\\ -\frac{\mu'''}{A^3B^3C^3PQR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3}+\frac{\nu'''}{D\mathfrak{D}}\right)+\frac{\mu''''}{A^3B^3C^3D^3PQRS}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^3}+\frac{\nu''''}{E\mathfrak{E}}\right)\text{ etc.}\end{array}\right\}$$

quae formula succinctior reddetur distantias focales introducendo; cum enim sit

$$\mathfrak{A}=\frac{p}{a},\quad A\mathfrak{B}=-\frac{Pq}{a},\quad AB\mathfrak{C}=\frac{PQr}{a},\quad ABC\mathfrak{D}=-\frac{PQRs}{a}\text{ etc.},$$

his valoribus substitutis fiet nostra formula

$$\frac{max^3}{4h}\left(\frac{\mu}{p^3}\left(\lambda+\frac{\mathfrak{A}^2}{A}\nu\right)+\frac{\mu'}{P^4q^3}\left(\lambda'+\frac{\mathfrak{B}^2}{B}\nu'\right)+\frac{\mu''}{P^4Q^4r^3}\left(\lambda''+\frac{\mathfrak{C}^2}{C}\nu''\right)\text{ etc.}\right).$$

Sit nunc limes, quem valor huius formulae superare non debet, $=\frac{1}{4k^3}$, ubi notandum est pro telescopiis supra sumtum esse $k=50$ circiter; quare, si brevitatis gratia ponamus

$$\varDelta=\frac{\mu}{p^3}\left(\lambda+\frac{\mathfrak{A}^2}{A}\nu\right)+\frac{\mu'}{P^4q^3}\left(\lambda'+\frac{\mathfrak{B}^2}{B}\nu'\right)+\frac{\mu''}{P^4Q^4r^3}\left(\lambda''+\frac{\mathfrak{C}^2}{C}\nu''\right)\text{ etc.},$$

debebit esse

$$\frac{max^3}{h}\varDelta<\frac{1}{k^3},$$

unde commodissime definitur semidiameter lentis obiectivae

$$x<\frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{h}{ma\varDelta}};$$

ac si licuerit formulam hanc $\varDelta$ penitus ad nihilum redigere, tunc hanc semidiametrum x nihil impedit, quominus tantam statuamus, quam figura lentis obiectivae permittit.

COROLLARIUM 1

32. Quando ergo hinc quantitas x fuerit definita, tum demum gradum claritatis assignare poterimus; ex aequatione enim supra inventa $y=\frac{hx}{ma}$ cognoscimus semidiametrum penicillorum radiosorum, qui a singulis obiecti punctis in oculum transmittuntur, quae ad pupillam relata gradum claritatis determinabit.

COROLLARIUM 2

33. De telescopiis quidem vidimus sufficientem claritatis gradum produci, si modo y non multo minor sit quam $\frac{1}{50}$ dig., in microscopiis autem nos plerumque multo minore claritate contentos esse oportebit.

COROLLARIUM 3

34. At si loco x valorem inventum substituamus, pro gradu claritatis habebimus

$$y=\frac{1}{k}\left(\frac{h}{ma}\right)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{\varDelta}};$$

unde intelligitur, quo longius obiectum a microscopio removere velimus, eo minore claritate obiectum esse appariturum, quae causa est, ut in omnibus microscopiis distantia obiecti a lente obiectiva tam exigua capi debeat.

COROLLARIUM 4

35. Ex ultima forma nostrae expressionis manifestum est, si omnes lentes fuerint convexae seu litterae p, q, r etc. positivae, omnes terminos litteras λ, λ', λ'' etc. continentes fore quoque positivos; unde, cum litterae ν, ν', ν'' etc. sint valde parvae, quantitas illa $\varDelta$ nullo modo ad nihilum redigi poterit; sin autem una vel altera lens fuerit concava, tum utique fieri poterit, ut haec quantitas $\varDelta$ evanescat.

SCHOLION 1

36. Haec igitur formula praecipue litteris λ, λ', λ'' etc. convenienter definiendis inservit, quandoquidem reliquae litterae iam per conditiones praecedentes plerumque suas determinationes adipiscuntur. Meminisse autem oportet quamlibet lentem sibi adiunctum habere numerum λ, qui quidem unitate minor esse nequit, ex quo cum binis distantiis determinatricibus ambae facies determinantur. Supra autem formulae pro radiis facierum iam sunt datae, sed eas in calculi commodum hic aliquantisper mutatas exhibeamus. Exemplo sit lens prima, cuius distantiae determinatrices sunt a et α, numerus autem iis adiungendus $=\lambda$, ex quibus binae eius facies supra [Lib. I, § 55] ita sunt definitae, ut sit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{a\alpha}{\alpha\varrho + a\sigma \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{\lambda - 1}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{a\alpha}{a\varrho + \alpha\sigma \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{\lambda - 1}}.\end{cases}$$

Cum autem sit $\alpha = Aa$, fient istae formulae:

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{Aa}{A\varrho + \sigma \pm \tau(1+A)\sqrt{\lambda - 1}}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{Aa}{\varrho + A\sigma \mp \tau(1+A)\sqrt{\lambda - 1}}.\end{cases}$$

Dividantur nunc numeratores et denominatores utriusque fractionis per $1+A$, et cum sit $\frac{A}{1+A}=\mathfrak{A}$ ideoque $\mathfrak{A}a=p$ et $\frac{1}{1+A}=1-\mathfrak{A}$, nostrae formulae abibunt in sequentes:

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{p}{\sigma-\mathfrak{A}(\sigma-\varrho)\pm\tau\sqrt{\lambda-1}}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{p}{\varrho+\mathfrak{A}(\sigma-\varrho)\mp\tau\sqrt{\lambda-1}},\end{cases}$$

ubi litterae ϱ, σ et τ ex ratione refractionis, quae cuilibet lenti convenit, sunt desumendae, pariter atque litterae μ et ν, uti in primo libro [§ 55] ostendimus. Ne autem opus habeamus eas inde depromere, tabulam ibi [Lib. II, § 15] datam hic adiungamus:

n	ϱ	σ	τ	μ	ν	$\mu\nu$
1,50	0,2858	1,7143	0,9583	1,0714	0,2000	0,2143
1,51	0,2653	1,6956	0,9468	1,0420	0,2065	0,2151
1,52	0,2456	1,6776	0,9358	1,0140	0,2129	0,2159
1,53	0,2267	1,6601	0,9252	0,9875	0,2196	0,2168
1,54	0,2083	1,6434	0,9149	0,9622	0,2260	0,2176
1,55	0,1907	1,6274	0,9051	0,9381	0,2326	0,2182
1,56	0,1737	1,6119	0,8956	0,9151	0,2393	0,2192
1,57	0,1573	1,5970	0,8864	0,8932	0,2461	0,2199
1,58	0,1414	1,5827	0,8775	0,8724	0,2529	0,2206
1,59	0,1259	1,5689	0,8689	0,8525	0,2597	0,2214
1,60	0,1111	1,5555	0,8607	0,8333	0,2666	0,2221

SCHOLION 2

37. His principiis praemissis facile intelligitur, quomodo hanc de microscopiis doctrinam tractari et in sectiones subdividi conveniat. Primo scilicet microscopia simplicia, quae unica constant lente, contemplabimur idque duplici modo, prout huius lentis crassities negligitur vel eius ratio in calculo habetur. Deinde tria genera microscopiorum compositorum considerabimus, prouti in telescopiis fecimus; in primo scilicet genere nulla prorsus occurret

imago realis seu omnes litterae P, Q, R etc. erunt positivae; in secundo autem genere unica occurret imago realis ideoque unica illarum litterarum negativum habebit valorem, quaecunque ea fuerit; in tertio denique genere duae imagines reales locum habebunt sicque binae illarum litterarum, quaecunque eae fuerint, valores sortientur negativos. Plures autem imagines reales introducere prorsus foret superfluum. Notandum vero est tam microscopia simplicia quam composita primi et tertii generis obiecta situ erecto esse repraesentatura, dum microscopia composita secundi generis ea situ inverso referent. Quamobrem haec tractatio quatuor sequentibus sectionibus absolvetur.

LIBRI TERTII
DE
CONSTRVCTIONE MICROSCOPIORVM
SECTIO PRIMA.
DE
MICROSCOPIIS SIMPLICIBVS.

CAPUT I

DE MICROSCOPIIS SIMPLICIBUS UNICA LENTE CONSTANTIBUS TAM NEGLECTA LENTIS CRASSITIE QUAM EIUS RATIONE HABITA

PROBLEMA 1

38. *Microscopium simplex conficere, quod obiecta secundum datam rationem aucta repraesentet neglecta lentis crassitie.*

SOLUTIO

Sit multiplicatio praescripta $= m$, quae scilicet ad distantiam pro arbitrio assumtam h referatur denotante h vulgo distantiam 8 dig., sitque p distantia focalis lentis, quae sola microscopium constituit. Cum igitur esse debeat $\alpha = \infty$, erit quoque $A = \infty$; unde fit $\mathfrak{A} = 1$ ideoque $a = p$, ita ut distantia obiecti ante lentem praecise eius distantiae focali p aequalis esse debeat. Cum igitur sit in genere

$$m = PQR \ldots Z \cdot \frac{h}{a},$$

pro nostro casu, quo unica adest lens, haec formula per omnes litteras $P, Q, R, \ldots Z$ debet dividi, ita ut fiat

$$m = \frac{h}{a};$$

quod etiam hoc modo facillime ostenditur: cum enim haec imago cadat ad distantiam $\alpha = Aa$, eius semidiameter sit Az existente z semidiametro obiecti, haec imago ab oculo cernetur sub angulo $\frac{z}{a}$, dum idem obiectum ad distantiam h existens nudo oculo appariturum esset sub angulo $= \frac{z}{h}$, ex quo ille angulus per hunc divisus ipsam dat multiplicationem, ita ut sit $m = \frac{h}{a}$.

Quare cum haec multiplicatio m sit data, hinc colligitur $a = p = \frac{h}{m}$ sicque tam distantia focalis lentis quam distantia obiecti ante lentem per solam multiplicationem praescriptam determinatur, ex quo constructio microscopii iam innotescit. Tantum igitur superest, ut reliquas conditiones eo pertinentes percurramus.

Primo igitur sit semidiameter aperturae huius lentis $= x$, quam deinceps ex confusione determinari oportebit, et ex problemate tertio Introductionis patet fore gradum claritatis $y = \frac{hx}{ma} = x$ ob $a = \frac{h}{m}$, quod quidem per se est perspicuum, cum penicillus radiosus transmissus ipsi aperturae manifesto sit aequalis. Ex quarto problemate, cum praeter lentem obiectivam nulla alia adsit, litterae $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ etc. hic nullum locum inveniunt; at pro loco oculi hic habebimus $O = 0$ sive oculum lenti immediate adplicari oportet campusque apparens hic plane non determinatur, ita ut visus oculi nusquam terminetur. Ex quinto porro problemate intelligitur hic nullum marginem coloratum esse pertimescendum, quia is tantum a lentibus sequentibus producitur. Sextum vero problema huc prorsus non pertinet. Septimum dein problema hanc dat aequationem $0 = N \cdot \frac{1}{p}$; quod cum fieri nequeat, haec confusio tolli omnino non potest, sed potius eo maior fiet, quo minus erit p seu quo maior desideretur multiplicatio. Ex octavo denique problemate deducimus pro nostro casu hanc aequationem:

$$\frac{max^3}{h} \cdot \frac{\mu}{p^3}\left(\lambda + \frac{\mathfrak{A}^2}{A} \cdot \nu\right) < \frac{1}{k^3},$$

quae ob $A = \infty$ et $ma = h$ abit in hanc:

$$\frac{\mu \lambda x^3}{p^3} < \frac{1}{k^3},$$

ex qua fit

$$x = \frac{p}{k}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\lambda}},$$

sicque apertura lentis innotescit simulque etiam gradus claritatis hocque modo omnia, quae ad microscopium pertinent, sunt definita.

COROLLARIUM 1

39. Cum igitur pro apertura lentis inventa sit eius semidiameter $x = \frac{p}{k}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu\lambda}}$, evidens est, ut claritatem, quantum fieri potest, sine detrimento distinctionis augeamus, sumi debere $\lambda = 1$, et quia μ non multum ab unitate differt, fiet $x = y = \frac{p}{k}$; unde, cum sit circiter $k = 50$, nullum est dubium, quin lens hanc aperturam admittat. Ante autem vidimus esse $p = \frac{h}{m}$, ita ut nunc habeamus $x = y = \frac{h}{km}$. Quare si statuamus $k = 48$ et $h = 8$ dig., erit $x = y = \frac{1}{6m}$ dig. sicque, statim ac multiplicatio m supra 8 excurrat, gradus claritatis minor evadet eo, quem supra telescopiis conciliavimus.

SCHOLION 1

40. Lens autem, quae tantum octies multiplicat, vix nomen microscopii meretur, cum distantia focalis p prodeat unius digiti; interim tamen hinc videmus semidiametrum aperturae non ultra $\frac{1}{48}$ dig. augeri debere, si quidem tanto distinctionis gradu frui velimus, quantus in telescopiis exigi solet. Experientia autem constat huiusmodi lentibus multo maiorem aperturam tribui neque adeo ad mensuram definiri solere, at vero etiam indidem constat huiusmodi repraesentationes non mediocri confusione esse inquinatas; quod adeo etiam de omnibus microscopiis valet, quorum repraesentatio plerumque multo magis confusa est, quam in telescopiis tolerari solet. Quocirca videtur, dum de microscopiis agitur, litterae k multo minor valor quam 50 tuto tribui posse, quem adeo in quibusdam microscopiis non spernendis ne ad 20 quidem assurgere comperi. Interim tamen nullum est dubium, quin haec instrumenta multo maiorem utilitatem sint allatura, si a tam notabili confusione liberari queant; quare hic quidem litterae k valorem 20 sum assignaturus, nullam tamen occasionem praetermittam, quoties fieri licuerit, hunc confusionis gradum diminuendi.

COROLLARIUM 2

41. Sumto ergo $k = 20$ semidiameter aperturae microscopii debebit esse $x = \frac{2}{5m}$ dig.; cui cum mensura claritatis sit aequalis, statim atque m superat 8, quo casu fit $y = \frac{1}{20}$ dig., non amplius obiecta plena claritate videmus, sed quo maior fuerit ratio $m:8$, eo minore claritate contenti esse debemus.

COROLLARIUM 3

42. Quia autem ne tanta quidem claritas est exspectanda, nisi capiatur $\lambda = 1$, patet, quanti intersit lenti microscopicae debitam figuram tribuisse, et cum sit $\mathfrak{A} = 1$, hanc lentem ita construi conveniet, ut sit radius faciei anterioris $= \frac{p}{\varrho}$ et posterioris $= \frac{p}{\sigma}$. Si enim lente utrinque aeque convexa uti vellemus, confusio ultra dimidium fieret maior.

SCHOLION 2

43. Quo igitur constructio huiusmodi microscopiorum pro qualibet multiplicatione facilius et clarius perspiciatur, tabulam hic subiungamus, in qua pro praecipuis valoribus litterae m primo distantiam obiecti a lente, quae eadem est eius distantia focalis, exhibeamus; deinde vero radios utriusque lentis faciei in digitis expressos duabus columnis designemus; tum vero semidiametrum aperturae et gradum claritatis ita assignemus, ut posita claritate plena $= 1$ et pupillae semidiametro $= \frac{1}{20}$ dig. gradus claritatis per $20y = \frac{8}{m}$ exprimatur, etiamsi proprie quadratum huius fractionis sumi deberet, quoniam claritas pendet non a diametro penicillorum, sed a tota eorum crassitie. Quod autem semel monuisse sufficit. Pro refractione autem vitri sumamus $n = 1{,}55$, ut sit

$$\varrho = 0{,}1907, \quad \sigma = 1{,}6274,$$

eritque

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 5{,}2438\,p = 41{,}9504 \cdot \frac{1}{m} \\ \text{posterioris} = 0{,}6145\,p = 4{,}9160 \cdot \frac{1}{m} \end{cases}$$

ob $p = \frac{8}{m}$ dig. $= a$; tum vero est semidiameter aperturae $x = \frac{2}{5m}$ dig. et mensura claritatis, ut modo vidimus, $= \frac{8}{m}$, unde facile sequens tabula conficitur:

Multiplicatio	Distantia focalis	Radius faciei anterioris	Radius faciei posterioris	Semidiameter aperturae	Mensura claritatis
10	0,800	4,195	0,492	0,040	0,800
20	0,400	2,097	0,246	0,020	0,400
30	0,266	1,398	0,164	0,013	0,266
40	0,200	1,048	0,123	0,010	0,200
50	0,160	0,839	0,098	0,008	0,160
60	0,133	0,699	0,082	0,007	0,133
70	0,114	0,599	0,070	0,006	0,114
80	0,100	0,524	0,062	0,005	0,100
90	0,089	0,466	0,055	0,004	0,089
100	0,080	0,419	0,049	0,004	0,080
120	0,066	0,349	0,041	0,003	0,066
140	0,057	0,299	0,035	0,003	0,057
160	0,050	0,262	0,031	0,002	0,050

Hinc evidens est has multiplicationes ulterius continuari non posse, cum tum radii facierum lentis nimis fierent exigui, quam ut in praxi elaborari possint, tum vero apertura tam parva fieri deberet, ut ob defectum claritatis obiecta vix conspici possent. Ceterum cum apertura harum lentium tam exigua esse debeat, eas quoque ipsas tam parvas conficere licebit, ut earum crassities prae distantia focali, quantumvis ea parva fuerit, sine errore negligi queat, quia scilicet in his lentibus eadem ac in maioribus ratio est; tenuissimas nempe has lentes elaborari oportet, ut margines circumquaque inter se quasi conveniant. Cum autem plerumque his lentibus multo maior crassities tribui soleat, quae ad distantiam focalem satis notabilem teneat rationem eamque adeo superet, uti fit in globulis vitreis, qui loco huiusmodi lenticularum usurpari solent, operae utique pretium erit in determinatione talium microscopiorum crassitiei rationem habere.

PROBLEMA 2

44. *Si lentis crassitiem negligere non liceat, microscopia conficere, quae obiecta secundum datam rationem aucta repraesentent.*

SOLUTIO

Ad hoc problema solvendum consideretur solutio problematis in Lib. I § 329 allati, cuius solutio huc transferetur statuendo $O = \alpha + l = 0$, ita ut sit $l = -\alpha$ existente $\alpha = \infty$, uti hic assumimus. Tum igitur, si distantia obiecti ante lentem sit $= a$, crassities lentis $= v$, radius faciei anterioris $= f$ et posterioris $= g$, introducta quantitate adhuc indefinita $= k$ has ibi invenimus formulas:

$$f = \frac{(n-1)a(k+v)}{k+v+2na}, \quad g = \frac{(n-1)(v-k)}{2n},$$

quibus lens determinatur. Quodsi nunc ponatur $\frac{k-v}{k+v} = i$, definivimus ibi multiplicationem

$$m = \frac{1}{i} \cdot \frac{h}{a} = \frac{k+v}{k-v} \cdot \frac{h}{a}.$$

Deinde si aperturae semidiameter in facie anteriore sit x, in facie posteriore ea debet esse non minor quam $ix = \frac{k-v}{k+v} \cdot x$ proditque gradus claritatis

$$y = -ix = \frac{v-k}{v+k} \cdot x.$$

Postea vero pro semidiametro confusionis inventa est [Lib. I, § 210] sequens formula:

$$+\frac{1}{4} ix^3 \cdot \frac{n}{2(n-1)^2}\left(\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{1}{ia} + \frac{2}{k-v}\right)^2 - \frac{2}{k-v} \cdot \frac{4}{(k+v)^2}\right),$$

cuius valor non superare debet limitem ante constitutum $\frac{1}{4k^3}$ existente $k = 20$; reducitur autem ea hanc ad formam:

$$\frac{n}{8(n-1)^2} \cdot \frac{x^3}{k+v}\left(\left(\frac{n}{a} + \frac{2}{k+v}\right)\left(\frac{k+v}{a} + 2\right)^2 \cdot \frac{1}{k-v} - \frac{8}{(k+v)^2}\right),$$

unde colligitur sequens aequatio:

$$\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot x^3\left(\frac{n(k+v)}{a^3(k-v)}+\frac{4n+2}{a^2(k-v)}+\frac{4n+8}{a(k^2-v^2)}+\frac{16v}{(k+v)^3(k-v)}\right)=\frac{1}{k^3}\text{ [1]},$$

ex qua quantitas x definiri poterit. Porro supra locus oculi ita erat definitus, ut nunc fiat

$$O=\frac{(v-k)v}{n(v+k)};$$

unde conspicietur in obiecto portio, cuius semidiameter

$$z=\frac{na}{v}\cdot\frac{k-v}{k+v}\cdot x.$$

Ut margo coloratus tolleretur, deberet esse $k=\infty$, siquidem $O>0$; at cum prodeat $O<0$, debet esse $k=-2a-v$, et cum pro hac confusione penitus tollenda deberet esse

$$(\alpha+v)(a+\alpha+v)=0,$$

ob $\alpha=\infty$ evidens est hanc confusionem fore enormem.

COROLLARIUM 1

45. Cum invenerimus

$$\frac{k+v}{k-v}\cdot\frac{h}{a}=m,$$

ut hic valor sit positivus sive repraesentatio erecta, necesse est, ut quantitas k extra limites $+v$ et $-v$ contineatur; si enim intra hos limites contineretur, multiplicatio m prodiret negativa ideoque repraesentatio inversa, dum scilicet imago realis intra lentem formaretur.

COROLLARIUM 2

46. Duo ergo sunt casus considerandi, quibus multiplicatio m fit positiva, alter, quo non solum $k>0$, sed etiam $k>v$; tum facies lentis anterior erit convexa, posterior vero concava et $m>\frac{h}{a}$; altero vero casu, quo $k<0$ simul-

1) Littera k designantur in hac aequatione duae quantitates differentes; est enim dextro latere aequationis $k=20$, cum sit sinistro latere valor numeri k adhuc indefinitus. E. Ch.

que $k < -v$, sive posito $k = -l$ si fuerit $l > v$, erit

$$f = \frac{(n-1)a(l-v)}{l-v-2na} \quad \text{et} \quad g = \frac{(n-1)(l+v)}{2n},$$

ideoque facies posterior semper convexa, anterior vero concava, nisi sit $l > v + 2na$; nam si $l > v + 2na$, etiam anterior facies erit convexa hocque porro casu erit $m < \frac{h}{a}$.

COROLLARIUM 3

47. Quod ad locum oculi attinet, pro quo est

$$O = \frac{(v-k)v}{n(v+k)},$$

quia $\frac{k+v}{k-v}$ est quantitas positiva, scilicet $= \frac{ma}{h}$, erit

$$O = -\frac{vh}{mna}$$

ideoque semper negativus propter lentis crassitiem neque hic valor evanescet, nisi simul lentis crassities fuerit evanescens.

COROLLARIUM 4

48. Pro gradu vero claritatis haec expressio est notatu digna, quod sit $my = \frac{hx}{a}$ ideoque $y = \frac{hx}{ma}$, unde patet crassitiem lentis in gradu claritatis nihil mutare, si scilicet pro eadem multiplicatione m apertura x eundem adipiscatur valorem.

COROLLARIUM 5

49. Cum priori casu, quo erat $v = 0$, campus apparens fuisset indefinitus, hic ob lentis crassitiem ita determinabitur, ut sit

$$mz = \frac{nhx}{v} \quad \text{sive} \quad z = \frac{nhx}{mv},$$

unde patet, quo minor fuerit crassities, eo maiorem futurum esse campum, ac si loco x introducatur claritas y, prodibit $z = \frac{nay}{v}$, ita ut pro eadem crassitiei ratione ad distantiam a semidiameter campi sit claritati proportionalis.

SCHOLION 1

50. Quoniam hic duo casus principales considerandi veniunt, alter, quo $k > v$, alter vero, quo $l > v$ existente $l = -k$, pro priore aequatio confusionem reddens insensibilem in solutione est exhibita; pro posteriore vero ea ita se habebit:

$$\frac{n}{2(n-1)^2} \cdot x^3 \left(\frac{n(l-v)}{a^3(l+v)} - \frac{4n+2}{a^2(l+v)} + \frac{4n+8}{a(l^2-v^2)} + \frac{16v}{(l-v)^3(l+v)} \right) = \frac{1}{k^3}.$$

Quodsi nunc etiam multiplicationem m introducamus, litteram vero l vel k eliminemus, haec aequatio induet hanc formam:

$$\frac{n}{2(n-1)^2 a^2 h} \cdot x^3 \left(mn - \frac{(2n+1)(h-ma)}{v} + \frac{(n+2)(h-ma)^2}{mv^2} + \frac{(h-ma)^4}{m^3 a v^3} \right) = \frac{1}{k^3},$$

quae, si brevitatis gratia ponatur $\frac{h-ma}{v} = s$, induet hanc formam:

$$\frac{n}{2(n-1)^2 a^2 h} \cdot x^3 \left(mn - (2n+1)s + \frac{(n+2)s^2}{m} - \frac{s^3}{m^2} + \frac{hs^3}{m^3 a} \right) = \frac{1}{k^3};$$

quae porro mutatur in hanc:

$$\frac{n}{2(n-1)^2 a^2 h} \cdot x^3 \left(m\left(1 - \frac{s}{m}\right)^2 \left(n - \frac{s}{m}\right) + \frac{hs^3}{m^3 a} \right) = \frac{1}{k^3},$$

quae ad quosvis casus multo facilius adplicabitur. Ceterum cum inter binos casus memoratos quasi medius sit $k = \infty$, ponamus $k = \infty$ eritque

$$f = (n-1)a, \quad g = \infty, \quad m = \frac{h}{a}, \quad y = +x, \quad O = -\frac{v}{n}, \quad z = \frac{nax}{v};$$

praeterea vero haec habebitur aequatio resolvenda:

$$\frac{n^2 x^3}{2a^3(n-1)^2} = \frac{1}{k^3},$$

unde colligitur

$$x = \frac{a}{k} \sqrt[3]{\frac{2(n-1)^2}{n^2}},$$

ita ut hic valor notabiliter minor sit quam in problemate primo; quia in problemate primo facies anterior fere fuerat plana, hic casus inde oritur, si illa lens inverteretur, quo facto ea sine dubio multo minorem aperturam pateretur; ceterum et ideo est notatu dignus, quod crassities lentis neque in multiplicatione neque in confusione quidquam mutet.

SCHOLION 2

51. Quoniam nostrum institutum non est omnes casus possibiles pertractare, sed eos tantum, quibus unam saltem vel plures excellentes qualitates lenti tribuere licuerit, hic unicus ille casus in problemate memoratus potissimum attentione nostra dignus videtur, quo marginis colorati est expers; quod, uti vidimus, evenit, si capiatur $k = -2a - v$. Interim tamen quaedam quasi necessitas nos cogit eum quoque casum evolvere, quo loco lenticulae globulus vitreus integer usurpari solet, quandoquidem huiusmodi microscopia facillime parantur et frequenter in usum sunt vocata; quamobrem his duobus casibus duo sequentia huius capitis problemata destinamus.

PROBLEMA 3

52. *Non neglecta lentis crassitie eaque adeo data microscopium construere, quod in data ratione multiplicet simulque obiecta sine margine colorato repraesentet.*

SOLUTIO

Cum ob crassitiem distantia oculi O semper prodeat negativa ideoque oculum lenti immediate adplicari oporteat, ut margo coloratus ad nihilum redigatur, iam vidimus capi debere $k = -2a - v$; unde ambo radii lentis ita erunt expressi:

$$f = -a \qquad \text{et} \qquad g = \frac{(n-1)}{n}(a+v),$$

ita ut prima facies sit concava et in ipso eius centro obiectum collocari debeat; unde radii in prima facie nullam plane refractionem patientur; deinde pro multiplicatione habebimus hanc aequationem $m = \frac{h}{a+v}$; unde, cum m detur, colligitur $a + v = \frac{h}{m}$; pro claritatis autem gradu erit $y = \frac{a+v}{a} \cdot x$; unde, si ut supra semidiameter pupillae aestimetur $\frac{1}{20}$ dig., mensura claritatis aestimari poterit

$$20y = \frac{20(a+v)}{a} \cdot x,$$

cum scilicet x in digitis exprimitur. Pro loco oculi autem reperitur

$$O = -\frac{(a+v)v}{na};$$

quae cum sit negativa, oculum lenti immediate adplicari oportet. Quia aperturae faciei anterioris semidiameter posita est $=x$, in facie posteriore ea erit $=\frac{a+v}{a}\cdot x$, qui est ipse valor ipsius y. Hinc pro campo apparente erit

$$z=\frac{n(a+v)}{v}\cdot x.$$

Denique ut ex conditione distinctionis quantitas x definiatur, utamur prima aequatione, quae ob

$$i=\frac{k-v}{k+v}=\frac{a+v}{a} \quad \text{et} \quad k+v=-2a, \qquad k-v=-2(a+v)$$

hincque

$$\frac{1}{ia}+\frac{2}{k-v}=0 \qquad \text{et} \qquad (k-v)(k+v)^2=-8a^2(a+v)$$

abit in hanc:

$$\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot\frac{x^3}{a^3}=\frac{1}{k^3},$$

ex qua elicitur

$$x=\frac{a}{k}\sqrt[3]{\frac{2(n-1)^2}{n}},$$

ex quo valore reliqua omnia determinantur.

EXEMPLUM

Statuamus crassitiem $v=a$ sitque vitrum commune, cuius refractio $n=1,55$, ac reperietur

$$x=0,73081\cdot\frac{a}{20}=0,0365\,a$$

posito scilicet $k=20$ ut ante; cum autem multiplicatio m detur ideoque sit $a=\frac{h}{2m}$, erit

$$x=0,0183\cdot\frac{h}{m};$$

unde sequens constructio colligitur:

I. Distantia obiecti a lente $a = \frac{h}{2m}$.

II. Radius faciei anterioris $= -a = -\frac{h}{2m}$.

III. Crassities lentis $v = \frac{h}{2m}$.

IV. Radius faciei posterioris $= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{h}{m} = 0{,}35484 \cdot \frac{h}{m}$.

V. Semidiameter aperturae anterioris $= 0{,}0183 \cdot \frac{h}{m}$.

VI. Semidiameter aperturae posterioris $= 0{,}0366 \cdot \frac{h}{m}$.

VII. Mensura claritatis $= 0{,}732 \cdot \frac{h}{m}$ seu sumto $h = 8$ dig. erit ea mensura $= \frac{5{,}856}{m}$.

VIII. Semidiameter spatii visi in obiecto $z = 2nx = 0{,}0567 \cdot \frac{h}{m}$.

Quae quo facilius cum casu problematis primi comparari queant, evolvamus casum, quo multiplicatio $m = 100$, et sumto $h = 8$ dig. sequentes prodibunt determinationes:

I. Distantia obiecti a lente $= 0{,}04$ dig.

II. Radius faciei anterioris $= -0{,}04$ dig.

III. Crassities lentis $= 0{,}04$ dig.

IV. Radius faciei posterioris $= 0{,}0284$ dig.

V. Semidiameter aperturae anterioris $= 0{,}0015$ dig.

VI. Semidiameter aperturae posterioris $= 0{,}0030$ dig.

VII. Mensura claritatis $= 0{,}0585$ dig.

VIII. Semidiameter spatii visi in obiecto $= 0{,}0045$ dig.

SCHOLION

53. Haec ergo microscopia multo sunt inferiora praecedentibus, ubi crassities erat minima, neque ergo cuiquam in mentem veniet huiusmodi microscopia conficere.

PROBLEMA 4

54. *Si loco lentis adhibeatur globulus vitreus, constructionem microscopii describere, quod datam multiplicationem producat.*

SOLUTIO

Hic ergo erit 1. $f = g$, tum vero 2. $v = 2f$. Ex priore conditione statim colligimus

$$\frac{a(k+v)}{k+v+2na} = \frac{v-k}{2n},$$

unde sequitur

$$k^2 + 4nak = v^2.$$

Cum autem porro sit $v = 2f$, valor ipsius g dabit

$$f = \frac{(n-1)(2f-k)}{2n} \quad \text{sive} \quad 2f + (n-1)k = 0,$$

unde fit $k = -\frac{2f}{n-1}$, qui valor in superiore aequatione substitutus praebet

$$(2-n)f - 2(n-1)a = 0,$$

ita ut sit

$$f = \frac{2(n-1)}{2-n} \cdot a \quad \text{sive} \quad a = \frac{2-n}{2(n-1)} \cdot f.$$

Nunc vero multiplicatio m dat

$$m = \frac{2-n}{n} \cdot \frac{h}{a} = \frac{2(n-1)}{n} \cdot \frac{h}{f}$$

ob

$$k + v = -\frac{2(2-n)}{n-1} \cdot f \quad \text{et} \quad k - v = -\frac{2n}{n-1} \cdot f;$$

unde nanciscimur

$$f = \frac{2(n-1)}{n} \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad a = \frac{2-n}{n} \cdot \frac{h}{m}$$

hincque

$$k = -\frac{4}{n} \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad v = \frac{4(n-1)}{n} \cdot \frac{h}{m},$$

ex quibus pro loco oculi reperitur

$$O = -\frac{4(n-1)}{n(2-n)} \cdot \frac{h}{m};$$

quae distantia cum sit negativa, oculum lenti immediate adplicari oportet.

Ut nunc valorem ipsius x obtineamus, retineamus primo in calculo quantitatem a, et cum sit

$$f=\frac{2(n-1)a}{2-n}, \quad k=-\frac{4a}{2-n}, \quad v=\frac{4(n-1)a}{2-n}$$

hincque

$$k-v=-\frac{4n}{2-n}\cdot a \quad \text{et} \quad k+v=-4a$$

hincque

$$\frac{k+v}{k-v}=\frac{2-n}{n} \quad \text{et} \quad k^2-v^2=\frac{16n}{2-n}\cdot a^2,$$

aequatio supra inventa induet hanc formam:

$$\frac{n}{2(n-1)^2}\cdot x^3\left(\frac{2-n}{a^3}-\frac{(2n+1)(2-n)}{2na^3}+\frac{(n+2)(2-n)}{4na^3}+\frac{n-1}{4na^3}\right)=\frac{1}{k^3},$$

quae porro reducitur ad hanc:

$$\frac{3n-n^2-1}{8(n-1)^2}\cdot\frac{x^3}{a^3}=\frac{1}{k^3},$$

ex qua elicitur

$$x=\frac{2a}{k}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2}{3n-n^2-1}}=\frac{2(2-n)}{nk}\cdot\frac{h}{m}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2}{3n-n^2-1}}.$$

Inventa igitur semidiametro aperturae in parte anteriore globi x, in parte posteriore erit ea $=\frac{n}{2-n}\cdot x$, cui gradus claritatis y est aequalis; mensuram vero claritatis exprimimus per $20y$, dum scilicet distantiae in digitis exprimuntur.

Tum vero semidiameter spatii in obiecto conspicui erit $z=\frac{n^2}{4(n-1)}\cdot x$. Quia autem distantia oculi O prodiit negativa, ut margo coloratus evanesceret, debebat esse $k=-2a-v$ sive $-4a+2a=0$; quod cum non sit, etiam evidens est marginem coloratum non destrui, sed satis notabilem fore. Ex his igitur omnibus colliguntur sequentes regulae pro constructione huiusmodi microscopiorum, in quibus sit multiplicatio $=m$:

I. Paretur globulus vitreus, cuius radius sit $f=\frac{2(n-1)}{n}\cdot\frac{h}{m}$; cuius refractio si sit $n=1{,}55$ et capiatur $h=8$, erit $f=\frac{5{,}6774}{m}$ dig.

II. Ante hunc globum obiectum exponi debet ad distantiam $a=\frac{2{,}3226}{m}$ dig.

III. Globulo autem in parte anteriore tribuatur apertura, cuius semidiameter sit

$$x=\frac{2(2-n)}{nk}\cdot\frac{h}{m}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2}{3n-n^2-1}},$$

quae expressio in numeros evoluta fiet

$$x = \frac{36}{155\,m}\sqrt[3]{\frac{3025}{12475}}\ \text{dig.}$$

seu

$$x = \frac{0{,}14483}{m}\ \text{dig.} \quad \text{hincque} \quad z = \frac{0{,}15816}{m}\ \text{dig.}$$

In parte posteriore autem semidiameter aperturae debet esse

$$ix = \frac{2h}{km}\sqrt[3]{\frac{(n-1)^2}{3n-n^2-1}} = \frac{0{,}49887}{m}\ \text{dig.}$$

Cum nunc sit $y = ix$, habebimus mensuram claritatis $20y = \frac{9{,}9774}{m}$, quae ergo maior est quam casu lenticulae simplicis, ubi tantum erat $= \frac{1}{m}$, quod autem lucrum neutiquam compensat vitium illud, quo obiecta margine colorato inquinata adparent. Operae igitur pretium erit similem tabulam, qualem supra in problemate 1 dedimus, adiungere:

Multiplicatio	Distantia obiecti	Radius globi	Semidiameter aperturae anterioris	Semidiameter aperturae posterioris	Mensura claritatis	Semidiameter campi
10	0,232	0,568	0,014	0,050	0,998	0,016
20	0,116	0,284	0,007	0,025	0,499	0,008
30	0,077	0,189	0,005	0,017	0,333	0,005
40	0,058	0,142	0,004	0,012	0,249	0,004
50	0,046	0,114	0,003	0,010	0,199	0,003
60	0,039	0,094	0,002	0,008	0,166	0,003

quam ulterius continuare ob nimis exiguum campum apparentem non conveniet; sin autem apertura maior sumeretur, confusio prodiret plane intolerabilis.

SCHOLION

55. Ex his iam abunde intelligitur in hoc genere microscopiorum simplicium speciem primo allatam, qua lenticulae tenuissimae usurpantur, reliquis omnibus palmam longe praeripere; interim tamen et ista species duobus insignibus incommodis laborat, quae hic fusius ob oculos ponamus, quo clarius appareat, quid potissimum in microscopiis perficiendum desideretur. Primum

incommodum in nimia propinquitate, qua obiectum lenti admoveri debet, est situm, qua fit, ut pro maioribus multiplicationibus haec distantia fere penitus evanescere debeat, quae circumstantia in causa est, ut, obiecta si non sint laevissima, minimae inaequalitates vel a lente nimis magnam vel nimis parvam teneant distantiam ideoque summa confusione adpareant. Inprimis igitur in id erit incumbendum, ut pro maioribus potissimum multiplicationibus eiusmodi microscopia inveniantur, quae non tam exiguam a lente distantiam postulent. Alterum incommodum consistit in nimis parva claritate, quam ista microscopiorum species exhibet in maioribus multiplicationibus; ex tabula enim supra § 43 exhibita videmus, si multiplicatio sit $m = 100$, claritatem ibi designatam esse 0,080, et cum ipsa claritas huius quadrato sit proportionalis, ea fiet 0,0064 ideoque 156 vicibus minor quam claritas naturalis, quae quidem adhuc satis tolerabilis est, nisi ipsum obiectum sit natura sua valde obscurum; sed hinc intelligitur, si multo maior multiplicatio desideretur, tenebras non amplius esse ferendas. Isti quidem defectui remedium afferri posset aperturam lentis augendo; tum autem confusio tantopere augeretur, ut penitus tolerari non posset, praecipue cum istam tabulam ita adstruxerimus, ut tantum esset $k = 20$, dum pro telescopiis poni solet $k = 50$, ita ut in his microscopiis gradus distinctionis iam quindecies sit minor quam in telescopiis, ita ut potius curandum sit, ut maiorem gradum distinctionis obtineamus. Illud autem posterius incommodum maximam partem lentem duplicando atque adeo triplicando e medio tollere licebit, ubi autem non eiusmodi lentes multiplicatae, quales in primo libro descripsimus, usurpari poterunt, quarum scilicet intervallum penitus evanescens est assumtum; quamobrem in hoc negotio intervalla inter istas lentes iam tanta assumi conveniet, quae in praxi locum habere queant; quod argumentum in sequentibus capitibus diligentius examini subiiciemus; in posterum vero perpetuo crassitiem lentium pro nihilo habebimus, unde maxime erit cavendum, ne lentes minus tenues elaborentur, quam earum forma et apertura postulant.

CAPUT II

DE MICROSCOPIIS SIMPLICIBUS DUABUS PLURIBUSVE LENTIBUS CONVEXIS INTER SE PROXIME IUNCTIS CONSTANTIBUS

PROBLEMA 1

56. *Si lens duplicata ex duabus lentibus convexis sit composita, pro data multiplicatione huiusmodi microscopium construere, quod obiecta, quantum fieri potest, clare et distincte repraesentet.*

SOLUTIO

Quoniam hic binae lentes sibi proxime iungendae occurrunt, ex formulis nostris generalibus earum intervallum erit

$$\alpha + b = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right);$$

quod cum debeat esse minimum, statuatur $= \eta a$ denotante η fractionem tam parvam, quam circumstantiae permittunt, atque hinc colligemus

$$P = \frac{A}{A - \eta};$$

deinde, quia utraque lens debet esse convexa seu utriusque distantia focalis positiva, tam haec quantitas

$$p = \mathfrak{A}a$$

quam ista

$$q = -\frac{A}{P}a = -(A - \eta)a$$

debet esse positiva ideoque $\mathfrak{A} > 0$, at $A < 0$, id quod fit, si $\mathfrak{A} > 1$. Hoc notato multiplicatio nobis praebet

$$m = \frac{Ph}{a} = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{h}{a},$$

unde definitur distantia obiecti

$$a = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{h}{m},$$

ita ut sit

$$ma - h = \frac{\eta}{A - \eta} \cdot h;$$

deinde si semidiameter aperturae primae lentis ponatur $= x$, secundae lentis debet esse $\left(1 - \frac{\eta}{A}\right)x$; unde pro gradu claritatis fiet

$$y = \frac{hx}{ma} \quad \text{seu} \quad y = \left(1 - \frac{\eta}{A}\right)x,$$

ita ut ob $A < 0$ lentium intervallum claritatem augeat. Deinde pro campo apparente ibi invenimus

$$z = \frac{A - \eta}{\eta} \cdot \mathfrak{q} a \xi;$$

at hic $\mathfrak{q}$ maius accipi nequit, quam ut semidiameter aperturae secundae lentis fiat $= \left(1 - \frac{\eta}{A}\right)x$, quippe quae apertura maior esse nequit; hinc colligimus $\mathfrak{q} = \frac{4x}{Aa}$; unde concluditur

$$z = \frac{(A - \eta)x}{A\eta}.$$

Pro loco autem oculi est

$$O = \frac{\eta q}{(A - \eta)a} \cdot \frac{h}{m};$$

quae cum sit negativa, oculum immediate adplicari oportet, et quia lentes sibi sunt proximae, hinc nullus margo coloratus erit metuendus.

Nunc igitur potissimum considerari debet semidiameter confusionis, quae est [Lib. I, Supplem. VII, pag. 238]

$$\frac{\mu m x^3}{4a^3 h}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{\lambda'}{A^3 P}\right),$$

ubi posterius membrum ob $A < 0$ erit positivum ideoque haec quantitas semper

maior nihilo; quamobrem hic totum negotium eo redit, ut ista quantitas reddatur minima, id quod fieri potest, cum litterae A et $\mathfrak{A}$ adhuc arbitrio nostro sint relictae. Ad hoc efficiendum statim patet litteris λ et λ' minimum valorem, quem capere possunt, qui est 1, tribui debere, et cum quantitas P parum ab unitate differat, litteram $\mathfrak{A}$ vel A ita definiamus, ut haec formula

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^3}-\frac{1}{A^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}$$

fiat minimum. Ante quam autem eam differentiemus, relationem inter $\mathfrak{A}$ et A attentius consideremus, quae ita exprimi potest:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}=1+\frac{1}{A};$$

unde statim liquet esse

$$\frac{d\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2}=\frac{dA}{A^2}$$

seu

$$d\mathfrak{A}:dA=\mathfrak{A}^2:A^2;$$

quare, si illa formula differentietur et nihilo aequalis ponatur, loco differentialium $d\mathfrak{A}$ et dA scribere licebit eorum proportionalia $\mathfrak{A}^2$ et A^2, ex quo sequens aequatio resultat:

$$\frac{3}{\mathfrak{A}^2}-\frac{3}{A^2}+\frac{\nu}{\mathfrak{A}}+\frac{\nu}{A}=0,$$

quae manifesto in hos factores resolvitur:

$$\left(\nu+\frac{3}{\mathfrak{A}}-\frac{3}{A}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{A}\right)=0,$$

ita ut vel unus vel alter horum factorum debeat esse nihilo aequalis; prior autem factor nihilo aequatus dat

$$\nu+3+\frac{3}{A}=\frac{3}{A}\quad\text{seu}\quad\nu+3=0;$$

quod cum fieri nequeat, alterum factorem nihilo aequemus et inveniemus

$$1+\frac{2}{A}=0\quad\text{seu}\quad A=-2\quad\text{et}\quad\mathfrak{A}=2.$$

Quibus valoribus in aequatione nostra pro confusione tollenda substitutis habebimus

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8P}-\frac{\nu}{4}\right)=\frac{1}{k^3}$$

seu

$$\mu m x^3\left(2-2\nu+\frac{1}{2}\eta\right)=\frac{8a^2h}{k^3},$$

et quia est $a=\frac{2}{2+\eta}\cdot\frac{h}{m}$, erit

$$x^3=\frac{4\cdot 8h^3}{(2+\eta)^2\mu m^3k^3\left(2-2\nu+\frac{1}{2}\eta\right)}$$

ideoque

$$x=\frac{4h}{km}\sqrt[3]{\frac{1}{(2+\eta)^2\mu(4-4\nu+\eta)}};$$

quo valore pro x invento omnia, quae ad constructionem microscopii pertinent, determinantur sequenti modo.

Constructio huius microscopii

I. Distantia obiecti ante lentem priorem

$$a=\frac{2}{2+\eta}\cdot\frac{h}{m}.$$

II. Pro lente priore est distantia focalis

$$p=2a=\frac{4}{2+\eta}\cdot\frac{h}{m},$$

et quia est $\lambda=1$, erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &= \dfrac{p}{2\varrho-\sigma}\\[2ex] \text{posterior} &= \dfrac{p}{2\sigma-\varrho};\end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter debet esse $=x$.

III. Intervallum autem inter lentem priorem et posteriorem sumtum est $=\eta a=\frac{1}{2}\eta p$, ubi η tam parvum assumi conveniet, quam proximitas lentium, ne se mutuo tangant, postulat.

IV. Pro lente posteriore distantia focalis est

$$q = (2+\eta)a = \left(1+\frac{1}{2}\eta\right)p,$$

et quia est $\lambda' = 1$, fiet eius radius

$$\text{anterior} = \frac{q}{\varrho} \quad \text{et} \quad \text{posterior} = \frac{q}{\sigma};$$

cui lenti apertura dari debet, cuius semidiameter $= \left(1+\frac{1}{2}\eta\right)x$ ideoque tantillo maior quam ea primae lentis, quod quidem in praxi non solet attendi, ubi posterior lens tota aperta relinquitur.

V. Lenti posteriori oculus immediate debet adplicari et tum cernet in obiecto spatium, cuius semidiameter erit $z = \frac{2+\eta}{2\eta}\cdot x$, unde intelligitur iterum pro η tam parvam fractionem sumi debere, quam circumstantiae permittunt.

VI. Pro gradu claritatis invenimus $y = \left(1+\frac{1}{2}\eta\right)x$, unde pro modo supra exposito, quo claritatem mensuramus, erit mensura claritatis

$$= 20y = (20+10\eta)x.$$

COROLLARIUM 1

57. Eatenus haec microscopia praecedentibus, quae lente simplici constant, sunt anteferenda, quatenus hic valor ipsius x hic maior prodit quam ante; ante autem inveneramus

$$x = \frac{h}{km}\sqrt[3]{\frac{1}{\mu}},$$

nunc vero

$$x = \frac{h}{km}\sqrt[3]{\frac{64}{(2+\eta)^2\mu(4-4\nu+\eta)}},$$

ita ut neglecto η praesens valor ipsius x sit ad praecedentem uti $\sqrt[3]{\frac{4}{1-\nu}}$ ad 1, quae ratio ob $\nu = \frac{1}{5}$ circiter reducitur ad hanc:

$$\sqrt[3]{5} : 1 = 1{,}70998 : 1 = 171 : 100 \text{ proxime}$$

sive uti $12:7$.

COROLLARIUM 2

58. Hinc ergo patet huiusmodi lentem duplicatam insigne lucrum afferre, cum gradum claritatis fere duplo maiorem largiatur sicque posterius incommodum supra § 55 memoratum iam notabiliter sit imminutum. Contra vero prius incommodum in proximitate obiecti situm hic aliquantillum augetur, sed tam parum, ut differentia sit quasi insensibilis, neque etiam limitatio campi hic ullam moram facesset.

SCHOLION 1

59. Pro omnimoda igitur horum telescopiorum determinatione inprimis perpendendum est, quam parvam fractionem pro η assumere liceat, quam quidem, ubi supra de telescopiis agebatur, usque ad $\frac{1}{50}$ imminuimus; facile autem perspicitur in tam exiguis lenticulis tantam diminutionem neutiquam locum habere posse, cum ratione distantiae focalis his lenticulis nullo modo tanta tenuitas dari possit quam maioribus lentibus. Cuilibet enim perspicuum erit, si distantia focalis duarum lentium fuerit 50 dig., nihil omnino impedire, quominus earum distantia unius digiti statuatur; at si duarum lenticularum distantia focalis tantum sit $\frac{1}{10}$ dig., nullo certe modo earum intervallum $=\frac{1}{500}$ dig. statui poterit; unde merito dubitandum videtur, num hic litterae η minor valor quam $\frac{1}{5}$ tribui possit. Casu enim modo allato, quo binarum lenticularum distantia focalis $=\frac{1}{10}$ dig., difficile erit eas tam graciles elaborare, ut earum intervallum non excedere debeat $\frac{1}{50}$ dig., ne scilicet se mutuo tangant; quam mensuram in sequenti exemplo adcuratius evolvamus.

EXEMPLUM

60. Sit igitur $\eta=\frac{1}{5}$ et vitrum eius sit speciei, pro qua refractio est $n=1{,}55$, litterae autem k tribuamus ut ante valorem $=20$ et more solito sumamus $h=8$ dig., unde pro constructione microscopii sequentes nanciscemur determinationes.

Constructio huiusmodi microscopiorum

I. Distantia obiecti ante lentem $a = \frac{7,273}{m}$ dig.

II. Distantia focalis lentis prioris $p = \frac{14,546}{m}$ dig.,

unde eius constructio ita se habebit:

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{-p}{1,2460} = -0,80257\,p = -\dfrac{11,6742}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{3,0641} = +0,32636\,p = +\dfrac{4,7472}{m} \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Nunc quaeratur valor ipsius x, qui erit

$$x = \frac{8}{5m} \sqrt[3]{\frac{1}{0,9381 \times 3,2696 \times 4,84}} = \frac{0,6510}{m} \text{ dig.}$$

sicque habetur semidiameter aperturae huius lentis.

IV. Intervallum autem inter hanc lentem et posteriorem

$$= \frac{1}{5} a = \frac{1,455}{m} \text{ dig.}$$

V. Lentis posterioris distantia focalis

$$q = \frac{16,001}{m} \text{ dig.},$$

unde eius constructio ita se habebit:

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{0,1907} = 5,2438\,q = \dfrac{83,9065}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{1,6274} = 0,61447\,q = \dfrac{9,8322}{m} \text{ dig.} \end{cases}$$

VI. Huic lenti sufficit aperturam dare tantillo maiorem quam praecedentem eique oculum immediate adplicari oportet.

VII. Pro gradu claritatis invenimus $y = \frac{0,716}{m}$ dig.; unde, si claritas ut supra mensuretur, habebitur mensura claritatis $20\,y = \frac{14,32}{m}$.

VIII. Pro spatio autem apparente colligitur eius semidiameter $z = \frac{3,580}{m}$ dig.

SCHOLION 2

61. Hic igitur praecipua praerogativa prae lentibus simplicibus in hoc consistit, quod claritas notabiliter maior exhibeatur; sin autem non desideremus maiorem claritatem ideoque aperturam nostris lentibus minorem tribuamus, tanto maiorem distinctionem percipiemus, quod commodum certe non minus est aestimandum. Cum hic hoc insigne commodum duplicatione lentis simus assecuti, facile intelligitur triplicatione lentis multo maius commodum obtineri posse, quod lentem adeo quadruplicando adhuc ulterius augeri poterit. Hic scilicet loquor de lentibus convexis, quatenus eae sibi proxime iunctae, ita ut quasi unicam lentem mentiantur, in microscopio adhibentur; si enim etiam lentes concavas usurpare velimus, confusio plane tolli posset, ita ut tunc lentibus tanta apertura concedi posset, quantam earum figura admittit; quod argumentum in sequente capite adcuratius pertractabimus.

PROBLEMA 2

62. *Si microscopium constet tribus lentibus convexis proxime inter se iunctis, eius constructionem investigare, ut pro data multiplicatione et dato distinctionis gradu obiecta maxima, qua fieri potest, claritate repraesentet.*

SOLUTIO

Cum hic tres lentes occurrant, bina intervalla inter eas ita exprimuntur: prius

$$\alpha + b = A a\left(1 - \frac{1}{P}\right)$$

et posterius

$$\beta + c = -\frac{AB}{P}\cdot a\left(1 - \frac{1}{Q}\right);$$

quae cum esse debeant minima, utrumque statuatur $= \eta a$; unde colligitur

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{\eta}{A}, \quad P = \frac{A}{A - \eta},$$

deinde

$$\frac{1}{Q} = 1 + \frac{P\eta}{AB} \quad \text{ideoque} \quad Q = \frac{AB}{AB + P\eta} = \frac{(A-\eta)B}{(A-\eta)B + \eta}.$$

Cum porro omnes tres lentes debeant esse convexae seu earum distantiae

focales p, q, r positivae, adipiscimur has conditiones:

$$p = \mathfrak{A}a > 0, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a > 0, \quad r = \frac{AB}{PQ}\cdot a > 0;$$

unde primo patet esse debere $\mathfrak{A}$ positivum; circa A autem nihil adhuc definitur. Considerentur autem binae postremae distantiae focales q et r, et cum sit $\frac{q}{r} = -\frac{\mathfrak{B}Q}{B}$, debet esse $-\frac{\mathfrak{B}}{B} = \mathfrak{B} - 1$ quantitas positiva ideoque $\mathfrak{B} > 1$ et hinc B negativum, unde manifestum fore $A < 0$ hincque $\mathfrak{A} > 1$.

Quod ad marginem coloratum attinet, quia hae tres lentes quasi unam lentem simplicem mentiuntur, nihil adeo erit metuendum. Quare aequationem pro semidiametro confusionis contemplemur

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{1}{A^3 P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{\lambda''}{A^3 B^3 P Q}\right) = \frac{1}{k^3},$$

in qua omnes termini litteris λ adfecti sunt positivi; unde efficiendum est, ut huic formulae minimus valor concilietur vel saltim valor a minimo non multum discrepans, quem in finem primo litteris λ, λ', λ'' valor minimus, qui est 1, tribuatur, et cum litterae P, Q parum ab unitate differant, earum loco quoque unitas scribatur et sequens formula ad minimum perducatur:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{1}{A^3}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}} - \frac{1}{B^3}\right).$$

Quaestio scilicet nunc eo redit, ut ambae litterae A et B ita definiantur, ut valor huius formulae fiat minimus. Consideremus igitur primo solam litteram $\mathfrak{B}$, et manifestum est eam ita accipi debere, ut formula

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}} - \frac{1}{B^3}$$

fiat minima, quae cum similis sit formulae praecedentis problematis, eodem modo reperietur $\mathfrak{B} = 2$ et $B = -2$. His igitur sumtis valoribus nostra formula evadet

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{1}{4A^3} + \frac{\nu}{4A^3};$$

pro qua ex natura minimi litterae A et $\mathfrak{A}$ supersunt investigandae, et cum sit, ut ante observavimus,

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} = 1 + \frac{1}{A}$$

hincque

$$d\mathfrak{A} : dA = \mathfrak{A}^2 : A^2$$

differentiatio dabit hanc aequationem, quae facile resolvitur in hos factores:

$$(\nu+3)\left(1+\frac{3}{2A}\right)\left(1+\frac{1}{2A}\right)=0,$$

id quod duplici modo fieri poterit; primo scilicet, si $A=-\frac{3}{2}$ ideoque $\mathfrak{A}=3$, tum vero etiam, si $A=-\frac{1}{2}$ hincque $\mathfrak{A}=-1$; ex quo intelligitur solam priorem solutionem locum habere. Quocirca pro solutione nostri problematis statuamus

$$\mathfrak{A}=3,\quad A=-\frac{3}{2}\quad \text{atque}\quad \mathfrak{B}=2\quad \text{et}\quad B=-2$$

fietque

$$1.\quad P=\frac{3}{3+2\eta},\qquad Q=\frac{3+2\eta}{3+3\eta},$$

$$2.\ \text{vero etiam}\quad p=3a,\quad q=\frac{3}{P}\cdot a=(3+2\eta)a,\quad r=\frac{3}{PQ}\cdot a=3(1+\eta)a.$$

Formula autem pro multiplicatione supra data fit hic

$$m=PQ\cdot\frac{h}{a}=\frac{1}{1+\eta}\cdot\frac{h}{a},$$

unde deducimus

$$a=PQ\cdot\frac{h}{m}=\frac{1}{1+\eta}\cdot\frac{h}{m}.$$

Quibus notatis denuo consideremus aequationem pro confusione, quae his omnibus valoribus substitutis induet hanc formam:

$$\frac{(1+\eta)^2\mu m^3x^3}{h^3}\left(\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{P}+\frac{1}{PQ}\right)-\frac{2\nu}{27}\left(3+\frac{1}{P}\right)\right)=\frac{1}{k^3},$$

quae porro ad hanc formam reducitur:

$$\frac{(1+\eta)^2\mu m^3x^3}{27h^3}\left(3+\frac{5}{3}\eta-4\nu\left(2+\frac{1}{3}\eta\right)\right)=\frac{1}{k^3},$$

ita ut sit

$$\frac{kmx}{3h}\sqrt[3]{\mu(1+\eta)^2\left(3+\frac{5}{3}\eta-4\nu\left(2+\frac{1}{3}\eta\right)\right)}=1,$$

unde facile valor ipsius x colligitur, qui praebet semidiametrum aperturae

primae lentis. Duas reliquas tuto tam apertas relinquere licet, quam earum forma permittit. Hinc autem pro gradu claritatis habebitur

$$y = \frac{hx}{ma} = (1 + \eta)x$$

hincque mensura claritatis $= 20y$, si scilicet x in digitis exprimatur.

Denique superest, ut spatium in obiecto visum accuratius determinemus, cuius semidiameter z supra in genere ita est definita:

$$z = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma - h} \cdot ah\xi = Ma\xi$$

posito

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma - h} \cdot h;$$

erit autem

$$ma - h = -\frac{\eta}{1 + \eta} \cdot h$$

ideoque

$$M = -\frac{(\mathfrak{q} + \mathfrak{r})(1 + \eta)}{\eta},$$

ita ut nunc $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ ut negativae spectari debeant; nunc autem adiungi debet prima aequatio fundamentalis

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P - 1)M = \frac{-2\eta}{3 + 2\eta} \cdot M$$

hincque

$$\mathfrak{q} = -\frac{\eta}{3 + 2\eta} \cdot M;$$

ubi si loco M valor substituatur, erit

$$\mathfrak{q} = \frac{1 + \eta}{2 + \eta} \cdot \mathfrak{r}\text{[1]};$$

quod ad litteram $\mathfrak{r}$ attinet, eius loco unitas accipi posset, si ultima lens esset utrinque aequaliter convexa; cum autem hinc proditura sit fere convexo-

1) Editio princeps: $\mathfrak{q} = \frac{1 + \eta}{2 - \eta} \cdot \mathfrak{r}$, unde etiam sequentes formulae huius paragraphi pro m et z corrigendae erant. Correxit E. Ch.

plana, eius apertura ad dimidium reducetur, ita ut statui debeat $\mathfrak{r} = -\frac{1}{2}$; unde fit

$$\mathfrak{q} = -\frac{(1+\eta)}{2(2+\eta)}$$

hincque

$$M = \frac{(3+2\eta)(1+\eta)}{2\eta(2+\eta)};$$

quocirca sumto $\xi = \frac{1}{4}$ habebitur semidiameter spatii conspicui

$$z = \frac{(3+2\eta)(1+\eta)}{8\eta(2+\eta)} \cdot a = \frac{3+2\eta}{8\eta(2+\eta)} \cdot \frac{h}{m},$$

qui campus tantus est, ut de eo nemo rationem habeat conquerendi. Tum autem semidiametri aperturae binarum posteriorum lentium debent esse

$$\text{secundae } = \frac{1+\eta}{8(2+\eta)} \cdot q = \frac{3+2\eta}{8(2+\eta)} \cdot \frac{h}{m},$$

$$\text{tertiae } = \frac{1}{8} r = \frac{3}{8} \cdot \frac{h}{m},$$

siquidem hi valores sint maiores iis, quos claritas postulat, quippe qui sunt pro secunda

$$= \frac{x}{P} = \frac{3+2\eta}{3} \cdot x$$

et pro tertia

$$= \frac{x}{PQ} = (1+\eta)\, x.$$

SCHOLION 1

63. Obiectioni hic occurrendum necesse videtur, quod in praecipua huius solutionis parte non ipsam formulam, qua semidiameter confusionis exprimitur, ad minimum valorem perduxerimus, sed aliam formulam, quae ab illa satis notabiliter discrepare possit, praecipue si, ut ante fecimus, statuamus $\eta = \frac{1}{5}$, atque hoc quidem statim lubenter concedimus nos hoc modo semidiametro confusionis non absolute minimum valorem induxisse atque adeo minorem eo, quem invenimus, erui posse, si quis laborem suscipere vellet ipsam formulam litteras P et Q continentem secundum methodum maximorum et minimorum tractandi; tum scilicet pro litteris A et B alios valores

a nostris aliquantillum discrepantes esset inventurus, qui certe molestissimis formulis forent implicati, ut neque operae pretium esset eos evolvere neque ab artifice perfectissima exsecutio sperari posset. Nos autem hic valore invento, qui certe iam satis est exiguus, etsi non sit omnium minimus, contenti esse poterimus, si quidem inde eiusmodi microscopia adipiscimur, quae vulgàribus simplicibus longissime sunt anteferenda, cum multo maiorem claritatis gradum largiantur, pro data scilicet distinctione, ita ut, si aliquid de claritate remittere voluerimus aperturam primae lentis aliquantillum restringendo, tum maximum lucrum in distinctione simus consecuturi.

COROLLARIUM 1

64. Cum pro prima lente sit distantia focalis

$$p = 3a = \frac{3}{1+\eta}\cdot\frac{h}{m}$$

et numeri $\mathfrak{A} = 3$ et $\lambda = 1$, erit huius lentis

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)}\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)}\end{cases}$$

sicque erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{p}{3\varrho - 2\sigma}\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{p}{3\sigma - 2\varrho}.\end{cases}$$

COROLLARIUM 2

65. Simili modo, cum pro lente secunda sit distantia focalis

$$q = (3+2\eta)a = \frac{3+2\eta}{1+\eta}\cdot\frac{h}{m}$$

et numeri $\mathfrak{B} = 2$ et $\lambda' = 1$, erit eius

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{q}{2\varrho - \sigma}\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{q}{2\sigma - \varrho}.\end{cases}$$

Pro lente autem tertia ob

$$r = 3(1+\eta)a = \frac{3h}{m}, \quad \mathfrak{C} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda'' = 1$$

erit eius

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &= \dfrac{r}{\varrho}\\[2ex] \text{posterior} &= \dfrac{r}{\sigma}\cdot\end{cases}$$

COROLLARIUM 3

66. Quod ad intervalla inter has ternas lentes attinet, ea assumta inter se aequalia et nunc utrumque inventum est $= \eta a = \frac{\eta}{1+\eta}\cdot\frac{h}{m}$, dum scilicet obiectum ante lentem primam collocatur ad distantiam $a = \frac{1}{1+\eta}\cdot\frac{h}{m}$, quae distantia ergo aliquanto minor est quam casu lentis simplicis et duplicatae.

EXEMPLUM

67. Parentur omnes tres lentes ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, tum vero statuatur $\eta = \frac{1}{5}$ et sumatur $k = 20$ et $h = 8$ dig. atque hinc pro quantitate x determinanda habebitur ista aequatio

$$\frac{5mx}{6}\sqrt[3]{0{,}9381 \times 1{,}44 \times 1{,}4105} = 1,$$

quae evoluta dat $x = \frac{0{,}96795}{m}$ dig., unde sequens oritur

Constructio huiusmodi microscopiorum

I. Distantia obiecti ante lentem primam

$$a = \frac{20}{3m} = \frac{6{,}666}{m} \text{ dig.}$$

II. Pro lente prima, cuius distantia focalis $= p = \frac{20}{m}$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= -\dfrac{p}{2{,}6827} = -0{,}37276p = -\dfrac{7{,}4552}{m}\text{ dig.}\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{p}{4{,}5008} = +0{,}22218p = +\dfrac{4{,}4436}{m}\text{ dig.,}\end{cases}$$

cui lenti tribuatur apertura, cuius semidiameter

$$x = \frac{0,96795}{m} \text{ dig.}$$

III. Tum ad distantiam

$$\eta a = \frac{4}{3m} \text{ dig.} = \frac{1,3333}{m} \text{ dig.}$$

locetur lens secunda, cuius distantia focalis est

$$q = \frac{22,666}{m} \text{ dig.,}$$

eritque

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{-q}{1,2460} = -\,0,80257\,q = -\,\dfrac{18,1915}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{3,0641} = +\,0,32636\,q = +\,\dfrac{7,3973}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter sit $\frac{1,55}{m}$ [1] dig.

et distantia ad lentem sequentem ut ante $= \frac{1,333}{m}$ dig.

IV. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est $r = \frac{24}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{r}{0,1907} = 5,2438\,r = \dfrac{125,851}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{r}{1,6274} = 0,61447\,r = \dfrac{14,7473}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius apertura tanta esse potest, ut eius semidiameter sit $= \frac{6}{m}$ dig., huicque lenti oculus immediate adplicetur.

V. Tum vero, cum sit

$$y = \frac{6}{5}x = \frac{1,1615}{m} \text{ dig.,}$$

erit mensura claritatis $= \frac{23,230}{m}$, quae semisse maior est quam casu praecedente.

1) Editio princeps: $\frac{1,85}{m}$. Vide notam p. 251. Correxit E. Ch.

VI. Pro spatio denique obiecti conspicuo habebimus eius semidiametrum

$$z = \frac{85}{11m} = \frac{7{,}7273}{m}\text{ [1]}.$$

SCHOLION 2

68. Ne quisquam miretur hoc casu spatium conspicuum tanto maius esse inventum[2]) quam casu praecedente, is observet in casu antecedente lenti oculari non maiorem aperturam esse datam, quam gradus claritatis postulat; quod ideo fecimus, quod priori lenti adhuc exigua apertura tribui debebat ideoque hoc casu consultum erat ambas lentes non maiores efficere, quam ista apertura postularet, ut scilicet earum crassities eo minor redderetur. In praesente autem casu res longe aliter se habet, cum iam prima lens fere tantam aperturam requirat, quantam eius figura permittit; ex quo hae lentes necessario tantum discum habere debent, qui faciei curvioris arcum triginta graduum complectatur; ex quo etiam binis reliquis lentibus multo maior apertura tribui poterat. Verum hic in genere notandum est etiam casu praecedente campum apparentem iam tantum fore, ut quilibet de eo contentus esse possit. Quoniam autem hic primae lentis apertura fere iam tanta est inventa, ut eius figura maiorem non pateretur, inutile videri posset hanc investigationem ulterius ad quatuor lentes prosequi, quandoquidem calculum simili modo instituendo multo maiorem valorem pro x essemus adepturi; verum ob hanc ipsam causam ista investigatio maximi erit momenti; quia enim hactenus litterae k maiorem valorem non tribuimus quam viginti, unde admodum modicus distinctionis gradus nascitur, nunc huius litterae valorem multo maiorem assumere poterimus, quo his microscopiis summus certe perfectionis gradus inducetur idque sine ullo claritatis detrimento. Quaecunque enim adhuc per microscopia vulgaria sunt observata, semper haud exiguo confusionis gradu erant inquinata; ex quo, si eiusmodi microscopia nunc producantur, quae obiecta multo maiore distinctione repraesentent, ipsa observatione multa nobis patefacient, quae adhuc erant incognita, ita ut non amplius multo maior multiplicatio tanto studio sit desideranda.

---

1) Editio princeps: $z = \frac{50}{3m} = \frac{16{,}666}{m}$. Vide notam p. 251. Correxit E. Ch.

2) Magnitudo huius spatii conspicui tanta evasit ob inaccuratam computationem quantitatis q (§ 62). Ceterum EULERI annotatio etiam pro accurato valore numeri z valet. E. Ch.

PROBLEMA 3

69. *Si microscopium constet quatuor lentibus convexis et proxime inter se iunctis, eius constructionem investigare, ut pro data multiplicatione et dato distinctionis gradu obiecta maxima, qua fieri potest, claritate repraesentet.*

SOLUTIO

Cum hic quatuor lentes occurrant, tria inter eas intervalla ita exprimuntur:

$$\text{Primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right),$$

$$\text{secundum} = -\frac{AB}{P}\cdot a\left(1-\frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{tertium} = \frac{ABC}{PQ}\cdot a\left(1-\frac{1}{R}\right);$$

quae cum esse debeant minima, quodlibet statuamus $=\eta a$, unde obtinebimus

$$\frac{1}{P}=1-\frac{\eta}{A} \quad \text{seu} \quad P=\frac{A}{A-\eta};$$

deinde

$$\frac{1}{Q}=1+\frac{P\eta}{AB} \quad \text{seu} \quad Q=\frac{(A-\eta)B}{(A-\eta)B+\eta};$$

tertio vero

$$\frac{1}{R}=1-\frac{\eta}{(A-\eta)BC+C\eta} \quad \text{seu} \quad R=\frac{(A-\eta)BC+C\eta}{(A-\eta)BC+C\eta-\eta}$$

seu

$$R=\frac{ABC-\eta(B-1)C}{ABC-\eta(B-1)C-\eta}.$$

Cum iam omnes quatuor lentes debeant esse convexae seu earum distantiae focales p, q, r, s positivae, has adipiscimur conditiones:

$$p=\mathfrak{A}a>0, \quad q=-\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a>0, \quad r=\frac{AB\mathfrak{C}}{PQ}\cdot a>0, \quad s=-\frac{ABC}{PQR}\cdot a>0;$$

unde primo colligimus

$$\frac{r}{s}=-\frac{R\mathfrak{C}}{C}>0,$$

ita ut esse debeat

$$-\frac{\mathfrak{C}}{C}=\mathfrak{C}-1$$

positivum, unde fit $\mathfrak{C}>1$, hinc C negativum ideoque AB positivum. Deinde cum sit

$$\frac{q}{r}=-\frac{\mathfrak{B}Q}{B\mathfrak{C}},$$

debebit esse

$$-\frac{\mathfrak{B}}{B}=\mathfrak{B}-1>0;$$

unde patet fore $\mathfrak{B}>1$ hincque $B<0$ simulque $A<0$; denique cum sit

$$\frac{p}{q}=-\frac{\mathfrak{A}P}{A\mathfrak{B}},$$

etiam esse debet

$$-\frac{\mathfrak{A}}{A}=\mathfrak{A}-1>0,$$

ergo

$$\mathfrak{A}>1 \quad \text{et} \quad A<0.$$

Quod ad marginem coloratum attinet, de eo non est opus ut simus solliciti, ut iam supra annotavimus. Quare pro semidiametro confusionis hanc contemplemur aequationem:

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{1}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right)+\frac{1}{A^3B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3}+\frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)-\frac{\lambda'''}{A^3B^3C^3PQR}\right)=\frac{1}{k^3},$$

in qua omnes termini litteris λ adfecti sunt positivi; unde huic formulae valor minimus vel saltim a minimo non multum discrepans conciliari debet; quem in finem primo litteris $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ valor minimus $=1$ tribuatur, cumque P, Q, R ab unitate parum differant, eorum loco scribatur unitas et sequens formula ad minimum perducatur:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{1}{A^3}\cdot W$$

existente

$$W=\frac{1}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}-\frac{1}{B^3}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}^3}+\frac{\nu}{C\mathfrak{C}}-\frac{1}{C^3}\right);$$

ubi evidens est hanc formulam W omnino similem esse illi formulae, quam in praecedente problemate minimum reddi oportuit, hoc tantum discrimine,

quod litterae B et C hic adhibitae ante erant A et B. Quare iam novimus, ut haec formula W fiat minima, capi debere

$$\mathfrak{B}=3,\quad B=-\frac{3}{2},\quad \mathfrak{C}=2 \quad \text{et} \quad C=-2;$$

quibus valoribus substitutis formula W fiet

$$W=\frac{1}{9}-\frac{8\nu}{27}.$$

Quocirca formula nostra ad minimum revocanda erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{1}{A^3}\left(\frac{1}{9}-\frac{8\nu}{27}\right),$$

quae differentiata propter $d\mathfrak{A}:dA=\mathfrak{A}^2:A^2$ praebet

$$\frac{3}{\mathfrak{A}^2}+\frac{\nu}{\mathfrak{A}}+\frac{\nu}{A}-\frac{3}{A^2}\left(\frac{1}{9}-\frac{8\nu}{27}\right)=0,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$3\left(\frac{1}{\mathfrak{A}^2}-\frac{1}{9A^2}\right)+\nu\left(\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{A}+\frac{8}{9A^2}\right)=0;$$

in qua si loco $\frac{1}{\mathfrak{A}}$ scribatur eius valor $1+\frac{1}{A}$, prodibit

$$(\nu+3)\left(1+\frac{2}{A}+\frac{8}{9A^2}\right)=0;$$

qui posterior factor resolvitur in hos duos factores

$$\left(1+\frac{4}{3A}\right)\left(1+\frac{2}{3A}\right),$$

quorum prior nihilo aequatus dat

$$A=-\frac{4}{3} \quad \text{ideoque} \quad \mathfrak{A}=4,$$

posterior vero

$$A=-\frac{3}{2} \quad \text{hincque} \quad \mathfrak{A}=-2;$$

qui ergo nostro instituto non convenit. Quocirca pro valore minimo obtinendo sequentes nacti sumus valores:

$$\mathfrak{A} = 4, \quad A = -\frac{4}{3}, \quad \mathfrak{B} = 3, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad \mathfrak{C} = 2, \quad C = -2;$$

ex quibus valores supra inventi ita exprimentur

$$P = \frac{4}{4+3\eta}, \quad Q = \frac{4+3\eta}{4+5\eta}, \quad R = \frac{4+5\eta}{4+6\eta}$$

et distantiae focales

$$p = 4a, \quad q = (4+3\eta)a, \quad r = (4+5\eta)a \quad \text{et} \quad s = (4+6\eta)a.$$

Formula autem pro multiplicatione supra data hic fit

$$m = PQR \cdot \frac{h}{a} = \frac{4}{4+6\eta} \cdot \frac{h}{a},$$

unde colligitur

$$a = \frac{2}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

His igitur substitutis valoribus aequatio pro confusione tollenda hanc induet formam:

$$\frac{\mu\left(1+\frac{3}{2}\eta\right)^2 m^3 x^3}{1 \cdot 64 h^3}\left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} - 2\nu\left(6 + \frac{3}{P} + \frac{1}{PQ}\right)\right) = \frac{1}{k^3},$$

quae loco P, Q, R valoribus substitutis abit in hanc formam:

$$\frac{k^3 m^3 x^3}{64 h^3} \cdot \mu\left(1+\frac{3}{2}\eta\right)^2\left(4 + \frac{7}{2}\eta - \nu(20+7\eta)\right) = 1,$$

ita ut sit

$$\frac{kmx}{4h}\sqrt[3]{\mu\left(1+\frac{3}{2}\eta\right)^2\left(4+\frac{7}{2}\eta - \nu(20+7\eta)\right)} = 1;$$

unde facile valor ipsius x definitur; qui nisi maior prodeat, quam ut prima lens tantam aperturam admittere possit, dabit huius aperturae semidiametrum; sin autem maior prodeat, tum valor k eo usque augeatur, quoad prima lens hanc aperturam capere possit, sicque patebit, quanto distinctionis gradu haec microscopia futura sint praedita; scilicet lentibus definitis pro x sumatur valor maximae aperturae respondens ac tum ex hac aequatione valor ipsius k

eliciatur. Hoc itaque modo definito x pro gradu claritatis habebimus

$$y = \frac{2+3\eta}{2} \cdot x$$

hincque mensura claritatis

$$= 20y = (20 + 30\eta)\, x.$$

De spatio in obiecto conspicuo hic nihil definio, cum certe sit maximum, si quidem singulis lentibus maxima, cuius capaces sunt, apertura tribuatur.

COROLLARIUM 1

70. Cum pro prima lente sit distantia focalis

$$p = 4a = \frac{8}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m}$$

et numeri $\mathfrak{A} = 4$ et $\lambda = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - 4(\sigma - \varrho)} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + 4(\sigma - \varrho)}. \end{cases}$$

COROLLARIUM 2

71. Reliquarum trium lentium constructio erit ut in problemate praecedente; pro secunda scilicet erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{\sigma - 3(\sigma - \varrho)} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\varrho + 3(\sigma - \varrho)} \end{cases}$$

existente

$$q = \frac{2(4+3\eta)}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

Pro tertia lente erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{r}{\sigma - 2(\sigma - \varrho)} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{r}{\varrho + 2(\sigma - \varrho)} \end{cases}$$

existente

$$r = \frac{2(4+5\eta)}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

Pro quarta denique lente

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{s}{\varrho} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{s}{\sigma} \end{cases}$$

existente

$$s = \frac{2(4+6\eta)}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m} = \frac{4h}{m}.$$

COROLLARIUM 3

72. Quod ad intervalla attinet, omnia sunt inter se aequalia, scilicet $= \eta a$; eorum igitur quodlibet erit

$$= \frac{2\eta}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m},$$

quia scilicet obiectum ante primam lentem collocari debet ad distantiam

$$a = \frac{2}{2+3\eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

EXEMPLUM

73. Ponantur omnes quatuor lentes ex vitro communi confectae, pro quo $n = 1{,}55$; tum vero statuatur iterum $\eta = \frac{1}{5}$ et $h = 8$ dig., at vero k adhuc indefinitum relinquamus; unde habebitur ista aequatio:

$$\frac{kmx}{32} \sqrt[3]{0{,}9381} \times 1{,}69 \times (-0{,}2776) = 1,$$

ubi signum — calculum non turbat, cum hic de quantitate absoluta sermo sit; unde reperitur

$$kx = \frac{42{,}0692}{m},$$

unde iam patet, si caperetur $k = 20$, valorem ipsius x proditurum esse nimis magnum; quare x ex figura lentium et tum hinc valorem ipsius k investigemus, ut gradum distinctionis adcuratius cognoscamus.

Habetur itaque sequens

Constructio horum microscopiorum

I. Obiecti ante lentem distantia

$$a = \frac{80}{13m} = \frac{6,1538}{m} \text{ dig.}$$

II. Pro lente prima, cuius distantia focalis

$$p = \frac{24,6152}{m} \text{ dig.},$$

erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\dfrac{p}{4,1194} = -0,24275p = -\dfrac{5,9755}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\dfrac{p}{5,9375} = +0,16842p = +\dfrac{4,1457}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter sumi poterit $x = \frac{1,0364}{m}$ dig.; tum vero pro gradu distinctionis erit $k = 41$ circiter; quare cum distinctio sequatur cubum ipsius k, hic distinctio octies maior erit quam in casibus praecedentibus, ubi $k = 20$. Tum vero ad lentem sequentem erit distantia $= \frac{1,2308}{m}$ dig.

III. Pro secunda lente, cuius distantia focalis $q = \frac{28,308}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\dfrac{q}{2,6827} = -0,3727q = -\dfrac{10,552}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\dfrac{q}{4,5008} = +0,2222q = +\dfrac{6,2896}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius apertura priore aliquanto maior sumi potest.

Distantia ad lentem sequentem est ut ante.

IV. Pro tertia lente, cuius distantia focalis est $r = \frac{30,77}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\dfrac{r}{1,2460} = -0,8025r = -\dfrac{24,693}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\dfrac{r}{3,0641} = +0,3264r = +\dfrac{10,043}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius apertura iterum aliquanto maior quam praecedens et intervallum ad sequentem est ut ante.

V. Pro quarta lente, cuius distantia focalis est $s = \frac{32}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{s}{0{,}1907} = 5{,}2438\, s = \dfrac{167{,}8016}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{s}{1{,}6274} = 0{,}6145\, s = \dfrac{19{,}6630}{m} \text{ dig.;} \end{cases}$$

cuius apertura denuo aliquantillum maior, eique oculus immediate adplicatur.

VI. Pro gradu claritatis est $y = 1{,}3x = \frac{1{,}3473}{m}$ dig., unde mensura claritatis fit $\frac{26{,}946}{m}$, ita ut, nisi plus quam vicies sexies multiplicare velimus, adhuc plena claritate frui queamus.

SCHOLION

74. En ergo speciem microscopiorum simplicium, quae maximam attentionem mereri videtur, cum sine detrimento claritatis obiecta multo distinctius repraesentabunt, quam vulgo fieri solet. Interim tamen fateri cogimur haec instrumenta non ad praegrandes multiplicationes adplicari posse; si enim multiplicationem $m = 100$ desideremus, lentes quidem adhuc facile parari possent, sed distantia obiectorum fieret tantum $\frac{6}{100}$ dig., quae distantia utique nimis parva fieri posset, praecipue si obiecta non fuerint admodum laevia. Ceterum multiplicatio ad 150 vel 200 fortasse posset urgeri, si summa necessitas postularet. Deinceps autem eiusmodi microscopia composita proferemus, quae non solum aeque clare et distincte obiecta repraesentent, sed etiam maiorem elongationem obiectorum admittant. Quoniam autem in hoc capite lentes tantum convexas sumus contemplati, nunc etiam lentes concavas introducamus, quibus adeo effici poterit, ut confusio penitus evanescat; sed aliud incommodum exsecutionem turbabit, dum scilicet lentibus nimis exiguis erit opus, quemadmodum in capite sequente videbimus.

ANNOTATIO

75. In hoc exemplo singulari attentione dignum evenit, ut formula pro confusione prodierit negativa; evidens autem est eam sive maiorem sive minorem prodituram fuisse, si litterae η alius valor fuisset tributus; quin etiam haec confusio plane ad nihilum reduceretur, si η ita acciperetur, ut fieret haec formula:

$$4 + \frac{7}{2}\eta - \nu(20 + 7\eta) = 0;$$

unde pro casu exempli sequeretur

$$\eta = \frac{8}{7} \cdot \frac{5\nu - 1}{1 - 2\nu} = \frac{1,3040}{3,7436} = 0,34833;$$

hoc est propemodum, si sumsissemus $\eta = \frac{1}{3}$. Praeterea vero alio modo haec confusio ad nihilum reduci posset, si scilicet pro prima lente numerum λ non unitati aequalem, sed $\lambda = 1 + \omega$ posuissemus; tum enim in formula illa primus terminus 4 particula ω augeri deberet, ita ut prodiret in casu exempli ω — 0,2776, unde foret $\omega = 0,2776$ primaque lens ex numero $\lambda = 1 + \omega = 1,2776$ construi deberet reliquarum lentium constructione eadem relicta. Pro prima igitur hac lente substitui poterit haec constructio ob $\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 0,4768$:

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{-p}{4,1194 - 0,4768} = \dfrac{-p}{3,6426} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{5,9375 - 0,4768} = \dfrac{p}{5,4607} \end{cases}$$

seu

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0,27453p = -\dfrac{6,758}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = +\,0,18312p = +\dfrac{4,508}{m} \text{ dig.}; \end{cases}$$

quodsi ergo haec lens in exemplo allato loco primae lentis substituatur, reliquis omnibus servatis his microscopiis adhuc maior perfectionis gradus conciliabitur, praecipue cum iam prima lens maiorem aperturam admittat.

CAPUT III

DE MICROSCOPIIS SIMPLICIBUS AB OMNI PLANE CONFUSIONE IMMUNIBUS SIVE EX EODEM SIVE EX DIVERSO VITRI GENERE CONSTANTIBUS

PROBLEMA 1

76. *Si microscopium duabus lentibus priore concava, posteriore vero convexa proxime inter se iungendis constet, efficere, ut confusio ab apertura oriunda penitus destruatur.*

SOLUTIO

Quoniam hic duae tantum lentes occurrunt, earum intervallum $= Aa\left(1-\frac{1}{P}\right)$ statuatur minimum $= \eta a$ hincque fiet $P = \frac{A}{A-\eta}$; deinde cum distantiae focales sint

$$p = \mathfrak{A}a \quad \text{et} \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a,$$

ob lentem priorem concavam debet esse $\mathfrak{A}$ negativum hincque etiam $A<0$; quare secunda lens sponte fit convexa ob $\mathfrak{B}=1$. Multiplicatio porro ita exprimetur, ut sit $m = P\cdot\frac{h}{a}$; unde colligitur distantia

$$a = P\cdot\frac{h}{m} = \frac{A}{A-\eta}\cdot\frac{h}{m},$$

ita ut distantia obiecti etiam minor sit capienda quam $\frac{h}{m}\cdot$ Nunc ut confusio

ab apertura oriunda ad nihilum redigatur, huic aequationi satisfieri oportet:

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{\lambda'}{A^3P}=0,$$

siquidem ambae lentes ex eodem vitro conficiantur. Sin autem ex diverso vitro parentur, pro secunda lente loco μ scribatur μ' et habebitur haec aequatio:

$$\frac{\mu\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\mu\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{\mu'\lambda'}{A^3P}=0.$$

Quem casum hic evolvamus, quandoquidem casus vix fit complicatior, atque ex hac aequatione definire poterimus sive λ sive λ'; fiet scilicet

$$\text{vel}\quad \lambda=\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{(1-\mathfrak{A})^3}{P}\cdot\lambda'-\nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})$$

$$\text{vel}\quad \lambda'=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{P}{(1-\mathfrak{A})^3}\cdot\lambda+\frac{\mu\nu}{\mu'}\cdot\frac{P\mathfrak{A}}{(1-\mathfrak{A})^2},$$

ita ut littera $\mathfrak{A}$ adhuc arbitrio nostro relinquatur, dummodo negative capiatur; quare hanc litteram ita definire licebit, ut etiam altera confusio a diversa refrangibilitate oriunda tollatur; quem in finem si, ut supra fecimus, pro prima lente statuatur $\frac{dn}{n-1}=N$ et pro secunda $\frac{dn'}{n'-1}=N'$, huic aequationi erit satisfaciendum:

$$0=N\cdot\frac{1}{\mathfrak{A}}-\frac{N'}{P}\cdot\frac{1}{A},$$

ex qua colligitur

$$\frac{\mathfrak{A}}{A}=\frac{N}{N'}\cdot P=1-\mathfrak{A},$$

ita ut ob $P=1$ proxime fiat

$$\mathfrak{A}=1-\frac{N}{N'}=\frac{N'-N}{N'},$$

qui valor cum esse debeat negativus, necesse est, ut sit $N'<N$.

Sumamus igitur priorem lentem concavam ex vitro crystallino, posteriorem vero ex vitro coronario confici et ob $N:N'=10:7$ fiet $\mathfrak{A}=-\frac{3}{7}$, quo valore contenti esse possumus. Sin autem exactiorem desideremus, loco P eius valorem substituamus et nostra aequatio fiet

$$0=\frac{10}{\mathfrak{A}}-7\frac{(A-\eta)}{A^2}=10A(A+1)-7(A-\eta),$$

quae sumto ut ante $\eta = \frac{1}{5}$ dabit

$$A = -\frac{3}{20} \mp \sqrt{\frac{9}{400} - \frac{7}{50}};$$

qui valor manifesto est imaginarius, ita ut huic conditioni satisfieri nequeat, nisi distantia ηa multo minor capiatur, scilicet sumi deberet $\eta < \frac{1}{31}$; quia autem tantilla distantia in tam exiguis lenticulis locum habere nequit, etiam hanc conditionem perfecte implere non licebit. Contentos igitur nos esse oportebit valore saltim prope satisfaciente, praecipue cum ipsa rei natura non permittat, ut huic conditioni plene satisfaciamus; ac sumamus, ut ante repperimus

$$\mathfrak{A} = -\frac{3}{7}, \quad \text{ut sit} \quad A = -\frac{3}{10}$$

hincque

$$P = \frac{3}{3 + 10\eta}$$

hincque distantiae focales

$$p = -\frac{3}{7}a = \frac{-9}{21 + 70\eta} \cdot \frac{h}{m}, \quad q = \frac{3}{10} \cdot \frac{h}{m}.$$

Pro confusione autem tollenda sumi debebit

$$\lambda = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{10^3}{7^3} \cdot \frac{3 + 10\eta}{3} \cdot \lambda' + \frac{30}{49}\nu;$$

in qua forma si sumatur $\lambda' = 1$ et litterae μ, μ' et ν convenienter assumantur, reperietur

$$\lambda = \frac{0,9875}{0,8724} \cdot \frac{10^3}{7^3} \cdot \frac{3 + 10\eta}{3} + \frac{30}{49} \cdot 0,2529 = 3,3001\left(1 + \frac{10}{3}\eta\right) + \frac{30}{49} \cdot 0,2529$$
$$= 3,3001 + 11,0003\eta + 0,155$$

seu

$$\lambda = 3,4551 + 11,0003\eta,$$

ex quo constructio prioris lentis peti debet.

COROLLARIUM 1

77. Cum sit

$$a = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{h}{m} = \frac{3}{3 + 10\eta} \cdot \frac{h}{m},$$

patet distantiam obiecti notabiliter hic minorem fore quam casu lentis simplicis, ubi erat $a = \frac{h}{m}$; nam si sumamus $\eta = \frac{1}{5}$, prodit $a = \frac{3}{5} \cdot \frac{h}{m}$ neque vero pro η minor valor accipi poterit.

COROLLARIUM 2

78. Hoc ergo modo prius eorum incommodorum in vicinitate obiecti consistens, quae supra commemoravimus, haud mediocriter augetur, posterius vero hic quidem penitus tolletur sublata confusione ab apertura oriunda; verum distantiae focales lentium tam fiunt exiguae, ut posito $\eta = \frac{1}{5}$ prodeat

$$p = -\frac{9}{35} \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad q = \frac{3}{10} \cdot \frac{h}{m},$$

cum pro lente simplici fuisset $p = \frac{h}{m}$.

SCHOLION

79. Deinde etiam hoc non parum obstat, quod, etiamsi duas vitri species adhibeamus, tamen altera confusio tolli nequeat atque adeo ad valores imaginarios perveniatur; unde hac specie repudiata ad alteram evolvendam progrediamur, qua lens posterior concava assumitur.

PROBLEMA 2

80. *Si microscopium constet duabus lentibus, quarum prior convexa, posterior vero concava, efficere, ut confusio ab apertura oriunda evanescat.*

SOLUTIO

Posito lentium intervallo $= \eta a$ fiet ut ante $P = \frac{A}{A - \eta}$, et cum sint distantiae focales $p = \mathfrak{A} a$ et $q = -\frac{A}{P} \cdot a$, tam $\mathfrak{A}$ quam A erunt numeri positivi ideoque $\mathfrak{A} < 1$. Multiplicatio vero dabit

$$m = P \cdot \frac{h}{a} \quad \text{seu} \quad a = P \cdot \frac{h}{m} = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

Confusio autem ab apertura oriunda, si ambas lentes iterum ut ex diverso

vitro factas consideremus, evanescet, si fuerit ut ante

$$\text{vel}\quad \lambda = \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{(1-\mathfrak{A})^3}{P}\cdot\lambda' - \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})$$

$$\text{vel}\quad \lambda' = \frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{P}{(1-\mathfrak{A})^3}\cdot\lambda + \frac{\mu\nu}{\mu'}\cdot\frac{P\mathfrak{A}}{(1-\mathfrak{A})^2},$$

adeoque adeo altera confusio evanescit, si fuerit

$$0 = N\cdot\frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{N'}{P}\cdot\frac{1}{A}$$

hincque

$$\frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{N}{N'}\cdot P = 1-\mathfrak{A};$$

unde, quia $\mathfrak{A} < 1$ et $1-\mathfrak{A} < 1$, debet esse $N' > N$, quamobrem hic lentem primam ex vitro coronario, secundam vero concavam ex crystallino parari conveniet, ita ut fiat $1-\mathfrak{A} = \frac{7}{10}P$, ad quod requiritur, ut sit $\frac{7}{10}P < 1$, quod ideo notari oportet, quia $P > 1$; seu esse debet $P < \frac{10}{7}$ ideoque $\frac{A}{A-\eta} < \frac{10}{7}$, consequenter $\frac{\eta}{A} < \frac{3}{10}$. Huic igitur aequationi si adcurate satisfacere velimus, debet esse $\frac{\eta}{A} < \frac{3}{10}$; unde, si sumamus $\frac{\eta}{A} = \frac{1}{4}$, fiet $P = \frac{4}{3}$ hincque $1-\mathfrak{A} = \frac{14}{15}$ et $\mathfrak{A} = \frac{1}{15}$ ideoque $A = \frac{1}{14}$ et $\eta = \frac{1}{56}$, ex quo distantia lentium prodit $\eta a = \frac{1}{56}a = \frac{h}{42\,m}$; quia autem in praecedente capite assumsimus circiter intervallum $\eta a = \frac{1}{5}\cdot\frac{h}{m}$, patet tam exiguum intervallum in praxi locum habere non posse, ita ut nostro casu alteram confusionem tollere non liceat. Prorsus igitur isti conditioni renunciare oportet, ita ut iam perinde sit, sive lentes ex eodem vitro sive diverso conficiantur; fiant igitur ex eodem vitro quocunque, ita ut sit $\mu' = \mu$, et pro prima confusione tollenda, quoniam $\mathfrak{A}$ non nimis parvum sumi convenit, statuamus $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$ hincque $A = 1$; unde fit

$$P = \frac{1}{1-\eta}\quad\text{et}\quad a = \frac{1}{1-\eta}\cdot\frac{h}{m}\quad\text{et}\quad p = \frac{a}{2}\quad\text{et}\quad q = -(1-\eta)a.$$

Quodsi nunc statuamus $\eta a = \frac{1}{5}p$, sumi oportebit $\eta = \frac{1}{10}$ sicque fiet

$$P = \frac{10}{9},\quad a = \frac{10}{9}\cdot\frac{h}{m},\quad p = \frac{5}{9}\cdot\frac{h}{m}\quad\text{et}\quad q = -\frac{h}{m}.$$

Confusio prior itaque evanescit, si sit

$$\lambda' = \frac{80}{9}\lambda + \frac{20}{9}\nu;$$

unde facile erit lentes construere.

COROLLARIUM 1

81. Pro lentium igitur constructione, si vitrum adhibeatur commune, pro quo est $n = 1{,}55$ et $\nu = 0{,}2326$, si sumatur $\lambda = 1$, erit

$$\lambda' = 9{,}406, \quad \text{unde fit} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 2{,}6242\text{[1]}.$$

COROLLARIUM 2

82. Pro prima igitur lente, cuius distantia focalis est $p = \frac{5}{9}\cdot\frac{h}{m} = \frac{40}{9m}$ dig. ob $h = 8$ dig. numerique $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 1$, habebitur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{0{,}9090} = 1{,}1001\,p = \dfrac{4{,}89}{m}\ \text{dig.}\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{0{,}9090} = 1{,}1001\,p = \dfrac{4{,}89}{m}\ \text{dig.},\end{cases}$$

ita ut haec lens sit utrinque aequaliter convexa.

COROLLARIUM 3

83. Pro altera lente concava, cuius distantia focalis $q = -\frac{8}{m}$ dig. et numeri $\mathfrak{B} = 1$ et $\lambda' = 9{,}406$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{q}{\varrho + \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{q}{2{,}8149} = +\,0{,}35525\,q = -\dfrac{2{,}84}{m}\ \text{dig.}\text{[2]}\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\sigma - \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{-q}{0{,}9968} = -\,1{,}00321\,q = +\dfrac{8{,}03}{m}\ \text{dig.}\text{[3]}\end{cases}$$

---

1) Editio princeps: 2,7758; hic valor autem non est $\tau\sqrt{(\lambda' - 1)}$, sed $\tau\sqrt{\lambda'}$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: $\frac{q}{2{,}9665} = 0{,}33710\,q = -\frac{2{,}70}{m}$ dig. Correxit E. Ch.

3) Editio princeps: $\frac{-q}{1{,}1484} = -\,0{,}87288\,q = \frac{6{,}98}{m}$ dig. Correxit E. Ch.

COROLLARIUM 4

84. Intervallum inter has duas lentes statui ergo debebit

$$\eta a = \frac{1}{9} \cdot \frac{h}{m} = \frac{0{,}889}{m} \text{ dig.},$$

obiectum autem ante lentem priorem est collocandum ad distantiam

$$a = \frac{80}{9m} \text{ dig.} = \frac{8{,}89}{m} \text{ dig.};$$

quod autem ad aperturam attinet, eam ex minimo radio ambarum lentium definiri oportet sicque eius semidiameter sumi poterit

$$x = \frac{0{,}71}{m} \text{ dig.} = \frac{5}{7m} \text{ dig.}^{1})$$

Hinc pro claritate fiet $y = \frac{hx}{ma} = \frac{3}{5m}$, unde mensura claritatis, ut supra est stabilita, $= \frac{12}{m}$.

SCHOLION

85. His ergo microscopiis priori incommodo supra memorato medela affertur, dum obiectum ad maiorem distantiam removere licet; contra vero, quia lentes multo minores requiruntur, quae propterea non nisi minorem aperturam admittunt, claritas minor prodire debet, qui defectus ea qualitate, quod confusio prior penitus tollitur, vix compensari videtur. Maximum vero lucrum in hoc sine dubio situm esset futurum, si etiam alteram confusionem tollere licuisset, quandoquidem solis lentibus convexis adhibendis de hoc ne cogitari quidem poterat. Quoniam igitur hoc lucrum duabus lentibus obtineri non potest, examinemus casum trium lentium, inter quas una sit concava, quae, uti facile ex praecedentibus intelligitur, ex vitro crystallino parari debet, dum reliquae ex coronario conficiuntur; tum vero etiam nullum dubium superesse potest, quin hanc lentem concavam loco tertio constitui conveniat.

---

1) Editio princeps: $x = \frac{0{,}67}{m}$ dig. $= \frac{2}{3m}$ dig. Vide notam 2 p. 271. Correxit E. Ch.

PROBLEMA 3

86. *Si microscopium constet tribus lentibus, inter quas tertia sit concava, binae anteriores vero convexae, efficere, ut confusio ab apertura oriunda penitus destruatur.*

SOLUTIO

Ponantur iterum bina intervalla inter has lentes utrumque $=\eta a$ ac habebimus uti in problemate 2 capitis praecedentis

$$P=\frac{A}{A-\eta}, \quad Q=\frac{(A-\eta)B}{(A-\eta)B+\eta}.$$

Tum vero, cum distantiae focales sint

$$p=\mathfrak{A}a, \quad q=-\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a \quad \text{et} \quad r=\frac{AB}{PQ}\cdot a,$$

primo debebit esse $\mathfrak{A}>0$, et quia est

$$\frac{q}{r}=-\frac{Q\mathfrak{B}}{B},$$

ob $q>0$ et $r<0$ debebit esse

$$\frac{\mathfrak{B}}{B}>0 \quad \text{sive} \quad 1-\mathfrak{B}>0 \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B}<1.$$

His autem conditionibus duplici modo satisfieri potest:

I. Si $\mathfrak{A}<1$ ideoque $A>0$; atque fiet $\mathfrak{B}<0$ et $B<0$.

II. Si $\mathfrak{A}>1$ hincque $A<0$, fiet $B>0$ et $\mathfrak{B}>0$, attamen $\mathfrak{B}<1$.

Priore casu prodit $P>1$ et $Q>1$, posteriore vero casu fit $P<1$ et $Q>1$. Utrum autem PQ fiat maius an minus unitate, non definitur. Multiplicatio m autem dabit $a=PQ\cdot\frac{h}{m}$, pro qua conducit, ut PQ notabiliter unitatem superet, quod evenit casu priore, ubi est $P>1$ et $Q>1$.

Nunc vero incipiamus a confusione posteriore ad nihilum redigenda, quae praebet hanc aequationem, quandoquidem assumimus $N'=N$ pro vitro coronario, dum N'' ad vitrum crystallinum referatur:

$$0=N\cdot\frac{1}{\mathfrak{A}}-\frac{N}{P}\cdot\frac{1}{A\mathfrak{B}}+\frac{N''}{PQ}\cdot\frac{1}{AB}.$$

Si igitur duae priores lentes convexae ex vitro coronario, tertia vero ex crystallino sint factae, ut sit $N : N'' = 7 : 10$, habebitur

$$0 = \frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{1}{PA\mathfrak{B}} + \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{PQAB};$$

in qua si loco P et Q valores ante inventi substituantur, prodibit

$$0 = \frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{A-\eta}{A^2\mathfrak{B}} + \frac{10}{7} \cdot \frac{(A-\eta)B+\eta}{A^2B^2},$$

quae aequatio evoluta abibit in hanc formam:

$$0 = A^2B^2 + \frac{3}{7}AB + \eta\left(B^2 - \frac{3}{7}B + \frac{10}{7}\right),$$

unde patet, si esset $\eta = 0$, fore $AB = -\frac{3}{7}$ ideoque $r = -\frac{3}{7PQ} \cdot a$, ita ut sit $-r < \frac{3}{7}a$ ob $PQ > 1$. Sed quia casus $\eta = 0$ locum habere nequit, dum potius huic litterae valor satis modicus tribui debet, tribuatur aequationi inventae haec forma:

$$A^2B^2 + \frac{3}{7}AB + \frac{9}{196} = \left(AB + \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{9}{196} - \eta\left(B^2 - \frac{3}{7}B + \frac{10}{7}\right),$$

ubi evidens est litteram η maiorem esse non posse quam

$$\frac{9}{196\left(B^2 - \frac{3}{7}B + \frac{10}{7}\right)},$$

siquidem haec altera confusio prorsus debeat evanescere; qui limes cum sit valde exiguus, statuamus

$$\eta = \frac{9}{28(7B^2 - 3B + 10)}$$

fietque $AB = -\frac{3}{14}$ sicque r duplo minor quam ante, id quod praxi maxime obest. Cum autem non absolute necessarium sit istam confusionem prorsus ad nihilum redigere, res ita poterit proponi, ut posito $AB = -\frac{3}{14}$ pro η tantus capiatur valor, quam circumstantiae permittunt, etiamsi is maior sit futurus limite hic praescripto.

His observatis tandem prior confusio ad nihilum redigatur, id quod fit ope huius aequationis:

$$0 = \frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{1}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{\mu''}{\mu} \cdot \frac{\lambda''}{A^3B^3PQ},$$

ex qua numerus λ'' definiri conveniet sumtis $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$.

COROLLARIUM 1

87. Utcunque igitur intervallum ηa assumatur, haec microscopia semper isto defectu laborabunt, ut tertia lens fiat nimis parva, scilicet fere quintuplo minor, quam si lente simplici uteremur. Quare cum parvitas lentis maiores multiplicationes impedivisset, hic casus multo minus erit aptus maioribus multiplicationibus producendis.

COROLLARIUM 2

88. Deinde etiam limes praescriptus pro η nimis parvum praebet valorem, quam ut in praxi locum habere possit, etiamsi littera B arbitrio nostro permittatur; valor enim ex illo limite deductus

$$\eta = \frac{9}{28(7B^2 - 3B + 10)}$$

maximum adipiscitur valorem, si capiatur $B = \frac{3}{14}$, qui propterea erit $\eta = \frac{9}{271}$ seu proxime $\eta = \frac{1}{30}$, qui manifesto nimis est parvus, quam ut in praxi admitti possit.

SCHOLION 1

89. Parum igitur fructus haec microscopiorum species pollicetur, etiamsi utramque confusionem ad nihilum redigere liceat, cum, utcunque litterae A et B definiantur, tam ipsae lentes nimis prodeunt exiguae quam lentium intervalla nimis parva. Sin autem confusionem a diversa refrangibilitate oriundam non curare velimus, egregia hinc microscopia deducere licebit, inter quae sequens potissimum species nostram attentionem mereri videtur.

Statuatur scilicet $\mathfrak{A} = 1$, ut sit $A = \infty$; sumatur porro $B = 0$, ita ut sit $AB = -\theta$, hincque elementa nostra ita definiantur:

$$P = 1, \quad Q = \frac{\theta}{\theta - \eta}$$

et

$$p = a, \quad q = \theta a \quad \text{et} \quad r = -(\theta - \eta)a,$$

ubi θ facile ita sumi potest, ut hae distantiae focales non fiant nimis parvae atque η etiam nostro arbitrio permittatur. Tum vero erit distantia

$$a = \frac{\theta}{\theta - \eta} \cdot \frac{h}{m}.$$

Nunc autem perinde erit, sive omnes lentes ex eodem vitro sive ex diverso parentur; interim tamen si θ non multum a valore supra dato $\frac{3}{14}$ abludat, non parum lucri consequemur, si tertiam lentem ex vitro crystallino paremus, dum binae anteriores ex vitro coronario conficiuntur, quippe quo facto altera confusio saltim diminuetur. Tum autem pro ipsa lentium constructione haec aequatio est resolvenda:

$$0=\lambda+\frac{\lambda'}{\theta^3}-\frac{0{,}8724}{0{,}9875}\cdot\frac{\lambda''(\theta-\eta)}{\theta^4},$$

unde sumtis $\lambda=1$ et $\lambda'=1$ colligitur

$$\lambda''=\frac{0{,}9875}{0{,}8724}\cdot\frac{\theta^4}{\theta-\eta}\left(1+\frac{1}{\theta^3}\right),$$

cuius solutionis exemplum afferre non pigebit.

EXEMPLUM

90. Sumatur $\eta=\frac{1}{5}$ et sit $\theta=1$; atque hinc habebimus

$$P=1,\quad Q=\frac{1}{1-\eta}=\frac{5}{4},$$
$$p=a,\quad q=a,\quad r=-\frac{4}{5}a$$

existente $a=\frac{5}{4}\cdot\frac{h}{m}\cdot$ Tum vero aequatio resolvenda pro hoc casu dabit

$$\lambda''=\frac{0{,}9875}{0{,}8724}\cdot\frac{5}{2}=2{,}8300;$$

ex quo pro vitro crystallino colligitur

$$\tau\sqrt{\lambda''-1}=1{,}1870.$$

Unde obtinetur sequens constructio microscopii trilenticularis.

I. Prima lens ex vitro coronario paratur; cuius distantia focalis cum sit

$$p=a=\frac{5}{4}\cdot\frac{h}{m}=\frac{10}{m}\text{ dig.}$$

et numeri $\mathfrak{A}=1$ et $\lambda=1$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &=\dfrac{p}{\varrho}=\dfrac{p}{0{,}2267}=4{,}4111p=\dfrac{44{,}11}{m}\text{ dig.}\\[2ex] \text{posterioris} &=\dfrac{p}{\sigma}=\dfrac{p}{1{,}6601}=0{,}6024p=\dfrac{6{,}02}{m}\text{ dig.}\end{cases}$$

II. Pro secunda lente etiam ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis est

$$q = a = \frac{5}{4} \cdot \frac{h}{m} = \frac{10}{m} \text{ dig.}$$

et numeri $\mathfrak{B} = 0$ et $\lambda' = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{\sigma} = \dfrac{q}{1,6601} = 0,6024\, q = \dfrac{6,02}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\varrho} = \dfrac{q}{0,2267} = 4,4111\, q = \dfrac{44,11}{m} \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Pro tertia lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est

$$r = -\frac{4}{5} a = -\frac{h}{m} = -\frac{8}{m} \text{ dig.}$$

et numeri $\mathfrak{C} = 1$ et $\lambda'' = 2,8300$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{r}{\varrho + \tau\sqrt{(\lambda'' - 1)}} = \dfrac{r}{1,3284} = 0,75278\, r = -\dfrac{6,02}{m} \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = \dfrac{r}{\sigma - \tau\sqrt{(\lambda'' - 1)}} = \dfrac{r}{0,3957} = 2,5272\, r = -\dfrac{20,22}{m} \text{ dig.} \end{cases}$$

IV. His lentibus confectis intervallum inter binas statuatur

$$= \frac{1}{5} a = \frac{2}{m} \text{ dig.}$$

et obiectum exponatur ad distantiam $a = \frac{10}{m}$ dig.

V. Cum confusio prior sit nulla, his lentibus tanta apertura tribui potest, quantam earum figura permittit; quare, cum minimus radius sit $\frac{6,02}{m}$ dig., statuatur semidiameter aperturae $x = \frac{1,50}{m}$ dig., unde pro claritate erit

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{4}{5} x = \frac{1,20}{m} \text{ dig.}$$

hincque mensura claritatis $= 20\, y = \frac{24,0}{m}$ denotante 1 claritatem plenam.

SCHOLION 2

98[1]). Si hanc speciem cum iis, quas in praecedente capite invenimus comparemus, haec species praerogativam meretur tam ratione distantiae

1) In editione principe loco numerorum 91 et qui sequuntur falso numeri 98 et qui sequuntur scripti sunt. E. Ch.

obiecti, quippe quae hic est aliquanto maior, quam ob eam causam, quod hic etiam altera confusio non mediocriter diminuatur, quae ante ne in computum quidem est ducta. Verum si ad magnitudinem lentium attendamus, illae species, quae praecipue quatuor lentibus constant, longe anteferri merentur, cum ibi lentium distantiae focales multo sint maiores ideoque ea microscopia ad multo maiores multiplicationes accommodari possint, nisi forte nimia obiecti vicinitas obstaret. Neque igitur opus esse censeo hanc tractationem adhuc ad plures lentes extendere, cum vix maior perfectio in microscopiis simplicibus exspectari queat. Quare si quis maiores perfectiones desideret, necessario ad microscopia vere composita confugere debebit, quandoquidem hac compositione binis supra memoratis incommodis erit occurrendum. Primo scilicet, ut non opus sit obiecta tam prope admovere, deinde ut non tam exiguis lenticulis indigeamus, etiamsi multiplicationem maximam requiramus; in hoc enim microscopia composita potissimum simplicibus antecellunt, ut eorum ope multiplicatio quantumvis magna produci queat.

SECTIO SECVNDA.

DE

MICROSCOPIIS COMPOSITIS,

IN QVIBVS NVLLA IMAGO REALIS OCCVRRIT.

PROBLEMA 1

99. *Datis tam multiplicatione m quam distantia obiecti ante lentem obiectivam microscopium ex duabus lentibus construere, quarum obiectiva sit convexa, ocularis vero concava.*

SOLUTIO

Cum distantia obiecti a detur aeque ac multiplicatio m, casus duarum lentium statim praebet hanc aequationem $m = P \cdot \frac{h}{a}$; unde definitur

$$P = \frac{ma}{h};$$

hinc distantiae focales ambarum lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{Ah}{m};$$

unde patet tam $\mathfrak{A}$ quam A esse debere positiva, ad quod sufficit, ut A sit positivum. Intervallum vero lentium erit

$$= Aa\left(1 - \frac{h}{ma}\right) = \frac{A}{m}(ma - h),$$

ex quo perspicuum est esse debere $ma > h$ seu $m > \frac{h}{a}$; alioquin enim huiusmodi microscopia locum habere non possent. Deinde pro spatio in obiectis conspicuo habebimus eius semidiametrum

$$z = a\Phi = \frac{\mathfrak{q}}{ma - h} \cdot ah\xi.$$

Si igitur sumamus $\xi = \frac{1}{4}$ et $\mathfrak{q} = 1$, qui est casus, quo lens ocularis maximam

aperturam admittit ideoque utrinque aeque est concava, tum ergo erit

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{ah}{ma - h}.$$

Quod vero ad locum oculi attinet, ex superioribus formulis generalibus colligimus

$$O = \frac{\mathfrak{q}b}{Ma} \cdot \frac{h}{m};$$

est vero

$$b = -\frac{\alpha}{P} = -\frac{Ah}{m}$$

et

$$M = \frac{\mathfrak{q}}{ma - h} \cdot h$$

sicque fit

$$O = -\frac{Ah(ma - h)}{m^2 a};$$

quae distantia cum sit negativa, oculum lenti oculari immediate adplicari oportet; unde ut margo coloratus evanescat, satisfieri debet huic aequationi:

$$0 = N(A + 1)\mathfrak{q};$$

quod cum fieri nequeat, perspicuum est marginem coloratum neutiquam tolli posse; multo minus ergo haec confusio posterior penitus tolli poterit; prior autem confusio insensibilis reddetur ope huius aequationis:

$$\frac{mx^3}{a^2 h}\left(\mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right) - \frac{\mu'\lambda'}{A^3 P}\right) = \frac{1}{k^3},$$

quae ergo abit in hanc formam:

$$\frac{mx^3}{a^2 h}\left(\mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right) - \frac{\mu' h\lambda'}{A^3 ma}\right) = \frac{1}{k^3};$$

ubi cum lens ocularis debeat esse utrinque aequaliter concava, si pro ea vitri specie, ex qua lens ocularis conficitur, capiantur numeri respondentes ϱ', σ' et τ', erit $\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma' - \varrho'}{2\tau'}\right)^2$. Ex hac autem aequatione definiri debet semidiameter aperturae lentis obiectivae x, erit scilicet

$$x\sqrt[3]{\left(\mu m\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right) - \frac{\mu' h\lambda'}{A^3 a}\right)} = \frac{1}{k}\sqrt[3]{a^2 h},$$

nisi forte hinc pro x prodeat valor maior, quam lentis figura permittit; hinc ergo casus utilissimus foret, si fieri posset

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{h\lambda'}{A^3 a m};$$

ad quod idoneum valorem pro $\mathfrak{A}$ vel A quaeri oporteret, quod quidem pro non adeo magnis multiplicationibus fieri posset; at si multiplicatio m esset praegrandis, deberet $\lambda(1 + A)^3 + \nu A(A + 1)$ aequari fractioni valde parvae, quod, cum $A > 0$, fieri non potest. Quicquid autem sit, invento valore ipsius x gradus claritatis erit $y = \frac{hx}{ma}$ et mensura claritatis $= \frac{20hx}{ma}$; unde eo magis curandum est, ut x non nimis parvum adipiscatur valorem.

COROLLARIUM 1

100. Hinc patet, ut x maiorem nanciscatur valorem, plurimum conducere, ut litterae A parvus tribuatur valor[1]); sed hunc valorem nimis parvum assumere non licet, quia tum lens ocularis nimis fieret parva, ita ut A vix unitate minus accipi conveniat.

COROLLARIUM 2

101. Cum formula $\lambda(1 + A)^3 + \nu A(A + 1)$ certe sit unitate maior, quia λ unitate minus esse nequit, atque adeo ultra 8 exsurgere debeat, haec confusio penitus tolli non poterit, nisi haec formula $\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{h\lambda'}{ma}$ quoque 8 superet, hoc est, nisi ob $\frac{\mu'}{\mu} = 1$ proxime fuerit

$$\frac{h\lambda'}{ma} > 8 \quad \text{seu} \quad m < \frac{h\lambda'}{8a}.$$

COROLLARIUM 3

102. Haec clariora fient, si posito $h = 8$ dig. sumamus $a = \frac{1}{4}$ dig.; et cum sit circiter $\lambda' = \frac{3}{2}$, limes modo inventus daret $m < 6$; quae multiplicatio tam exigua ne huiusmodi quidem microscopiis produci potest, quare nunc pro certo affirmare licet istam confusionem neutiquam tolli posse.

1) Hoc falsum est; contrarium valet. Vide § 103. E. Ch.

EXEMPLUM 1

[102a][1]. Si distantia obiecti debeat esse $\frac{1}{4}$ dig. et ambae lentes ex vitro communi $n=1,55$ parentur, tum vero statuatur $A=1$ hincque $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}$, habebimus primo distantias focales lentium

$$p=\frac{1}{2}a=\frac{1}{8}\text{ dig.}\quad \text{et}\quad q=-\frac{8}{m}\text{ dig.}$$

lentiumque intervallum

$$=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{4}m-8\right)=\frac{1}{4}-\frac{8}{m}\text{ dig.}$$

Spatium vero in obiecto conspicuum erit

$$z=\frac{2}{m-32}\text{ dig.}$$

Denique si ut hactenus sumamus $k=20$, postrema aequatio erit

$$x\sqrt[3]{\mu(8\lambda m+2\nu m-32\lambda')}=\frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Hic autem, ut iam saepe vidimus, est $\lambda'=1,6299$; praeterea vero cum sit $\lambda=1$ et proxime $\mu=1$, inveniemus

$$x=\frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{16,9304m-104,3136}}.$$

Si ergo fuerit $m=100$, fiet primo

$$p=\frac{1}{8}\text{ dig.}\quad \text{et}\quad q=-\frac{2}{25}\text{ dig.}$$

et lentium intervallum

$$=\frac{17}{100}\text{ dig.}$$

et

$$z=\frac{1}{34}\text{ dig.},$$

tum vero

$$x=0,0043\text{ dig.},$$

unde fit

$$y=\frac{32}{100}x=0,0014\text{ dig.}$$

et mensura claritatis 0,028, quae circiter triplo minor est quam in microscopio fere simplici.

---

1) In editione principe huius et sequentis paragraphi numeri omissi sunt, quare hic numero praecedentis paragraphi adiectis litteris a et b designantur. E. Ch.

EXEMPLUM 2

[102b].[1]) Maneant omnia uti in exemplo praecedente, praeterquam quod litterae A valor multo maior tribuatur, ut videamus, quomodo confusio tum futura sit comparata. Statuatur ergo $A = 5$ fietque $\mathfrak{A} = \frac{5}{6}$ et distantiae focales erunt

$$p = \frac{5}{6}a, \quad q = -5 \cdot \frac{h}{m},$$

quia ut ante manet

$$P = \frac{ma}{h},$$

et lentium intervallum

$$= \frac{5}{m}(ma - h);$$

tum vero pro spatio conspicuo erit

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{ah}{ma - h}$$

ut ante. Ut denique confusio non sentiatur, debet esse

$$x\sqrt[3]{\mu\left(\frac{216\lambda m}{125} + \frac{6\nu m}{25} - \frac{8\lambda'}{125a}\right)} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{a^2}.$$

Sumto igitur iterum $a = \frac{1}{4}$ dig., $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1{,}6299$, siquidem ambae lentes ex vitro communi $n = 1{,}55$ conficiantur, et posito $\mu = 1$ habebitur

$$x = \frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{3{,}568m - 0{,}8344}}.$$

Si ergo fuerit $m = 100$, fiet

$$p = \frac{5}{24}\text{ dig.} \quad \text{et} \quad q = -\frac{2}{5}\text{ dig.}$$

et lentium intervallum

$$= \frac{17}{20}\text{ dig.}$$

et

$$z = \frac{1}{34}\text{ dig.}$$

---

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

Tum vero

$$x = \frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{1}{355,966}} = 0,00705 \text{ dig.},$$

unde fit

$$y = 0,00226 \text{ dig.}$$

et mensura claritatis $= 0,0452$.

SCHOLION

103. Si haec duo exempla inter se conferamus, sequentia observanda occurrent:

1. Videmus plurimum interesse, ut litterae A maior valor tribuatur, quia tum expressio pro confusione multo fit minor, ita ut littera x tum maiorem adipiscatur valorem, ex quo simul maior claritas obtinetur; quo maior enim littera A accipitur, eo propius littera $\mathfrak{A}$ ad unitatem accedit, ex quo primus terminus $\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}$ vix unitatem superabit, qui, dum erat $A = 1$, ultra 8 exsurgebat.

2. Deinde etiam valorem ipsius A augendo lens obiectiva fiet maior, dum eius distantia focalis p ad distantiam obiecti a continuo propius accedit.

3. Maximum autem commodum cernitur in lente oculari, quae hoc modo ad lubitum nostrum augeri poterit, quantumvis magna fuerit multiplicatio. Fieri adeo potest, ut haec lens datam distantiam focalem adipiscatur veluti unius digiti; tum scilicet $A \cdot \frac{h}{m}$ ponatur $= 1$ dig. et ob $h = 8$ dig. capi debebit $A = \frac{m}{8}$; tum quidem longitudo instrumenti maior evadet, scilicet $= \frac{1}{8}(ma - h)$, sed vix unquam ea tanta erit, ut non facile tolerari possit.

4. In his quidem exemplis assumsimus distantiam obiecti $a = \frac{1}{4}$ dig., sed nihil impedit, quominus hanc distantiam maiorem assumamus, quo ipso usus horum instrumentorum multo commodior redditur, dum praecipuum commodum, quod a microscopiis compositis exspectamus, in eo est situm, ut non opus sit obiecta tam prope ad instrumentum admovere; quia enim littera a arbitrio nostro permittitur, eam tantam assumere licebit, quantam lubuerit.

5. Verum quo maiorem hanc distantiam a accipiamus, fateri cogimur claritatis gradum inde diminutum iri; quod quo clarius appareat, perpendamus valorem litterae x reliquis litteris iisdem manentibus proportionalem esse formulae $\sqrt[3]{a^2}$ seu potestati $a^{\frac{2}{3}}$, ita ut, quo maior distantia obiecti statuatur,

etiam apertura lentis obiectivae maior sit proditura; quod in se spectatum pro non exiguo commodo est habendum; at pro gradu claritatis, cum sit y formulae $\frac{x}{a}$ proportionalis, claritas proportionalis fiet formulae $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$, ita ut ea decrescat in ratione subtriplicata distantiae obiecti a; verum haec ipsa diminutio non adeo est pertimescenda, dum, si distantiam obiecti adeo octuplo maiorem accipiamus, claritas tantum duplo fit minor, atque ex his perspicuum est, quantopere microscopia composita simplicibus antecellant et quanta commoda ab iis exspectari possint. Interim vero haec species microscopiorum hic tractata adhuc ingenti defectu laborat, quod a margine colorato liberari neutiquam potest. Quocirca videamus, an unam pluresve lentes insuper adiiciendo istud vitium tolli queat.

PROBLEMA 2

104. *Inter lentes obiectivam et ocularem praecedentis microscopiorum speciei novam lentem ita inserere, ut margo coloratus ad nihilum redigatur.*

SOLUTIO

Quoniam igitur hic tres habemus lentes, earum distantiae focales ita erunt expressae:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = \frac{AB}{PQ}\cdot a;$$

quarum cum prima debeat esse convexa, erit $\mathfrak{A} > 0$, et cum tertia debeat esse concava, erit $AB < 0$ ideoque altera litterarum A et B positiva, altera negativa; de lente enim media nihil adhuc definiamus; intervalla porro harum lentium erunt

$$\text{prius } = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) \quad \text{et} \quad \text{posterius } = -\frac{ABa}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right);$$

unde patet esse debere $Q > 1$. Multiplicatio vero m dabit $PQ = \frac{ma}{h}$.

Nunc autem id consideremus, quod nobis est propositum, scilicet ut margo coloratus evanescat. Quoniam distantia oculi O prodit negativa, satis-

fieri oportet huic aequationi:

$$0 = N(A+1)B\mathfrak{r} - \frac{N'}{P}((B+1)\mathfrak{r}+\mathfrak{q}),$$

quem in finem spectetur spatium in obiecto conspicuum, pro quo est

$$z = a\Phi = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{ma-h}\cdot ah\xi;$$

in qua, si lens ocularis utrinque fiat aequalis, ut maximam aperturam admittat, capi poterit $\mathfrak{r}=1$; tum vero posuimus

$$\frac{\mathfrak{q}+1}{ma-h}\cdot h = M,$$

ut sit

$$z = Ma\xi.$$

Nunc igitur primo videndum est, an, si ambae lentes ex eodem vitro parentur, scopum obtinere queamus. Posito igitur $N = N'$ aequatio pro margine nobis dabit

$$B = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{(A+1)P\mathfrak{r}-\mathfrak{r}},$$

qui valor an cum conditione praescripta $AB<0$ consistere possit, videamus. Hunc in finem duos casus perpendamus, alterum, quo $A>0$, alterum vero, quo non solum $A<0$, sed etiam $1+A<0$, ut scilicet prodeat $\mathfrak{A}$ positivum. Priore casu erit $P>1$ ideoque in valore ipsius B denominator fit positivus sicque B positivum habebit valorem, cum tamen ob $AB<0$ negativum esse debeat; altero casu, quo $A<0$, debet esse $P<1$ ideoque denominator $(A+1)P\mathfrak{r}-\mathfrak{r}$ fit negativus, etiamsi $A+1$ non esset negativum, ita ut valor ipsius B hoc casu certo prodeat negativus, cum tamen ob $AB<0$ deberet esse positivus.

At si lentes ex diverso vitro conficiantur, fieri poterit, ut margo coloratus penitus tollatur idque duplici modo, quemadmodum in subiunctis casibus ostendemus. Postquam autem huic conditioni fuerit satisfactum, pro apertura lentis obiectivae indeque pendente claritate sequens habebitur aequatio:

$$\frac{mx^3}{a^2h}\left(\mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right)-\frac{\mu'}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)+\frac{\mu''\lambda''}{A^3B^3PQ}\right)=\frac{1}{k^3},$$

ubi tantum notandum est, ut lens ocularis maximam admittat aperturam, valorem λ'' inde esse datum; pro binis reliquis λ et λ' commode unitas assumitur sicque pro quovis casu problematis nostri solutio facile invenietur.

COROLLARIUM 1

105. Quod ergo hic diverso vitro uti oporteat, id intelligendum est tantum de lente prima et secunda, ad quas litterae N et N' referuntur; pro tertia enim lente vitri ratio, ex quo conficitur, hic plane in computum non ingreditur, ita ut perinde sit, ex quonam vitro haec lens conficiatur.

COROLLARIUM 2

106. Cum igitur pro margine colorato tollendo habeatur ista aequatio

$$N(A+1)BP\mathfrak{r} = N'((B+1)\mathfrak{r}+\mathfrak{q}),$$

hinc deduci debet valor litterae

$$B = \frac{N'(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})}{N(A+1)P\mathfrak{r} - N'\mathfrak{r}};$$

ubi notetur esse $\mathfrak{r}=1$ et $\mathfrak{q}+\mathfrak{r}$ necessario maius nihilo, ut scilicet valor ipsius z prodeat positivus; tum iste valor comparetur cum ea conditione, qua productum AB debet esse negativum, id quod fieri plane non posse, quamdiu litterae N et N' sunt inter se aequales, iam ostendimus.

COROLLARIUM 3

107. Totum ergo negotium iam huc redit, quemadmodum hae duae conditiones impleri queant, dum litterae N et N' diversos obtinent valores, scilicet ut dato valore litterae A altera littera B talem sortiatur valorem, ut earum productum AB fiat negativum, ubi perpendendum est formulam $A(P-1)$ semper positivam esse debere, ita ut sumto A positivo sit $P>1$, sumto autem A negativo capi debeat $P<1$.

SCHOLION

108. Quoniam igitur duabus diversis vitri speciebus uti cogimur, optandum sine dubio esset, ut hae duae species ratione refractionis maxime inter

se differrent; cum autem aliae adhuc eiusmodi species non sint cognitae praeter eas, circa quas DOLLONDUS experimenta sua instituit, easdem quoque nos hic adhibere oportebit. Hactenus quidem litteris N et N', quae his duabus speciebus conveniunt, rationem $7:10$ tribuimus, quae illis experimentis maxime videtur conformis, etiamsi ea satis notabiliter a veritate aberrare possit. Quamobrem ob calculi commoditatem hanc rationem hic potius ut $2:3$ statuamus, quippe quae ab illa minime differt et aliquanto maius discrimen involvit; neque enim hinc aliud est metuendum, si forte error non satis esset exiguus, nisi quod margo coloratus non penitus tolleretur; verum dummodo is multo minor evadat, quam vulgo unicam vitri speciem adhibendo fieri solet, contenti esse poterimus; quem in finem duos casus hic accuratius examinare conveniet, alterum, quo littera A positivum habet valorem, alterum vero, quo negativum, ut inde pateat, quanta commoda hinc in praxi exspectari queant.

EVOLUTIO PRIMI CASUS QUO LITTERAE A VALOR POSITIVUS TRIBUITUR

109. Hoc ergo casu littera $\mathfrak{A}$ valorem quoque positivum habebit et quidem unitate minorem; tum vero conditio lentis ocularis concavae postulat, ut littera B obtineat valorem negativum. Praeterea ob $A > 0$ etiam esse debet $P > 1$, ut intervallum prius fiat positivum. Nunc vero ob marginem coloratum tollendum valor litterae B ita exprimitur, ut sit

$$B = \frac{N'(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})}{N(A+1)P\mathfrak{r} - N'\mathfrak{r}},$$

ubi igitur ob $\mathfrak{q}+\mathfrak{r} > 0$ denominator seu formula $N(A+1)P - N'$ negativum habere debebit valorem; quod ut fieri possit, cum $(A+1)P$ certe sit unitate maius, necesse est, ut fiat $N' > N$ ideoque ut lens obiectiva ex vitro coronario, secunda vero ex crystallino conficiatur. Quare, cum hinc prodeat $N : N' = 2:3$ hincque sit

$$B = \frac{3(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})}{2(A+1)P\mathfrak{r} - 3\mathfrak{r}},$$

oportebit esse

$$2(A+1)P < 3 \qquad \text{sive} \qquad P < \frac{3}{2(1+A)}.$$

Cum autem sit $P > 1$, manifestum est litteram A tam parvam accipi debere,

ut etiam nunc sit

$$\frac{3}{2(1+A)} > 1 \quad \text{ideoque} \quad A+1 < \frac{3}{2} \quad \text{hincque} \quad A < \frac{1}{2};$$

si enim esset $A = \frac{1}{2}$, capi deberet $P = 1$ primumque intervallum plane evanesceret, id quod praxis non patitur; unde simul intelligitur hanc litteram A tanto minorem quam $\frac{1}{2}$ statui debere, ut etiam nunc intervallum duarum primarum lentium ad praxin revocari possit. Constituta autem littera A littera P sumi debebit inter limites 1 et $\frac{3}{2(A+1)}$; modo autem vidimus minori limiti, unitati, aequalem capi non posse, at si maiori limiti sumeretur aequalis, tum B fieret infinitum sicque longitudo instrumenti in infinitum extenderetur. Tam prope igitur P maiori limiti admoveri conveniet, ut quantitas AB adhuc in praxi locum habere possit. Tum vero adhuc superest, ut postremae aequationi satisfiat, qua apertura lentis obiectivae definitur; circa quam aequationem sequentia nunc annotasse iuvabit:

1. Cum $A < \frac{1}{2}$, erit $\mathfrak{A} < \frac{1}{3}$, unde ipsius λ coefficiens erit > 27; unde enormis confusio resultaret, nisi sequentibus terminis diminueretur.

2. Verum cum pro secunda lente coefficiens ipsius λ' fiat maior quam -8 ob $P = 1$ proxime et quia B semper fit numerus valde magnus, $\mathfrak{B}$ parum ab unitate differt.

3. Pro lente oculari coefficiens ipsius λ'' tam erit parvus, ut prae reliquis terminis quasi evanescat; unde adeo hoc commodi assequimur, ut tota haec confusio prorsus ad nihilum redigi queat, debite scilicet definiendo litteras λ et λ'; quare hic casus omnino meretur, ut aliquot exemplis illustretur.

EXEMPLUM 1

[109a].[1]) Cum debeat esse $A < \frac{1}{2}$, ponamus $A = \frac{1}{3}$ fietque $\mathfrak{A} = \frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2(A+1)} = \frac{9}{8}$, ita ut P capi debeat intra limites 1 et $\frac{9}{8}$. Sit ergo $P = \frac{10}{9}$ et fiet

$$B = -\frac{81(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})}{\mathfrak{r}}.$$

Consideremus nunc aequationem fundamentalem, quae est

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{ma-h} \cdot h.$$

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

Ponatur autem brevitatis gratia $\frac{ma}{h} = 1 + \theta$, quandoquidem esse debet $ma > h$, ut haec microscopiorum species locum habere possit, eritque $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{9\mathfrak{q}\theta}$. Cum iam sit $\frac{1}{\mathfrak{B}} = 1 + \frac{1}{B}$, habebitur

$$\frac{9\mathfrak{q}\theta}{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}} = 1 - \frac{\mathfrak{r}}{81(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})},$$

unde elicitur

$$\mathfrak{q} = \frac{80\mathfrak{r}}{729\theta - 81},$$

sicque prodibit

$$B = \frac{-729\theta + 1}{9\theta - 1} \quad \text{hincque} \quad \mathfrak{B} = \frac{+729\theta - 1}{720\theta}$$

existente $\theta = \frac{ma}{h} - 1$ sive multiplicatio $m = \frac{h(1+\theta)}{a}$. Tum vero ob $m = PQ \cdot \frac{h}{a}$ erit

$$Q = \frac{ma}{Ph} = \frac{9ma}{10h} = \frac{9}{10}(\theta + 1)$$

atque hinc elementa pro microscopii constructione erunt

1. $$A = \frac{1}{3}, \qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{4}, \qquad B = \frac{-729\theta + 1}{9\theta - 1}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{729\theta - 1}{720\theta},$$

$$P = \frac{10}{9}, \quad Q = \frac{9}{10}(\theta + 1).$$

2. Deinde distantiae focales lentium

$$p = \frac{1}{4}a, \quad q = \frac{-729\theta + 1}{2400\theta} \cdot a \quad \text{et} \quad r = \frac{-729\theta + 1}{(27\theta - 3)(\theta + 1)} \cdot a.$$

3. Lentium harum intervalla erunt

$$\text{prius} = \frac{1}{30}a, \qquad \text{posterius} = \frac{(729\theta - 1)a}{30(\theta + 1)}.$$

4. Praeterea spatii in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z = \frac{729\theta\mathfrak{r} - \mathfrak{r}}{(729\theta - 81)\theta} \cdot a\xi;$$

quodsi iam hic sumamus $\mathfrak{r} = 1$ et $\xi = \frac{1}{4}$, id quod licet, si lens ocularis fiat utrinque aequaliter concava, erit

$$z = \frac{729\theta - 1}{324\theta(9\theta - 1)} \cdot a.$$

5. Denique consideretur haec aequatio:

$$\frac{mx^3}{a^2h}\left(\mu(64\lambda+12\nu)-\frac{243\,\mu'}{10}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)+\frac{27\,\mu''\lambda''}{B^3(\theta+1)}\right)=\frac{1}{k^3},$$

ubi commode usu venit, ut haec quantitas ad nihilum revocari possit, quem in finem tertiam lentem uti primam ex vitro coronario fieri ponamus, sumique debebit

$$\lambda''=1{,}60006 \quad \text{et} \quad \mu''=\mu;$$

tum vero sumatur $\lambda=1$, at λ' ita, ut sit

$$\frac{\mu'}{\mu}\cdot 24{,}3\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right)=64+12\,\nu+\frac{27\cdot 1{,}60006}{B^3(1+\theta)}=66{,}6352$$

existente

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{0{,}8724}{0{,}9875}, \quad \nu=0{,}2196 \quad \text{et} \quad \nu'=0{,}2529.$$

Praeterea vero notetur pro maioribus multiplicationibus, quando scilicet θ fit numerus satis modicus, fieri proxime

$$B=-81 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}=+\frac{81}{80};$$

unde colligitur

$$0{,}96341\,\lambda'=0{,}00308+\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{66{,}7352}{24{,}3}$$

hincque

$$\lambda'=3{,}22503 \quad \text{et} \quad \tau\sqrt{(\lambda'-1)}=1{,}3089;$$

unde, cum huius lentis distantia focalis sit

$$q=-\frac{729}{2400}a=-\frac{243}{800}a$$

et $\mathfrak{B}=\frac{81}{80}$, erit huius lentis

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &= \dfrac{q}{\sigma-\mathfrak{B}(\sigma-\varrho)+\tau\sqrt{(\lambda'-1)}}=\dfrac{q}{1{,}4323}=0{,}69818\,q\\[2ex] \text{posterior} &= \dfrac{q}{\varrho+\mathfrak{B}(\sigma-\varrho)-\tau\sqrt{(\lambda'-1)}}=\dfrac{q}{0{,}2918}=3{,}42700\,q\text{[1]}.\end{cases}$$

---

1) Editio princeps: *rad. anter.* $=\cdots=\frac{q}{1{,}4423}=0{,}69334\,q$

rad. poster. $=\cdots=\frac{q}{0{,}2818}=3{,}5486\,q.$

Loco 1,3089 pro valore formulae $\tau\sqrt{\lambda'-1}$ sumpsit EULERUS 1,3189. Correxit E. Ch.

Pro prima autem lente, cuius distantia focalis est $p = \frac{1}{4}a$ et numeri $\mathfrak{A} = \frac{1}{4}$ et $\lambda = 1$, ex vitro coronario facienda erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{1{,}3017} = 0{,}76823\,p\\[2ex] \text{posterioris} &= \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{0{,}5851} = 1{,}70911\,p\end{cases}$$

atque hinc conficitur sequens

CONSTRUCTIO HUIUSMODI MICROSCOPIORUM

110. Posita distantia obiecti $= a$ et multiplicatione $m = (1 + \theta)\frac{h}{a}$ erit

I. Pro lente obiectiva ex vitro coronario facienda

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= 0{,}1921\,a\\ \text{posterioris} &= 0{,}4273\,a,\end{cases}$$

cuius distantia focalis $p = \frac{1}{4}a$,
semidiameter aperturae $x = 0{,}0480\,a$
et intervallum ad lentem secundam erit $= \frac{1}{30}a$.

II. Pro lente secunda ex vitro crystallino facienda

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} &= -0{,}2121\,a\\ \text{posterioris} &= -1{,}0409\,a\ ^{1)},\end{cases}$$

cuius distantia focalis est $q = -\frac{243}{800}a = 0{,}3037\,a$,

semidiameter aperturae $x = 0{,}0530\,a$ seu indefinita relinquitur, quia maior est semidiametro aperturae primae lentis,

et intervallum ad lentem tertiam $= 24{,}3 \cdot \frac{\theta}{\theta + 1} \cdot a$.

III. Pro lente tertia ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis

$$r = -\frac{729}{27(\theta + 1)} \cdot a = -\frac{27}{\theta + 1} \cdot a,$$

erit

$$\text{radius faciei utriusque} = -\frac{28{,}62}{\theta + 1} \cdot a,$$

cui lenti oculum immediate applicari oportet.

1) Editio princeps: *radius faciei* $\begin{cases}\textit{anter.} = -0{,}2106\,a\\ \textit{poster.} = -1{,}0779\,a.\end{cases}$ Vide notam p. 293. Correxit E. Ch.

IV. Spatium in obiecto cernetur, cuius semidiameter

$$z = \frac{1}{4\theta} \cdot a.$$

V. Denique cum sit

$$x = 0{,}0480\,a,$$

erit

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{x}{\theta+1} = \frac{0{,}0480}{\theta+1} \cdot a$$

hincque mensura claritatis

$$20y = \frac{0{,}960}{\theta+1} \cdot a,$$

si scilicet distantia a in digitis exprimatur, quae mensura etiam ita exprimitur:

$$0{,}960 \cdot \frac{h}{m} = \frac{7{,}68}{m}.$$

COROLLARIUM 1

111. Duae lentes priores cum earum intervallo plane non pendent a multiplicatione proposita ideoque pro omnibus multiplicationibus eaedem retineri possunt, ita ut tantum opus sit pro qualibet multiplicatione aliam lentem ocularem adhibere, cuius distantia focalis loco $\theta + 1$ scripto valore $\frac{ma}{h}$ erit

$$r = -27 \frac{h}{m} = -\frac{216}{m} \text{ dig.},$$

ita ut haec lens nunquam fiat nimis parva.

COROLLARIUM 2

112. Utcunque autem multiplicatio varietur, intervallum lentium secundae et tertiae parum admodum mutatur, praecipue in maioribus multiplicationibus, cum hoc intervallum sit

$$= 24{,}3 \cdot \frac{\theta}{\theta+1} \cdot a = 24{,}3 \left(a - \frac{h}{m}\right),$$

ita ut tota instrumenti longitudo vix sit mutanda, ac si distantia obiecti a capiatur 1 digiti, longitudo instrumenti erit circiter duorum pedum.

SCHOLION

113. Quod hic distantia obiecti arbitrio nostro permittatur, id sine dubio tamquam insigne commodum est spectandum, cum hoc modo maximum vitium microscopiorum simplicium, quod in nimia vicinitate obiecti consistit, felicissimo successu evitetur, quoniam quantumvis hac distantia aucta ne mensura quidem claritatis diminuitur, aeque parum ac spatium in obiecto conspicuum. Interim tamen contra hanc speciem obiici poterit, primo quod duae lentes priores nimis inter se propinquae esse debeant; quod tamen vix ullam attentionem meretur, cum adhuc hoc intervallum in praxi facile observari possit, nisi distantia obiecti a nimis parva statuatur, quod autem nulla ratio suadet; altera vero obiectio maioris est momenti, quod, si distantia a maior uno digito accipiatur, longitudo huius instrumenti duos adeo pedes iam superet, quae merito incommoda videri potest. Verum mox ostendemus, quomodo et huic incommodo facile occurri possit. Prouti autem hanc speciem litteris A et P definiendis constituimus, id inprimis obiici potest, quodsi diversitas numerorum N et N' tantillo minor fuerit quam in ratione $2:3$, uti hic assumsimus, tum determinationes ulteriores locum omnino habere non posse; si enim loco huius rationis substituamus eam, quam supra ex ipsis DOLLONDI experimentis conclusimus, scilicet uti $7:10$, ut foret

$$B=\frac{10(\mathfrak{q}+\mathfrak{r})}{7(A+1)P\mathfrak{r}-10\mathfrak{r}},$$

tum sumto $A=\frac{1}{3}$ et $P=\frac{10}{9}$, denominator $7(A+1)P-10$ fieret $=\frac{280}{27}-10$ ideoque non amplius negativus, ut natura rei postulat; multo igitur minus haec positio locum habere posset, si discrimen vitri ratione dispersionis adhuc esset minus, quod quidem non parum probabile videtur. Quamobrem, ne hinc quicquam sit pertimescendum, litteras A et P ita assumi conveniet, ut formula $(1+A)P$ multo minorem obtineat valorem quam casu exempli allati, pro littera scilicet A fractio sumi debebit multo minor quam $\frac{1}{3}$; tum vero valor ipsius P tam parum unitatem superet, quam lentium proximitas permittit, cui conditioni in sequenti exemplo satisfaciemus.

EXEMPLUM 2

[113a].[1]) Sumamus igitur hic $A=\frac{1}{5}$ fietque $\mathfrak{A}=\frac{1}{6}$ et $p=\frac{1}{6}a$, intervallum autem primae et secundae lentis $=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{P}\right)a$; quod ut parti quasi septimae

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

ipsius p aequetur, sumi debet $P=\frac{42}{37}=\frac{8}{7}$ seu $\frac{9}{8}$ circiter; sumamus igitur $P=\frac{9}{8}$, et quia etiam hic uti in praecedente exemplo littera $\mathfrak{q}$ vehementer fit parva prae littera $\mathfrak{r}$, ea neglecta erit

$$B=\frac{N'}{N(1+A)\,P-N'}$$

et sumto $N:N'=7:10$ erit substitutis his valoribus $B=-\frac{200}{11}$ sive $B=-18$, qui valor adhuc maior prodiisset, si dispersionis discrimen adhuc minus fuisset. Cum igitur satis sit verisimile hoc discrimen adhuc esse minus, a scopo vix aberrabimus, si statuamus $B=-25$, et si ullus error hinc resultaret, is in eo consisteret, ut margo coloratus non perfecte tolleretur; quod cum ne sperari quidem possit, contentos nos esse oportet, si eum tantum satis parvum reddiderimus, id quod hoc modo certo obtinebimus; sumto autem $B=-25$ erit $\mathfrak{B}=\frac{25}{24}$ hincque ex aequatione fundamentali

$$\mathfrak{q}=\frac{3h\mathfrak{r}}{25ma-28h}$$

hincque

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r}=\frac{25ma\mathfrak{r}-25h\mathfrak{r}}{25ma-28h};$$

unde colligitur spatii conspicui semidiameter

$$z=\frac{25\mathfrak{r}}{25ma-28h}\cdot ha\xi;$$

quare, si sumatur $\xi=\frac{1}{4}$ et $\mathfrak{r}=1$, quo casu requiritur, ut lens ocularis sit utrinque aeque concava, ac si ponamus ut ante $\frac{ma}{h}=1+\theta$, erit

$$z=\frac{25}{100\theta-12}\cdot a;$$

reliqua autem elementa sequenti modo se habebunt:

$$A=\frac{1}{5},\quad \mathfrak{A}=\frac{1}{6},\quad B=-25,\quad \mathfrak{B}=\frac{25}{24},$$

$$P=\frac{9}{8}\quad \text{et}\quad Q=\frac{8}{9}(1+\theta)=\frac{8ma}{9h}$$

hincque distantiae focales

$$p = \frac{1}{6}a, \quad q = -\frac{5}{27}a \quad \text{et} \quad r = -\frac{5}{1+\theta}\cdot a = -\frac{5h}{m}$$

et lentium intervalla

$$\text{I et II} = \frac{1}{45}a, \qquad \text{II et III} = \frac{40ma - 45h}{9m}.$$

Faciamus nunc, ut etiam confusio ab apertura oriunda evanescat, et cum prima lens ex vitro coronario, secunda vero ex crystallino confici debeat, si tertia etiam ex coronario paretur, ut sit $\mu'' = \mu$, debet esse $\lambda'' = 1{,}60006$; tum vero pro lente prima capiatur $\lambda = 1$; habebitur ista aequatio:

$$\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{5^3\cdot 8}{9}\left(\frac{24^3}{25^3}\lambda' - \frac{24\nu'}{25^2}\right) = 6^3 + 30\nu - \frac{1{,}60006\,h}{5^3 ma}.$$

Est autem log. $\frac{\mu}{\mu'} = 0{,}0538214$ seu

$$\frac{\mu'}{\mu}(98{,}304\,\lambda' - 4{,}2666\,\nu') = 216 + 30\nu - 0{,}0128\cdot\frac{h}{ma}$$

seu

$$98{,}304\,\lambda' = 253{,}034 - 0{,}0145\cdot\frac{h}{ma},$$

unde colligitur

$$\lambda' = 2{,}5740 - 0{,}00015\cdot\frac{h}{ma},$$

ubi postremum membrum tuto omitti potest ob $\frac{h}{ma}$ fractionem exiguam. Cum ergo sit

$$\lambda' = 2{,}5740 \quad \text{et} \quad \lambda' - 1 = 1{,}5740,$$

erit

$$\tau\sqrt{(\lambda'-1)} = 1{,}1009;$$

unde, cum huius secundae lentis distantia focalis sit

$$q = -\frac{5}{27}a \quad \text{et numerus} \quad \mathfrak{B} = \frac{25}{24},$$

erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma-\varrho) + \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{q}{1{,}1823} = 0{,}8458\,q\text{ [1]}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma-\varrho) - \tau\sqrt{(\lambda'-1)}} = \dfrac{q}{0{,}5418} = 1{,}8457\,q.\end{cases}$$

1) Editio princeps: $\frac{q}{1{,}1028} = 0{,}9072\cdot q$. Correxit E. Ch.

Pro prima autem lente, cuius distantia focalis

$$p = \frac{1}{6}a \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \lambda = 1$$

vitrumque coronarium, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{1{,}4212} = 0{,}7036\,p\\[2mm] \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{0{,}4656} = 2{,}1478\,p.\end{cases}$$

Hinc ergo conficitur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII COMPOSITI NULLAM CONFUSIONEM PARIENTIS

114. Constituta pro lubitu distantia obiecti $= a$ habebimus

I. Pro prima lente ex vitro coronario facienda

$$\text{radium faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}1173\,a\\ \text{posterioris} & = 0{,}3579\,a,\end{cases}$$

cuius distantia focalis est $\frac{1}{6}a = 0{,}1666\,a$;

aperturae semidiameter sumi poterit $x = 0{,}0293\,a$,

intervallum ad lentem secundam $= \frac{1}{45}a = 0{,}022\,a$.

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino facienda erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -\,0{,}1566\,a\text{[1]}\\ \text{posterioris} & = -\,0{,}3418\,a,\end{cases}$$

cuius distantia focalis $= -\frac{5}{27}a = -\,0{,}1852a$,

semidiameter aperturae $= 0{,}0392\,a$;

intervallum ad lentem tertiam erit $= \frac{40ma - 45h}{9m} = 4\frac{4}{9}a - \frac{5h}{m}$.

1) Editio princeps: $-\,0{,}1680 \cdot a$. Vide notam p. 298. Correxit E. Ch.

III. Pro lente tertia oculari ex vitro coronario paranda erit distantia focalis

$$= -\frac{5h}{m}$$

hincque

$$\text{radius faciei utriusque} = -5{,}3 \cdot \frac{h}{m};$$

sin autem ex vitro crystallino paretur, utriusque faciei radius sumatur $= -5{,}8\frac{h}{m}$, huicque lenti oculus immediate adplicatur.

IV. Spatii autem in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z = \frac{25}{100\theta - 12} \cdot a$$

existente

$$\theta = \frac{ma}{h} - 1.$$

V. Cum capere liceat $x = 0{,}0293\,a$, erit $y = 0{,}0293 \cdot \frac{h}{m}$ et mensura claritatis $= 0{,}586 \cdot \frac{h}{m}$ positoque $h = 8$ dig. fiet ea $= \frac{4{,}688}{m}$.

COROLLARIUM 1

115. Ne igitur primas lentes nimis exiguas confici oporteat, conveniet distantiam obiecti a tanto maiorem assumi; ac si statuatur $a = 8$ dig., hae lentes satis commodam magnitudinem obtinerent et multiplicatio m ostenderet, quanto maius obiectum appareat per microscopium, quam si idem obiectum in eadem distantia nudis oculis spectaremus.

COROLLARIUM 2

116. Deinde si sumamus $a = 8$ dig., longitudo totius instrumenti fiet circiter $35\frac{1}{2}$ dig., quae utique satis est magna; sed perpendi debet eam tantum esse $4\frac{1}{2}$ vicibus maiorem quam distantiam obiecti, eaque ad dimidium reducetur sumendo $a = 4$ dig.; quo casu constructio lentium adhuc erit satis ad praxin accommodata, quin etiam distantia obiecti commode adhuc minor assumi poterit, ita ut longitudo instrumenti ne pedem quidem integrum superet.

SCHOLION 1

117. Non parum paradoxon videbitur, quod distantia obiecti plane non ingrediatur in mensuram claritatis; nemo enim certe arbitrabitur, si distantia ad plures pedes augeretur, obiectum semper eadem claritate esse appariturum idque pro eadem multiplicatione. Verum hic probe est observandum mensuram nostram claritatis ad eum claritatis gradum referri, quo idem obiectum in loco, ubi actu est, nudo oculo cerneremus. Si enim haec mensura prodeat aequalis unitati, intelligendum est nos per instrumentum conspicere obiectum eadem claritate, qua id in ea ipsa distantia nudo oculo esset appariturum; notum autem est, quo magis obiectum a nobis removetur, in eadem ratione eius claritatem naturalem diminui; quare, cum nostra mensura ad claritatem naturalem referatur, quae scilicet in ipso obiecto nudis oculis conspicitur, manifestum est, quo magis idem obiectum removemus distantiam a augendo, eo magis claritatem naturalem diminui, ac tum nostra mensura tantum indicat, quoties claritas per microscopium visa minor sit naturali, atque ex hoc clare perspicitur claritatem visam maxime diminui, si distantiam obiecti a nimis magnam accipiamus, ita ut pro usu microscopiorum vix consultum sit distantiam obiecti ultra aliquot digitos extendere. Simili modo iudicium de multiplicatione est intelligendum, quam hic ad distantiam $h = 8$ dig. referimus; quodsi ergo v. c. obiectum distaret 16 dig., id iam nudis oculis duplo minus appareret quam in distantia 8 digitorum; quare, si obiectum dicatur 100 augeri, id ita est intelligendum, ut obiectum ducenties maius appareat quam nudis oculis in eadem distantia.

SCHOLION 2

118. Hinc igitur facile intelligitur, si distantiam obiecti satis magnam statuamus, tum microscopium tandem in telescopium esse abiturum, qui transitus eo magis attendi meretur, quo maius discrimen vulgo inter telescopia et microscopia constituitur, quae quippe instrumenta ut plane heterogenea spectari solent. Operae igitur pretium erit eiusmodi exemplum subiungere, de quo dubium erit, utrum ad microscopia an ad telescopia sit referendum.

EXEMPLUM 3

119. Sit distantia obiecti a tanta, ut sumta pro $\mathfrak{A}$ satis exigua fractione productum $\mathfrak{A}a = p$ modicum obtineat valorem, seu sit $\mathfrak{A} = \frac{p}{a}$ fractio valde

parva hincque etiam

$$A = \frac{p}{a - p}.$$

His positis cum sit

$$B = \frac{N'}{N(A+1)P - N'} = \frac{10}{7(1+A)P - 10},$$

sumatur $P = \frac{9}{8}$ ut ante, et ne A penitus negligamus, ponamus

$$(1 + A)P = \frac{8}{7} \quad \text{fietque} \quad B = -5;$$

ac si forte discrimen inter litteras N et N' sit minus, ac ne litteram $\mathfrak{q}$ penitus negligamus, sumamus $B = -6$, ut sit $\mathfrak{B} = \frac{6}{5}$; quoniam igitur loco litterarum a et A distantia focalis p in calculum introducitur, ut sit sive $\mathfrak{A}a = p$ sive $Aa = p$, erunt reliquae distantiae focales

$$q = -\frac{16}{15}p \quad \text{et} \quad r = -\frac{6h}{ma} \cdot p.$$

Tum vero intervallum

$$\text{prius} = \frac{1}{9}p, \quad \text{posterius} = \frac{16}{3}p\left(1 - \frac{9h}{8ma}\right).$$

Praeterea vero reperitur

$$\mathfrak{q} = \frac{5hr}{48ma - 53h}, \quad \text{hinc} \quad \mathfrak{q} + \mathfrak{r} = \frac{48ma\mathfrak{r} - 48h\mathfrak{r}}{48ma - 53h}$$

et spatii conspicui semidiameter

$$z = \frac{12}{48ma - 53h} \cdot ah$$

ideoque angulus

$$\frac{z}{a} = \Phi = \frac{12h}{48ma - 53h},$$

quae fractio per 3437 multiplicata exprimet angulum Φ in minutis primis. Deinde semidiameter confusionis, si ex vinculo denominator $\mathfrak{A}^3$ in factorem communem transferatur, ita se habebit:

$$\frac{a}{h} \cdot \frac{mx^3}{p^3}\left(\mu\lambda - \frac{8\mu'}{9}\left(\frac{5^3\lambda'}{6^3} - \frac{5\nu'}{36}\right) - \frac{\mu''\lambda''h}{6^3ma}\right),$$

quae ad nihilum reducetur sumendo

$$\frac{8}{9}\mu'\left(\frac{5^3}{6^3}\lambda' - \frac{5\nu'}{36}\right) = \mu\lambda - \frac{\mu''\lambda''h}{6^3 ma};$$

ubi prima lens ex vitro coronario, secunda ex crystallino confici debet, tertia vero etiam ex coronario paretur eritque $\lambda'' = 1{,}60006$ et $\mu'' = \mu$; tum vero capiatur $\lambda = 1$ ac reperietur

$$\lambda' = 0{,}24\nu' + \frac{\mu}{\mu'}\left(1{,}944 - 0{,}0144 \cdot \frac{h}{ma}\right) = 2{,}2611$$

neglecto scilicet ob parvitatem membro ultimo, ex quo fit $\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 0{,}98542$; unde pro huius lentis constructione erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{q}{0{,}8385} = 1{,}1926\,q\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{q}{0{,}8856} = 1{,}1292\,q.\end{cases}$$

Pro lente vero priore erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma} = 0{,}6024\,p\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho} = 4{,}4111\,p\end{cases}$$

atque hinc deducitur sequens

CONSTRUCTIO SIVE MICROSCOPII SIVE TELESCOPII OMNIS CONFUSIONIS EXPERTIS

120. Hic distantia obiecti a tanta supponitur, ut prae ea distantia focalis primae lentis p vehementer sit parva et quasi negligi queat.

I. Tum ergo pro prima lente ex vitro coronario paranda erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}6024\,p\\ \text{posterioris} & = 4{,}4111\,p,\end{cases}$$

cuius distantia focalis $= p$,
aperturae semidiameter $x = 0{,}1506\,p$,
distantia a lente secunda $= \frac{1}{9}p$.

II. Pro lente secunda ex vitro crystallino facienda erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -1{,}2721\,p\\ \text{posterioris} & = -1{,}2045\,p,\end{cases}$$

cuius distantia focalis $= -\frac{16}{15}p$,

eique apertura tribui potest aliquanto maior quam primae,

distantia vero ad lentem ocularem $= \frac{16}{3}p\left(1 - \frac{9h}{8ma}\right)$.

III. Pro lente tertia ex vitro coronario facienda, cuius distantia focalis est $r = -\frac{6h}{ma}\cdot p$, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = -\frac{6{,}36\,h}{ma}\cdot p,$$

cui oculum immediate adplicari oportet.

IV. Pro spatio conspicuo iam invenimus semidiametrum

$$z = \frac{12}{48\,ma - 53\,h}\cdot ah$$

seu angulum

$$\Phi = \frac{z}{a} = \frac{12\,h}{48\,ma - 53\,h};$$

priore scilicet modo aestimatur, si instrumentum ut microscopium spectetur, posteriore vero, si ut telescopium.

V. Quia capere licet

$$x = 0{,}1506\,p,$$

erit

$$y = \frac{0{,}1506\,h}{ma}\cdot p$$

et mensura claritatis

$$= \frac{3{,}012}{ma}\cdot hp,$$

si scilicet distantiae in digitis exprimantur, unde patet, quo maius capiatur p, eo maiorem prodire claritatem; sed meminisse oportet p valde parvum prae a esse debere.

VI. Longitudo denique totius instrumenti erit

$$5\frac{4}{9}p - 6\frac{h}{ma}\cdot p.$$

COROLLARIUM 1

121. Quodsi hoc instrumentum tanquam microscopium spectare velimus, primo quidem distantia a tam magna esse debet, ut eius exigua portio sufficiat pro lente obiectiva construenda; tum vero sumi solet $h = 8$ dig., ad quam distantiam multiplicatio m referri solet, atque ex multiplicatione hoc modo aestimata in calculum ingreditur $\frac{h}{ma}$. Sin autem ut telescopium spectare velimus et distantia a tam sit magna, ut etiam valor p satis magnus accipi possit, tum sumi solet $h = a$ nihilque aliud in formulis inventis mutandum occurrit, ita ut totum discrimen in varia ratione multiplicationem aestimandi consistat.

COROLLARIUM 2

122. Quo hoc clarius perspiciatur, statuamus $\frac{ma}{h} = \zeta$, unde constructio plene determinatur; ac si instrumentum ut microscopium spectetur, aestimari solet multiplicatio $m = \frac{h\zeta}{a} = \frac{8\zeta}{a}$, sin autem ut telescopium spectetur, tum dicetur multiplicatio esse $m = \zeta$ sicque totum discrimen ad diversitatem loquendi revocatur.

COROLLARIUM 3

123. Pro telescopiis mensura claritatis pro lubitu atque adeo usque ad unitatem seu claritatem plenam augeri potest; tantum enim opus est, ut capiatur $p = \frac{m}{3,012} = \frac{m}{3}$. Vulgo autem contenti esse solemus claritate $= \frac{2}{5}$, ita ut tum sumi debeat $p = \frac{2m}{15}$. Pro microscopiis autem tantam claritatem obtinere non licet; quia enim ob $h = 8$ mensura claritatis fit $\frac{24}{m}\cdot\frac{p}{a}$ et fractio $\frac{p}{a}$ necessario valde est parva, quo maior multiplicatio desideratur, eo minorem claritatem prodire necesse est.

SCHOLION

124. En ergo praeter omnem exspectationem elegantem constructionem telescopii, quod in ratione quacunque obiecta amplificat et cuius constructio sequenti modo se habebit.

Proposita scilicet multiplicatione m capiatur distantia focalis $p = \frac{2m}{15}$ dig., ut scilicet mensura claritatis prodeat $= \frac{2}{5}$.

Constructio telescopii ab omni confusione liberi

I. Pro prima lente ex vitro coronario facienda erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}0803\, m \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 0{,}5881\, m \text{ dig.}, \end{cases}$$

distantia focalis $= \frac{2m}{15}$ dig.,
aperturae semidiameter $x = 0{,}0201\, m$ dig. $= \frac{m}{50}$ dig.,
intervallum ad lentem sequentem erit $= \frac{2m}{135} = 0{,}01481\, m$ dig.

II. Pro lente secunda ex vitro crystallino facienda erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0{,}16961\, m \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = -\,0{,}16060\, m \text{ dig.}, \end{cases}$$

cuius distantia focalis $q = -\,0{,}1422\, m$,
eique apertura tribuitur aliquanto maior quam primae,
intervallum ad lentem sequentem $= (0{,}7111\, m - 0{,}8)$ dig.

III. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est

$$= -\frac{4}{5} \text{ dig.} = -\,0{,}8 \text{ dig.},$$

si ergo haec lens ex vitro coronario paretur, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = -\,0{,}848 \text{ dig.},$$

sin autem ex vitro communi, ubi $n = 1{,}55$, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = -\,0{,}88 \text{ dig.},$$

sin autem ex vitro crystallino, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = -\,0{,}928 \text{ dig.};$$

cui oculus immediate adplicetur.

IV. Semidiameter campi apparentis erit

$$\Phi = \frac{12}{48m - 53};$$

in mensura angulorum autem erit

$$\Phi = \frac{41\,244}{48m - 53}\ \text{min.} \quad \text{sive proxime} \quad \frac{859}{m-1}\ \text{min.}$$

V. Longitudo denique totius huius telescopii erit

$$= (0{,}7259\,m - 0{,}8)\ \text{dig.}$$

Hoc ergo telescopium non tam ob brevitatem est commendandum, quam ideo, quod constructio eius practica non tantis difficultatibus sit involuta quam multo breviora, quae supra sunt inventa, propterea quod littera λ' non multum ab unitate discrepat; quae ergo commendatio etiam pro microscopiis huius generis valet.

EVOLUTIO SECUNDI CASUS (CONF. § 108) QUO LITTERAE A VALOR NEGATIVUS TRIBUITUR

125. Hoc casu an littera $\mathfrak{A}$ habitura sit valorem positivum an negativum, incertum est; at littera B nunc debet esse positiva, et cum ob eandem rationem ut casu praecedente littera $\mathfrak{q}$ prae $\mathfrak{r} = 1$ ut evanescens spectari possit, erit

$$B = \frac{N'}{N(1+A)P - N'},$$

ubi debet esse $P < 1$, sicque multo magis erit $(1+A)P < 1$; ex quo perspicuum est litteram N maiorem esse debere quam N'. Quare primam lentem ex vitro crystallino, secundam vero ex coronario confici oportebit, ut sit $N : N' = 10 : 7$ ideoque

$$B = \frac{7}{10(1+A)P - 7};$$

unde necesse est, ut sit $P > \frac{7}{10(1+A)}$, simul vero $P < 1$; unde sequitur esse debere

$$7 < 10(1+A) \quad \text{seu} \quad 1 + A > \frac{7}{10}.$$

Ponamus ergo $A = -\alpha$ sumique debet $\alpha < \frac{3}{10}$ et quidem α notabiliter minus

capi debet quam $\frac{3}{10}$, quia alioquin P nimis parum ab unitate deficere deberet et intervallum duarum priorum lentium prodiret nimis parvum. Cum autem α fractio sit satis exigua, fiet $\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ hincque distantia focalis primae lentis

$$p = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot a.$$

Intervallum vero binarum priorum lentium

$$= -\alpha a\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \alpha a\left(\frac{1}{P} - 1\right),$$

quod parti sive nonae sive decimae[1]) distantiae $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot a$ aequetur, quod fit, si sumetur $P = \frac{8}{9}$, ita ut esse debeat $\alpha < \frac{17}{80}$, et ne tam anxie huic rationi $7:10$ inhaereamus, si sumamus $\alpha = \frac{1}{6}$, fiet $B = \frac{189}{11} = 17$. Capiamus autem potius $\alpha = \frac{1}{7}$ fietque $B = \frac{441}{13} = 11\frac{4}{14}$. Tuto igitur ponere poterimus

$$B = 12, \quad \text{ut sit} \quad \mathfrak{B} = \frac{12}{13};$$

tum vero $A = -\frac{1}{7}$ et $\mathfrak{A} = -\frac{1}{6}$ hincque distantiae focales

$$p = -\frac{1}{6}a, \quad q = \frac{27}{182}a \quad \text{et} \quad r = -\frac{12}{7} \cdot \frac{h}{m};$$

deinde lentium intervalla

$$\text{I et II} = \frac{1}{56}a, \qquad \text{II et III} = \frac{27}{14}a - \frac{12}{7} \cdot \frac{h}{m}.$$

Nunc vero ex aequatione fundamentali colligemus

$$\mathfrak{q} = -\frac{13h}{108ma - 95h},$$

hinc

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{r} = \frac{108ma - 108h}{108ma - 95h};$$

unde deducitur spatii conspicui semidiameter

1) Editio princeps: *septimae sive octavae.* Correxit E. Ch.

$$z = \frac{108}{108ma - 95h} \cdot ah\xi = \frac{27ah}{108ma - 95h}$$

sumto scilicet $\mathfrak{r} = 1$ et $\xi = \frac{1}{4}$.

Expressio porro pro semidiametro confusionis est

$$\frac{mx^3}{a^2h}\left(\mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right) - \frac{\mu'}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{A^3B^3PQ}\right),$$

quae ad nihilum redigatur. Hunc in finem notetur litteras μ et ν ad vitrum crystallinum, litteras vero μ' et ν' ad coronarium referri; tum vero capi poterit $\lambda' = 1$, ac si tertia lens etiam ex vitro coronario fiat, ut sit $\mu'' = \mu'$, sumi debet $\lambda'' = 1{,}60006$ hincque definiri poterit numerus λ hoc modo:

$$-\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} - \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} = -\frac{\mu'}{\mu A^3P}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{\mu''\lambda''}{\mu A^3B^3PQ}$$

sive

$$\lambda = 0{,}0491 + \frac{\mu'}{\mu}\left(\frac{343 \cdot 2197}{192 \cdot 1728} + \frac{343 \cdot 13 \cdot 0{,}2196}{192 \cdot 144} - \frac{343 \cdot 1{,}60006}{216 \cdot 1728} \cdot \frac{h}{ma}\right),$$

quae evoluta praebet

$$\lambda = 0{,}0491 + 2{,}5709 + 0{,}0401$$

neglecto termino ultimo seu

$$\lambda = 2{,}6601,$$

unde colligitur

$$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}1306.$$

Hincque pro prima lente erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) - 1{,}1306} = \dfrac{p}{0{,}6923} = 1{,}4444p \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) + 1{,}1306} = \dfrac{p}{1{,}0318} = 0{,}9692p.\end{cases}$$

Pro lente secunda autem ex vitro coronario paranda ob $\mathfrak{B} = \frac{12}{13}$ et $\lambda' = 1$ erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{0{,}3370} = 2{,}9673q \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{1{,}5498} = 0{,}6452q,\end{cases}$$

unde habetur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPIORUM HUIUS SPECIEI PRO QUAVIS MULTIPLICATIONE m

126. Constituta pro lubitu distantia obiecti $= a$ habebitur

I. Pro prima lente ex vitro crystallino facienda, cuius distantia focalis est $p = -\frac{1}{6}a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -0{,}2407\,a\\ \text{posterioris} & = -0{,}1615\,a,\end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter sumi poterit $x = 0{,}0404\,a$, nisi forte secunda lens minorem postulet.

Intervallum ad lentem secundam $= \frac{1}{56}a = 0{,}0178\,a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario facienda, cuius distantia focalis est $q = \frac{27}{182}a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}4402\,a\\ \text{posterioris} & = 0{,}0957\,a,\end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter maior esse nequit quam $0{,}0239\,a$; cui ergo etiam pro prima lente valor ipsius x aequari debet.

Intervallum vero ad lentem tertiam erit

$$\frac{27}{14}a - \frac{12}{7}\cdot\frac{h}{m} = 1{,}9285\,a - \frac{12}{7}\cdot\frac{h}{m}.$$

III. Pro tertia lente, cuius distantia focalis est

$$r = -\frac{12}{7}\cdot\frac{h}{m} = -\frac{96}{7m}\text{ dig.} = -\frac{13{,}71}{m}\text{ dig.},$$

si ex vitro coronario paretur, erit

$$\text{radius faciei utriusque} = \frac{14{,}53}{m}\text{ dig.},$$

sin autem ex vitro communi $n = 1{,}55$ paretur, erit

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{15{,}08}{m}\text{ dig.},$$

at si ex vitro crystallino paretur, erit

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{15,90}{m} \text{ dig.}$$

IV. Spatii porro in obiecto conspicui erit semidiameter

$$z = \frac{27ah}{108ma - 95h} = \frac{54a}{27ma - 190} \text{ dig.}$$

V. Cum autem hic sit $x = 0,0239\,a$, erit

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{0,1912}{m} \text{ dig.}$$

hincque mensura claritatis erit

$$20y = \frac{3,824}{m}.$$

COROLLARIUM 1

127. Ne ambae lentes priores fiant nimis parvae, distantia obiecti a necessario modicae magnitudinis statui debet; veluti si nolimus, ut ullus radius faciei minor sit parte decima digiti, posito minimo radio $0,0957\,a = \frac{1}{10}$ fiet $a = \frac{1}{0,957}$, seu distantiam a minorem uno digito capi non conveniet.

COROLLARIUM 2

128. Si ergo sumatur $a = 1\frac{1}{2}$ dig., quo casu primae lentes adhuc commode parari poterunt, longitudo totius instrumenti fiet circiter 3 dig., et cum distantia focalis lentis tertiae sit $-\frac{13,71}{m}$ dig., apparet multiplicationem vix ultra 100 extendi posse, quia alioquin haec lens fieret nimis parva; quod exiguum est vitium.

SCHOLION

129. Quodsi ingentes multiplicationes desideremus, omnia haec microscopia isto laborant vitio, quod lens ocularis nimis exigua requiratur, et inter ea, quae § 114 in exemplo 2 sunt descripta, hac praerogativa gaudent, quod distantia focalis tertiae lentis sit $-\frac{40}{m}$ dig., quae ergo ad multiplicationem

$m = 400$ accommodari poterunt; at in primo exemplo, quod ob nimis magnam instrumenti longitudinem reiiciendum videbatur, multiplicatio multo longius augeri potest; cum enim ibi distantia focalis tertiae lentis esset $-\frac{216}{m}$ dig., ea hoc lucrum nobis praestat, ut multiplicatio ultra 1000 possit augeri, ita ut hoc lucro illud incommodum maxime compensetur. Ex quo colligere licet ingentes multiplicationes huiusmodi microscopiis produci non posse, nisi eorum longitudo valde fiat magna, ad quod necesse est, ut littera B valde magnum obtineat valorem, id quod quidem facillime praestatur in priore praecipue casu, ubi neglecto q erat

$$B = \frac{10}{7(A+1)P - 10};$$

hinc enim sumto $A = \frac{1}{5}$ et $P = \frac{7}{6}$ prodit $B = -50$, ac si manente $A = \frac{1}{5}$ capiatur $P = \frac{33}{28}$, orietur $B = -100$, ita ut tum foret distantia focalis tertiae lentis

$$r = -\frac{20h}{m} = -\frac{160}{m}$$

ideoque multiplicatio longe ultra 1000 augeri posset. Tum autem longitudo instrumenti foret

$$-\frac{AB}{P}\left(1 - \frac{1}{Q}\right) = 17 \text{ dig.},$$

quae quidem facile admitti posset. Verum hic perpendendum est, si litteris A et P isti valores tribuantur, facile fieri posse, ut valor litterae B revera non solum in infinitum usque augeatur, sed etiam positivus evadat, si scilicet vera ratio numerorum N et N' tantillo maior fuerit quam $7:10$. Quamobrem eo maiorem operam adhibeamus in microscopiis duorum reliquorum generum evolvendis. Interim tamen etiam maximas multiplicationes sequenti modo non incongrue producere licebit.

PROBLEMA 3

130. *Microscopia huius generis construere, quae ad maximas multiplicationes producendas sint accommodata.*

SOLUTIO

Cum totum negotium eo redeat, ut littera B praegrandem valorem nanciscatur, id duplici modo obtineri potest, prouti vel prima lens ex vitro coro-

nario, secunda vero ex crystallino conficiatur vel vice versa prima lens ex crystallino, secunda vero ex coronario. Hos ambos casus seorsim pertractasse operae erit pretium.

CASUS PRIOR QUO PRIMA LENS EX VITRO CORONARIO SECUNDA VERO EX CRYSTALLINO PARATUR

Cum hoc casu habeatur

$$B = \frac{10}{7(1+A)P-10},$$

denominator hic prorsus ad nihilum redigatur, ut valor ipsius B infinitus evadat; tum enim facile intelligitur praegrandem eius valorem scopo nostro etiam esse satisfacturum, praecipue cum etiam casu, quo vera ratio numerorum N et N' a ratione assumta $7:10$ parumper discrepat, valor litterae B tantum valde magnus erit proditurus. Ponamus igitur $P = \frac{8}{7}$, quoniam ob necessarium binarum priorum lentium intervallum hic valor non commode minor statui potest; ac tum esse oportebit $A = \frac{1}{4}$; at si forte, uti probabile videtur, discrimen refractionis non sit tantum, uti assumimus, conveniet A aliquanto minus assumi; statuamus ergo $A = \frac{1}{5}$, ut saltem valor ipsius B certe valde magnus sit proditurus, ita ut habeamus

$$A = \frac{1}{5}, \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6}, \quad P = \frac{8}{7} \quad \text{et} \quad Q = \frac{7ma}{8h} \quad \text{ob} \quad PQ = \frac{ma}{h}$$

hincque erit

$$p = \frac{1}{6}a, \quad q = -\frac{7\mathfrak{B}}{40}a\text{[1]} \quad \text{et} \quad r = \frac{B}{5}\cdot\frac{h}{m}.$$

Hic igitur curandum est, ut lens tertia non fiat nimis parva, etiamsi multiplicatio m maxima statuatur; quare sumamus multiplicationem esse debere $m = 1000$, et cum distantia obiecti a vix minor uno digito esse possit, ne primae lentes fiant nimis exiguae, sumamus $a = 1$ dig., et cum sufficiat statuisse $r = -\frac{1}{2}$ dig., ob $h = 8$ dig. fiet hinc $B = -\frac{625}{2}$, qui valor certe est

1) Editio princeps: $q = -\frac{8\mathfrak{B}}{35}\cdot a$. Quem ob errorem $\left(P = \frac{7}{8} \text{ loco } \frac{8}{7}\right)$ in hac et in sequente paragrapho valores pro q et pro quantitatibus a q dependentibus corrigendi erant E. Ch.

satis magnus. Statuamus igitur porro $B = -300$, ut sit $\mathfrak{B} = \frac{300}{299}$, eritque

$$q = -\frac{420}{8.299}a \quad \text{seu} \quad q = -\frac{420}{2392}a \quad \text{et} \quad r = -\frac{480}{m} \text{ dig.}$$

Tum vero intervalla lentium erunt

$$\text{I et II} \quad = \frac{1}{40}a,$$

$$\text{II et III} \quad = 60\left(\frac{7}{8} - \frac{h}{ma}\right)a = \left(\frac{105}{2}a - \frac{480}{m}\right) \text{dig.}$$

Circa spatium in obiecto conspicuum nihil fere in praecedentibus formulis erit mutandum; invenietur enim

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{7ah}{7ma - 8h} = \frac{14a}{7ma - 64} \text{ dig.}^{1)}$$

Pro apertura autem primae lentis definienda semidiametrum confusionis ad nihilum redigamus ope huius aequationis:

$$0 = \mu(216\lambda + 30\nu) - \frac{7 \cdot 125}{8}\mu'(0{,}99\lambda' - 0{,}0008).$$

Hinc si sumamus $\lambda = 1$, erit

$$0{,}99\lambda' = 0{,}0008 + \frac{\mu}{\mu'} \cdot 2{,}0351 = 2{,}3044$$

adeoque

$$\lambda' = 2{,}3276, \quad \text{ex quo fit} \quad \tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1{,}0111.$$

Unde huius secundae lentis constructio erit:

Radius scilicet faciei

$$\text{anterioris} \quad = \frac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) + 1{,}0111} = \frac{q}{1{,}1477} = 0{,}8713\,q \quad (9{,}9401715)$$

$$\text{posterioris} \quad = \frac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) - 1{,}0111} = \frac{q}{0{,}5764} = 1{,}7349\,q \quad (0{,}2392759).$$

Pro prima autem lente ex vitro coronario ob $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$ et $\lambda = 1$ erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{1{,}4212} = 0{,}7036\,p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{0{,}4656} = 2{,}1478\,p. \end{cases}$$

1) Sumpto $\mathfrak{B} = 1$ loco $\mathfrak{B} = \frac{300}{299}$. E. Ch.

CASUS POSTERIOR QUO PRIMA LENS EX VITRO CRYSTALLINO SECUNDA EX CORONARIO PARATUR

Cum hoc casu sit

$$B = \frac{7}{10(1+A)P-7},$$

denominator iterum ad nihilum redigatur, et cum P debeat esse unitate minus, sumatur $P=\frac{7}{8}$ eritque $A=-\frac{1}{5}$; at ob rationem supra allegatam sumatur $A=-\frac{1}{6}$, ut sit $\mathfrak{A}=-\frac{1}{5}$, hincque distantiae focales

$$p = -\frac{1}{5}a, \quad q = \frac{4\mathfrak{B}}{21}\cdot a \quad \text{et} \quad r = -\frac{B}{6}\cdot\frac{h}{m}.$$

Hic iterum faciamus, ut pro multiplicatione $m=1000$ prodeat circiter $r=-\frac{1}{2}$ dig., atque hinc prodibit $B=375$. Sumamus igitur $B=300$ ut ante fietque $\mathfrak{B}=\frac{300}{301}$ et ob $P=\frac{7}{8}$ erit $Q=\frac{8ma}{7h}$; atque hinc distantiae focales

$$p = -\frac{1}{5}a, \quad q = \frac{4}{21}\cdot\frac{300}{301}a, \quad r = -50\frac{h}{m}.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$\text{I et II} \;= \frac{1}{42}a$$

atque

$$\text{II et III} \;= 50\left(\frac{8}{7}-\frac{h}{ma}\right)a = \frac{400}{7}a - \frac{50h}{m} = \left(57\frac{1}{7}a - \frac{400}{m}\right)\text{dig.}$$

Pro spatio autem in obiecto conspicuo erit

$$z = \frac{1}{4}\cdot\frac{8ah}{8ma-7h} = \frac{2a}{ma-7}\text{dig.},$$

quod spatium aliquantillo minus est quam casu praecedente.

Pro apertura denique primae lentis definienda semidiameter confusionis iterum ad nihilum redigatur, quod fit hac aequatione:

$$\mu(125\lambda - 30\nu) = \mu'\frac{8\cdot 216}{7}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right),$$

ex qua sumto $\lambda' = 1$ colligitur

$$125\lambda = 7{,}587 + \frac{\mu'}{\mu} \cdot 246{,}857 \cdot 1{,}0107 = 290{,}007$$

hincque

$$\lambda = 2{,}3200 \quad \text{adeoque} \quad \tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}0082.$$

Pro prima igitur lente erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{(\lambda-1)}} = \dfrac{p}{0{,}2862} = 3{,}4942\, p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{(\lambda-1)}} = \dfrac{p}{1{,}4379} = 0{,}6955\, p. \end{cases}$$

Pro secunda autem lente, cuius distantia focalis est q et numeri $\mathfrak{B} = \frac{300}{301}$ et $\lambda' = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{0{,}2315} = 4{,}3197\, q \quad (0{,}6354489) \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{1{,}6553} = 0{,}6041\, q \quad (9{,}7811232). \end{cases}$$

Quod ad reliqua momenta attinet, ea in sequentibus constructionibus accuratius definiemus.

CONSTRUCTIO PRIORIS MICROSCOPII HUIUS GENERIS

131. Posita obiecti distantia $= a$ constructio sequenti modo se habebit:

I. Pro prima lente ex vitro coronario facienda, cuius distantia focalis $p = \frac{1}{6}a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}1173\, a \\ \text{posterioris} & = 0{,}3579\, a. \end{cases}$$

Aperturae semidiameter sumi poterit $x = 0{,}0293\, a$ et distantia ad lentem secundam $= \frac{1}{40} a = 0{,}025\, a$.

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis $q = -\frac{420}{2392} a$[1]), erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0{,}1530\, a \\ \text{posterioris} & = -\,0{,}3046\, a. \end{cases}$$

1) Editio princeps: $q = -\frac{480}{2093} \cdot a$. Vide notam p. 313. Correxit E. Ch.

Eius aperturae semidiameter $x = 0{,}0382\,a$; quae cum sit maior quam in prima lente, valor ille ipsius x valet et distantia ad lentem ocularem

$$= 52\frac{1}{2}a - \frac{480}{m}\text{ dig.}$$

III. Pro lente oculari, cuius distantia focalis est

$$r = -\frac{480}{m}\text{ dig.},$$

erit, si haec lens ex vitro coronario paretur,

$$\text{radius faciei utriusque} = -\frac{508{,}80}{m}\text{ dig.},$$

sin autem ex vitro crystallino conficiatur, erit

$$\text{radius utriusque faciei} = -\frac{556{,}80}{m}\text{ dig.}$$

Eius aperturae semidiameter sumi poterit $x = \frac{120}{m}$ dig., cui lenti oculus immediate est applicandus.

IV. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z = \frac{14\,a}{7ma - 64}\text{ dig.}$$

V. Pro claritate, cum sit $x = 0{,}0293\,a$, erit

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{0{,}2344}{m}\text{ dig.}$$

hincque mensura claritatis $= \frac{4{,}688}{m}$.

VI. Ne priores lentes nimis fiant parvae, distantia obiecti a vix infra digitum sumi posse videtur, nisi forte artifex lenticulas adhuc minores exacte elaborare valeat; quo casu distantia obiecti uno digito minor sicque longitudo instrumenti contrahi poterit.

CONSTRUCTIO MICROSCOPII POSTERIORIS HUIUS GENERIS

132. Posita iterum obiecti distantia $= a$ constructio ita se habebit:

I. Pro prima lente ex vitro crystallino facienda, cuius distantia focalis $p = -\frac{1}{5}a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -0{,}6988\,a\\ \text{posterioris} & = -0{,}1391\,a.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $x = 0{,}0348\,a$, nisi lens secunda minorem aperturam postulet.

Intervallum ad lentem secundam $= \frac{1}{42}a$.

II. Pro lente secunda ex vitro coronario facienda, cuius distantia focalis est

$$q = \frac{4}{21}\cdot\frac{300}{301}a = \frac{400}{2107}a,$$

erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 0{,}8201\,a\\ \text{posterioris} & = 0{,}1147\,a.\end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $x = 0{,}0286\,a$, unde etiam prioris lentis apertura maior accipi non poterit, ita ut sumi debeat $x = 0{,}0286\,a$.

Distantia ad lentem ocularem $= 57\frac{1}{7}a - \frac{400}{m}$ dig.

III. Pro lente oculari, cuius distantia focalis est $r = -\frac{400}{m}$ dig., si ea ex vitro coronario paretur, radius utriusque faciei esse debet

$$-\frac{424}{m}\text{ dig.},$$

sin autem ea ex vitro crystallino fiat, erit is

$$= -\frac{464}{m}\text{ dig.}$$

Eius aperturae semidiameter capi poterit $x = \frac{100}{m}$ dig. huicque lenti oculus immediate est applicandus.

IV. Pro spatio in obiecto conspicuo reperimus eius semidiametrum $z = \frac{2a}{ma-7}$ dig.

V. Pro claritate, cum hic sit $x = 0{,}0286\,a$, erit $y = \frac{0{,}2288}{m}$ et mensura claritatis $= \frac{4{,}576}{m}$.

VI. Cum hoc casu lentes priores aliquanto sint maiores quam casu praecedente, respectu scilicet distantiae a, hoc casu nihil impedit, quominus distantia a uno digito minor capiatur, sicque longitudo instrumenti facile ad praecedentem revocabitur.

SCHOLION

133. En ergo duas adhuc huiusmodi microscopiorum species, quae supra allatis ideo longe sunt anteferendae, quod etiam ad maximas multiplicationes accommodari queant. Ingens autem horum instrumentorum longitudo merito non parum incommoda videbitur; verum si artifici succedat binarum lentium priorum elaboratio pro distantia $a = \frac{1}{2}$ dig., longitudo duorum pedum facile tolerari poterit. Cum autem hic duplici vitro simus usi, operae quoque pretium erit investigare, quanta sit futura altera confusio praeter marginem coloratum ex diversa refractione oriunda; quem in finem spectari debebit haec aequatio [§ 27]:

$$0 = N \cdot \frac{1}{p} + \frac{N'}{P^2} \cdot \frac{1}{q} + \frac{N''}{P^2 Q^2} \cdot \frac{1}{r},$$

cuius ultimus terminus manifesto evanescit prae prioribus, ita ut haec conditio postulet

$$0 = N \cdot \frac{1}{p} + \frac{N'}{P^2} \cdot \frac{1}{q}.$$

Cum nunc pro priore casu sit

$$N = 7, \quad N' = 10, \quad p = \frac{1}{6} a \quad \text{et} \quad P = \frac{8}{7} \quad \text{et} \quad q = -\frac{420}{2392} a \text{ [1]},$$

haec formula fiet $6 - \frac{16744}{2688}$ [2]; cuius posterior terminus quia fere priorem tollit, manifestum est hinc nullam plane confusionem esse metuendam.

Pro altero vero casu, quo est

$$N = 10, \quad N' = 7, \quad P = \frac{7}{8}, \quad p = -\frac{1}{5} a, \quad q = \frac{400}{2107} a,$$

formula illa fiet $-50 + \frac{1204}{25}$, cuius bina membra inter se tenent rationem $25 : 24$, hoc est tantum non rationem aequalitatis, ita ut se mutuo destruere sint censenda hocque casu altera confusio adeo penitus quasi evanescat, sicque priori casu confusio ex hoc fonte oriunda paululo minor erit quam casu posteriori; quod discrimen tamen nimis exiguum erit, quam ut in praxi alter casus alteri anteferendus videatur.[3])

1) Editio princeps: $q = -\frac{480}{2093}$. Vide notam p. 313. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: $6 - \frac{14651}{3072}$. Vide notam p. 313. Correxit E. Ch.

3) Editio princeps: *sicque posteriori casu confusio ex hoc fonte oriunda multo adhuc minor erit quam casu priori, ita ut ob hanc potissimum causam posterior conditio priori anteferenda videatur.* Correxit E. Ch.

SECTIO TERTIA.

DE

MICROSCOPIIS COMPOSITIS,

IN QVIBVS VNICA IMAGO REALIS OCCVRRIT;

QVO OMNIA MICROSCOPIA HVCVSQVE VSITATA SVNT REFERENDA.

CAPUT I

DE MICROSCOPIIS SIMPLICIORIBUS HUIUS GENERIS

PRAEMONITUM

134. Quoniam in hoc microscopiorum genere obiecta situ inverso repraesentantur, in formulis nostris generalibus ubique loco m scribi debet $-m$ ac praeterea etiam litterae $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ etc. omnes negative sumi debent.

PROBLEMA 1

135. *Microscopium huius generis simplicissimum, quod tantum ex duabus lentibus constet, construere eiusque qualitates describere.*

SOLUTIO

Cum ergo hic duae tantum lentes occurrant inque earum intervallo imago realis reperiatur, habebit littera P valorem negativum, qui sit $= -k$, ita ut pro multiplicatione habeatur $m = \frac{kh}{a}$ seu $k = \frac{ma}{h}$; scilicet denotante a distantiam obiecti, α distantiam imaginis post lentem obiectivam et b distantiam lentis ocularis post imaginem erit quoque $k = \frac{\alpha}{b}$. Tum vero introducta littera $A = \frac{\alpha}{a}$ erit distantia focalis primae lentis

$$p = \mathfrak{A}a$$

et secundae lentis

$$q = \frac{Aa}{k} = \frac{Ah}{m}$$

harumque lentium intervallum

$$= Aa\left(1 + \frac{1}{k}\right) = Aa\left(1 + \frac{h}{ma}\right);$$

quod ergo ut sit positivum, numerus A debet esse positivus ideoque etiam $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$ erit positivus, ita ut ambae lentes debeant esse convexae. Deinde erit spatii in obiecto conspicui semidiameter

$$z = \frac{\mathfrak{q}}{ma+h} \cdot ah\xi,$$

ubi sumi solet $\xi = \frac{1}{4}$, et ut capi possit $\mathfrak{q} = 1$, lentem ocularem utrinque aeque convexam statui convenit, ita ut habeatur

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{ah}{ma+h}.$$

Pro loco autem oculi inveniemus distantiam

$$O = \frac{q}{Ma} \cdot \frac{h}{m} = q\left(1 + \frac{h}{ma}\right) = \frac{Ah}{m}\left(1 + \frac{h}{ma}\right),$$

quoniam hoc casu fit

$$M = \frac{h}{ma+h} \quad \text{ob} \quad \mathfrak{q} = 1.$$

Quo cognito examinemus aequationem [§ 23], qua margo coloratus destruitur, quae postulat, ut sit

$$0 = \frac{N'\mathfrak{q}}{k} \quad \text{seu} \quad 0 = \frac{h}{ma},$$

quod cum fieri nequeat, evidens est marginem coloratum hoc casu tolli non posse. Quodsi ergo hunc marginem tolerare velimus, consideremus etiam aequationem pro altera confusione tollenda [§ 31]

$$\frac{mx^3}{a^2h}\left(\mu\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}}\right) + \frac{\mu'\lambda'}{A^3k}\right) = \frac{1}{k^3}\text{ [1]},$$

quae ergo confusio ad nihilum redigi nequit; unde nulla ratio suadet duas vitri species adhibere; cum autem lens ocularis debeat esse utrinque aequaliter convexa, sumi debebit $\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2$; deinde pro priori lente sumi convenit $\lambda = 1$, quo tota confusio minor reddatur hincque definiatur semidiameter aperturae primae lentis x; qua cognita erit $y = \frac{hx}{ma}$ et mensura

1) Vide notam p. 9. E. Ch.

claritatis $= 20y = \frac{20hx}{ma}$. Pro microscopiis quidem sumi solet $k = 20$. Verum hic nihil adhuc definiamus, cum sine dubio praestaret, si valor ipsius k ad 50 usque augeri posset, uti in telescopiis fecimus.

COROLLARIUM 1

136. Cum sit $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$ ideoque unitate minus, manifestum est, quo magis $\mathfrak{A}$ ad unitatem accedat, eo minorem fore confusionem ideoque pro x eo maiorem valorem inventum iri. Cum igitur hoc eveniat, si A sit numerus magnus, hoc casu insuper alterum membrum in expressione pro confusione fiet minimum.

COROLLARIUM 2

137. Cum igitur A adhuc arbitrio nostro sit permissa, eius valorem satis magnum assumi conveniet. Interim tamen longitudo instrumenti prohibet, ne litterae A valorem nimis magnum tribuamus; longitudo haec scilicet est spectanda, quae proxime erit Aa; quocirca ex maxima longitudine, quam admittere voluerimus, littera A definiatur.

COROLLARIUM 3

138. Cum deinde etiam distantia obiecti a arbitrio nostro relinquatur, ob rationem iam allatam non conveniet hanc distantiam nimis magnam statuere, sed potius praestabit eam tam parvam assumere, quam circumstantiae permittunt; videtur autem haec distantia a vix infra dimidium digitum commode diminui posse.

SCHOLION 1

139. Quodsi ad has circumstantias non attendamus, binae lentes pro lubitu assumi poterunt atque tum adeo earum intervallum definire licebit, ut datam multiplicationem producant; quod quo clarius reddatur, spectemus ambas distantias focales p et q tanquam datas una cum multiplicatione m. Cum igitur sit $q = \frac{Ah}{m}$, inveniemus statim $A = \frac{mq}{h}$ hincque $\mathfrak{A} = \frac{mq}{mq+h}$. Deinde cum sit $p = \mathfrak{A}a$, hinc elicimus distantiam obiecti

$$a = \frac{p}{\mathfrak{A}} = \frac{mq+h}{mq} \cdot p = \left(1 + \frac{h}{mq}\right)p.$$

Intervallum autem harum duarum lentium capi debebit

$$Aa\left(1+\frac{h}{ma}\right)=p+q+\frac{mpq}{h}.$$

Tum vero pro loco oculi erit

$$O=\frac{hq}{(mq+h)p}\left(p+q+\frac{mpq}{h}\right)$$

et

$$z=\frac{1}{4}\cdot\frac{(mq+h)p}{m\left(p+q+\frac{mpq}{h}\right)}.$$

Denique cum A sit numerus satis magnus, aperturam lentis obiectivae tantam assumere licebit, ut sit eius semidiameter

$$x=\frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{hp^2q}{\mu\lambda(mq+h)}},$$

unde concluditur mensura claritatis

$$=\frac{20hq}{k(mq+h)}\sqrt[3]{\frac{hq}{\mu\lambda(mq+h)p}},$$

unde intelligitur claritatem fieri eo maiorem, quo minor capiatur distantia focalis primae lentis p et quo maior capiatur distantia secundae lentis q.

EXEMPLUM

140. Posita distantia obiecti $=a$, quae sive sit unius digiti sive minor, arbitrio artificis relinquatur, ac ne pro maioribus multiplicationibus secunda lens fiat nimis parva, sumamus $A=40$ fietque intervallum lentium

$$=40a\left(1+\frac{h}{ma}\right);$$

tum vero erit $\mathfrak{A}=\frac{40}{41}$, unde pro apertura lentis obiectivae habebimus hanc aequationem:

$$\frac{mx^3}{a^2h}\left(\mu\left(\frac{41^3}{40^3}\lambda+\frac{41\nu}{40^2}\right)+\frac{\mu'\lambda'h}{40^3ma}\right)=\frac{1}{k^3},$$

ubi alterum membrum manifesto prae priori reiici potest. Sumamus igitur

$\lambda = 1$, et cum $\mu\left(\frac{41^3}{40^3} + \frac{41v}{40^2}\right)$ sit proxime $= 1$, erit

$$x = \frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{a^2 h}{m}} \quad \text{hincque} \quad y = \frac{h}{km}\sqrt[3]{\frac{h}{ma}}$$

et mensura claritatis

$$= \frac{20h}{km}\sqrt[3]{\frac{h}{ma}}.$$

Quodsi ergo nunc, ut in microscopiis fere fieri solet, sumatur $k = 20$, erit mensura claritatis

$$= \frac{h}{m}\sqrt[3]{\frac{h}{ma}},$$

ita ut claritas decrescat in ratione $m^{\frac{4}{3}}$, cum in microscopiis simplicibus tantum decreverit in ratione m. Denique pro loco oculi erit distantia

$$O = \frac{40h}{m}\left(1 + \frac{h}{ma}\right).$$

SCHOLION 2

141. Diminutio claritatis, quae hoc casu prodiit, parum negotium turbaret, si modo distantia obiecti a satis parva caperetur; verum praecipuum vitium, quo haec microscopia laborant, in hoc consistit, quod obiecta insigni margine colorato cincta sint adparitura. Quare ante omnia erit curandum, ut ista microscopia ab hoc vitio liberentur, id quod alio modo praestari nequit, nisi insuper lentem introducendo, ita ut huiusmodi microscopia ad minimum tribus lentibus constare debeant, et quoniam vitri diversitas hic parum subsidii adferre potest, primo quidem omnes has lentes ex eodem vitro parari assumamus. Tum vero duos casus hic examini subiici conveniet, alterum, quo nova ista lens ante imaginem realem, alterum vero, quo post eam collocatur; quos duos casus in sequentibus problematibus fusius pertractemus.

PROBLEMA 2

142. *Microscopium compositum ita ex tribus lentibus conficere, ut margo coloratus evanescat et lens media ante imaginem realem cadat.*

SOLUTIO

Hoc ergo casu cum habeantur tres lentes, litterarum P et Q prior P positivum retinebit valorem, posterior vero Q negativa statui debebit. Po-

natur igitur $Q = -k$, ut sit multiplicatio $m = Pk \cdot \frac{h}{a}$ ideoque $Pk = \frac{ma}{h}$; unde distantiae focales lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P} \cdot a, \quad r = -\frac{AB}{Pk} \cdot a = -AB \cdot \frac{h}{m}.$$

Deinde intervalla lentium

$$\text{I et II} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \qquad \text{II et III} = -\frac{AB}{P} \cdot a\left(1 + \frac{1}{k}\right);$$

quae ut ambo fiant positiva, primo $A\left(1 - \frac{1}{P}\right)$ debet esse positivum, deinde etiam $-AB > 0$ sive AB quantitas negativa, ita ut, si A fuerit numerus positivus, tum debeat esse $P > 1$ et $B < 0$, sin autem sit $A < 0$, tum esse debeat $P < 1$ et $B > 0$.

Nunc consideremus spatium in obiecto conspicuum, cuius semidiameter erit

$$z = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma + h} \cdot ah\xi = Ma\xi,$$

ita ut sit

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma + h} \cdot h,$$

ubi sumi poterit $\mathfrak{r} = 1$, si quidem lens ocularis utrinque fiat aequalis. Pro $\mathfrak{q}$ autem habetur ista aequatio $-\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P - 1)M$. Deinde pro loco oculi fiat distantia

$$O = \frac{\mathfrak{r}r}{Ma} \cdot \frac{h}{m},$$

quae ut fiat positiva, necesse est, ut r sit quantitas positiva ideoque AB quantitas negativa, ut iam notavimus.

Tum autem margo coloratus destruetur, si fuerit

$$0 = \frac{\mathfrak{q}}{P} + \frac{\mathfrak{r}}{PQ} = \frac{\mathfrak{q}}{P} - \frac{\mathfrak{r}}{Pk}$$

adeoque

$$k = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}} = \frac{1}{\mathfrak{q}} \quad \text{ob} \quad \mathfrak{r} = 1 \quad \text{seu} \quad \mathfrak{q} = \frac{1}{k}.$$

Hic igitur praeter exspectationem novus modus se offert ista microscopia multo magis perficiendi atque adeo campum visionis duplicandi, id quod fit, si litterae $\mathfrak{q}$ valor unitati aequalis perinde ac litterae $\mathfrak{r}$ tribuatur, ad quod

necesse est, ut tam secunda quam tertia lens fiant utrinque aeque convexae; quamobrem ponamus $k=1$, ut fiat $\mathfrak{q}=\mathfrak{r}=1$ hincque

$$z=\frac{2}{ma+h}\cdot ah\xi=\frac{1}{4}\cdot\frac{2ah}{ma+h}.$$

Tum vero erit $P=\frac{ma}{h}$; unde, quia $P>1$, erit $A>0$ et $\mathfrak{A}>0$ et $\mathfrak{A}<1$ ideoque $B<0$. Fiet autem

$$-\mathfrak{B}=\left(\frac{ma-h}{h}\right)M=\frac{2(ma-h)}{ma+h}$$

ob $M=\frac{2}{ma+h}\cdot h$, ex quo ob $\frac{ma}{h}$ numerum praemagnum erit proxime $\mathfrak{B}=-2$ et $B=-\frac{2}{3}$, plane ut requiritur. Tuto autem statuere poterimus $\mathfrak{B}=-2$; etsi enim tum $\mathfrak{q}$ aliquanto minor unitate prodeat ideoque margo coloratus non perfecte tollatur, manente scilicet $k=1$, tamen defectus prior in campo visionis vix erit sensibilis, praecipue pro magnis multiplicationibus; deinde iam saepius annotavimus non opus esse, ut margo coloratus penitus destruatur, quoniam locus oculi, ad quem refertur, non exiguam patitur latitudinem. Pro loco oculi vero nunc habebimus

$$O=\frac{r(ma+h)}{2ma}.$$

Cum igitur nunc sit

$$\mathfrak{B}=-2,\quad B=-\frac{2}{3},\quad P=\frac{ma}{h}\quad\text{et}\quad k=1,$$

littera vero A ita arbitrio nostro permittatur, ut tantum positiva accipi debeat, distantiae focales lentium ita se habebunt:

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=\frac{2Ah}{m},\quad r=\frac{2}{3}\cdot\frac{Ah}{m}=\frac{1}{3}q$$

et distantia oculi

$$O=\frac{A(ma+h)h}{3m^2a}=\frac{A\left(1+\frac{h}{ma}\right)h}{3m}$$

ideoque proxime

$$O=\frac{Ah}{3m}=\frac{1}{2}r.$$

Intervalla autem lentium nunc reperiuntur

$$\text{I et II} \quad = Aa\left(1 - \frac{h}{ma}\right), \qquad \text{II et III} \quad = \frac{4}{3} \cdot \frac{Ah}{m}$$

sicque tota longitudo

$$= Aa + \frac{2Ah}{3m}$$

existente $z = \frac{1}{4} \cdot \frac{2ah}{ma+h}$.

Nihil igitur aliud restat, nisi ut aperturam primae lentis definiamus ex hac aequatione:

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} + \frac{h}{A^3 ma}\left(\frac{\lambda'}{8} - \frac{3\nu'}{4}\right) + \frac{27\lambda'' h}{8A^3 ma}\right) = \frac{1}{k^3},$$

ubi notandum est, quia ambae posteriores lentes debent esse utrinque aequaliter convexae, fore

$$\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2 (1 - 2\mathfrak{B})^2 = 1 + 25\left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2$$

et

$$\lambda'' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2.$$

At pro λ unitatem sumi convenit; tum ergo ob $\mathfrak{A} = \frac{p}{a}$ haec aequatio commode ita transformabitur:

$$\frac{\mu m a x^3}{p^3 h}\left(1 + \frac{\mathfrak{A}^2\nu}{A} + \frac{\mathfrak{A}^3 h}{A^3 ma}\left(\frac{\lambda'}{8} - \frac{3\nu'}{4}\right) + \frac{27\mathfrak{A}^3 h\lambda''}{8A^3 ma}\right) = \frac{1}{k^3}.$$

Ponamus nunc brevitatis gratia

$$1 + \frac{\mathfrak{A}^2\nu}{A} + \frac{\mathfrak{A}^3 h}{A^3 ma}\left(\frac{\lambda'}{8} - \frac{3\nu'}{4}\right) + \frac{27\mathfrak{A}^3 h\lambda''}{8A^3 ma} = \varDelta,$$

cuius valor unitatem non nisi parum superabit, dummodo pro A numerus modicus assumatur. Quare, cum μ semper sit numerus ab unitate parum deficiens, ita ut sumi possit $\mu\varDelta = 1$, quocirca habebimus

$$x = \frac{p}{k}\sqrt[3]{\frac{h}{ma}},$$

ubi pro k sumi potest 20 vel potius numerus adhuc maior, quo obiecta distinctius repraesententur. Tum vero erit mensura claritatis

$$= \frac{20ph}{kma}\sqrt[3]{\frac{h}{ma}}.$$

COROLLARIUM 1

143. Cum adhuc littera A arbitrio nostro sit relicta, eam tantam assumi conveniet, ut distantia focalis r non fiat nimis exigua etiam pro maximis multiplicationibus; scilicet ut pro multiplicatione $m = 1000$ distantia focalis lentis ocularis non infra $\frac{1}{2}$ dig. capi debeat, oportebit sumere $A > 94$; unde erit $[A = 100$ et$]$ $\mathfrak{A} = \frac{100}{101}$.

COROLLARIUM 2

144. Neutiquam vero consultum erit litterae A multo maiorem valorem tribuere, quia tum longitudo instrumenti nimium excresceret; si enim posito $A = 100$ distantia obiecti a unius tantum digiti sumeretur, longitudo instrumenti octo pedes esset superatura; quare si velimus statuere $A = 100$, necesse erit, ut distantia obiecti a ad dimidium digitum vel etiam $\frac{1}{4}$ dig. reducatur.

COROLLARIUM 3

145. At si distantia $a = \frac{1}{4}$ dig. nimis parva videatur, praestabit utique assumere $A = 50$, quo casu lens ocularis, etiamsi millies multiplicemus, tamen vix infra $\frac{1}{4}$ dig. sit reducenda, quae magnitudo in praxi facile admitti potest, cum talis lens aperturam adhuc patiatur pupilla maiorem.

COROLLARIUM 4

146. At si tantum sumatur $A = 50$, tum erit $\mathfrak{A} = \frac{50}{51}$, ita ut distantia focalis lentis obiectivae p tantillo minor accipi debeat quam distantia obiecti a, quam pro circumstantiis commode $= \frac{1}{2}$ dig. sumere licebit. Praeterea vero valor litterae $\mathfrak{A}$ multo propius ad unitatem revocabitur, dum bina posteriora membra huius litterae plane pro evanescentibus haberi poterunt.

SCHOLION 1

147. Haec microscopiorum species pleraque instrumenta, quae hodie sub titulo microscopiorum compositorum circumferuntur, in se complectitur, quae igitur pro eo melioribus sunt habenda, quo minus a constructione hic praescripta discrepant. Praecipua autem proprietas in hoc consistit, quod distantia focalis lentis mediae triplo maior sit quam lentis ocularis haeque lentes ita disponantur, ut imago realis media interiaceat inter binas lentes oculares, sive, quod eodem redit, ut intervallum harum duarum lentium duplo maius sit quam distantia focalis postremae lentis. Quo igitur constructionem horum microscopiorum clarius ob oculos ponamus, primo consideremus lentem obiectivam, quae tantum a distantia obiecti a, quam pro lubitu assumere licet, pendet, cuius constructio, si ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, paretur, ita se habet:

Constructio lentis obiectivae pro data distantia obiecti a ex vitro communi parandae

$$\text{Radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma-\varrho)} = \dfrac{p}{0{,}2194} = 4{,}5579\,p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma-\varrho)} = \dfrac{p}{1{,}5987} = 0{,}6255\,p;\end{cases}$$

unde deducitur sequens

CONSTRUCTIO HUIUSMODI MICROSCOPIORUM EX TRIBUS LENTIBUS COMPOSITORUM PRO QUAVIS MULTIPLICATIONE

148. Singulae hae lentes ex vitro communi, cuius refractio est $n = 1{,}55$, parentur et posita obiecti distantia $= a$, quam commode $= \frac{1}{2}$ dig. assumere licebit, erit:

I. Pro lente prima, cuius distantia focalis est $p = \frac{50}{51}a$, sumatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 4{,}4668\,a \\ \text{posterioris} & = 0{,}6130\,a,\end{cases}$$

eius aperturae semidiameter statuatur $x = \dfrac{0{,}0980\,a}{\sqrt[3]{ma}}$

et distantia ad lentem secundam $= 50a - \frac{400}{m}$ dig.

II. Pro secunda lente, cuius distantia focalis est $q = \frac{800}{m}$ dig., sumatur

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{880}{m} \text{ dig.},$$

aperturae semidiameter $= \frac{200}{m}$ dig.

et distantia ad lentem tertiam $= \frac{533}{m}$ dig.

III. Pro lente tertia, cuius distantia focalis $r = \frac{267}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei utriusque} = \frac{293}{m} \text{ dig.},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{67}{m}$ dig.

et distantia ad oculum $= \frac{133}{m}$ dig.

IV. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit $z = \frac{4a}{ma + 8}$ dig.

et instrumenti longitudo $= 50a + \frac{267}{m}$ dig.

atque mensura claritatis $= \frac{16}{m\sqrt[3]{ma}}$.

Notari hic meretur primam lentem tantum a distantia obiecti a pendere eamque pro omni multiplicatione retineri posse, duas vero posteriores lentes tantum a multiplicatione pendere easdemque pro omni distantia obiecti a locum habere posse; unde tantum pro variis aliquot multiplicationis gradibus praecipuis duas has lentes construi conveniet, veluti tabella subiuncta indicabit:

	Distantia focalis		Distantia	
m	lentis II	lentis III	II et III	oculi
50	16 dig.	5,33 dig.	10,67 dig.	2,67 dig.
100	8	2,67	5,33	1,33
200	4	1,33	2,67	0,67
300	2,66	0,89	1,77	0,44
400	2	0,67	1,33	0,33
500	1,60	0,53	1,07	0,27
600	1,33	0,44	0,88	0,22
800	1	0,33	0,67	0,17
1000	0,8	0,27	0,53	0,13

Interim tamen deinceps ostendemus, quemadmodum etiam iisdem ternis lentibus retentis microscopia ad omnes multiplicationes accommodata construi possint.

SCHOLION 2

149. Formulae, ex quibus hanc microscopiorum constructionem deduximus, ita sunt generales, ut etiam ad telescopia accommodari queant. Cum enim tum sit $a = \infty$ et $\mathfrak{A}a$ distantiam focalem lentis obiectivae denotet, evidens est statui debere $\mathfrak{A} = 0$ ideoque etiam $A = 0$, ita tamen, ut sit $\mathfrak{A}a = p$; quare ob $h = a$ erunt distantiae focales duarum reliquarum lentium

$$q = -\frac{\mathfrak{B}p}{P} \quad \text{et} \quad r = -\frac{Bp}{Pk} = -\frac{Bp}{m},$$

sive ob

$$\mathfrak{B} = -2 \quad \text{et} \quad B = -\frac{2}{3}$$

erit

$$q = +\frac{2p}{m} \quad \text{et} \quad r = +\frac{2p}{3m} = \frac{1}{3}q,$$

lentium porro intervalla

$$\text{I et II} \quad = p\left(1 - \frac{1}{m}\right), \qquad \text{II et III} \quad = \frac{4p}{3m} = 2r$$

et distantia oculi

$$O = \frac{p(m+1)}{3m^2} = \frac{m+1}{2m} \cdot r,$$

unde longitudo telescopii tota

$$= p\left(1 + \frac{2}{3m} + \frac{1}{3m^2}\right).$$

Tum vero semidiameter campi visionis

$$\frac{z}{a} = \Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{m+1}.$$

Denique pro apertura determinanda habebitur

$$x = \frac{p}{k}\sqrt[3]{\frac{1}{m}} \quad \text{hincque} \quad y = \frac{p}{km}\sqrt[3]{\frac{1}{m}}$$

et mensura claritatis

$$= \frac{20p}{km}\sqrt[3]{\frac{1}{m}}.$$

Praeterea vero hic notasse iuvabit primo semidiametrum imaginis realis; quae cum in genere sit $= ABz$ [§ 11], erit ea $= -\frac{p}{3(m+1)}$; quodsi enim in hoc loco diaphragma inseratur, eius foramen hinc determinari debet; deinde cum sit semidiameter penicillorum radiosorum in oculum ingredientium

$$= y = \frac{p}{km}\sqrt[3]{\frac{1}{m}},$$

quoniam in loco oculi operculum statui solet foraminulo pertusum, eius semidiameter hinc determinabitur. Nihil autem impedit, quominus hoc foraminulum maius statuatur. Cum vero in telescopiis detur $x = my$, erit

$$p = kmy\sqrt[3]{m}.$$

Hinc igitur, si vitro communi utamur, cuius refractio est $n = 1{,}55$, sequens nascitur

Constructio telescopii astronomici tribus lentibus instructi

I. Pro prima lente obiectiva, cuius distantia focalis est $p = kmy\sqrt[3]{m}$ ideoque datur, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{p}{1{,}6274} = 0{,}6145p\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{p}{0{,}1907} = 5{,}2438p,\end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $x = my$
et distantia ad lentem secundam $= p\left(1 - \frac{1}{m}\right)$.

II. Pro secunda lente, cuius distantia focalis est $q = \frac{2p}{m}$, erit

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{11}{10}q = \frac{11p}{5m},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}q$
et distantia ad lentem ocularem $= \frac{4p}{3m} = \frac{2}{3}q = 2r$.

III. Pro lente oculari, cuius distantia focalis est $r = \frac{2p}{3m} = \frac{1}{3}q$, erit

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{11}{10}r = \frac{11p}{15m} = \frac{11}{30}q,$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}r$
et distantia ad oculum $= \frac{m+1}{2m}\cdot r$.

IV. Longitudo ergo huius telescopii erit

$$p\left(1+\frac{2}{3m}+\frac{1}{3m^2}\right)$$

et campi apparentis semidiameter

$$\Phi=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{m+1}=\frac{1718}{m+1}\text{ minut.}$$

V. Si in loco imaginis realis, quae in medio puncto inter binas posteriores lentes existit, diaphragma constitui debeat, eius semidiameter esse oportet

$$=-\frac{p}{3(m+1)}.$$

PROBLEMA 3

150. *Datis tribus lentibus convexis, quarum tertiae distantia focalis triplo sit minor quam secundae, ex iis microscopium componere, quod ad omnes multiplicationes producendas sit aptum.*

SOLUTIO

Sit primae lentis, quae locum obiectivae occupat, distantia focalis $=p$, secundae lentis $=q$ et tertiae lentis $=r=\frac{1}{3}q$; quae omnes tres distantiae sint positivae et datae una cum multiplicatione $=m$; quare, si formulas in superiore problemate inventas contemplemur, ex binis posterioribus lentibus statim colligimus

$$A=\frac{mq}{2h}\quad\text{ideoque}\quad\mathfrak{A}=\frac{mq}{mq+2h}.$$

Porro ex prima lente innotescet distantia obiecti

$$a=\frac{mq+2h}{mq}\cdot p=p\left(1+\frac{2h}{mq}\right).$$

Hinc nostrae lentes sequentia inter se intervalla tenere debebunt:

$$\text{I et II}\quad=\frac{(mq+2h)p-hq}{2h}=p-\frac{1}{2}q+\frac{mpq}{2h},$$

$$\text{II et III}\quad=2r=\frac{2}{3}q.$$

Deinde ut hae lentes tam eundem campum producant, quem supra assignavimus, quam etiam eandem claritatem, circa has tres lentes datas insuper requiritur:

I. Ut lens prima propemodum sit plano-convexa eiusque facies plana obiecto obvertatur, vel adhuc magis praestabit, si radius anterior sexies vel septies circiter maior sit quam posterior.

II. Ut binae reliquae lentes utrinque sint aequaliter convexae.

Tum vero spatii in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z=\frac{h}{2m}\cdot\frac{mq+2h}{(mq+2h)p+hq}\cdot p,$$

pro quo requiritur, ut oculi a lente oculari distantia sit

$$O=\frac{1}{2}r\left(1+\frac{hq}{(mq+2h)p}\right)=\frac{1}{2}r \text{ proxime.}$$

Praeterea vero pro apertura lentis obiectivae eius semidiameter reperitur

$$x=\frac{p}{k}\sqrt[3]{\frac{hq}{(mq+2h)p}},$$

ubi notetur, quo magis k numerum 20 superare accipiatur, eo minorem fore confusionem, atque sic invento x mensura claritatis erit

$$\frac{20h}{ma}\cdot x=\frac{20hqx}{(mq+2h)p}.$$

Pro diaphragmate in loco imaginis realis constituendo erit radius foraminis

$$\frac{2}{3}Az=\frac{1}{2}r\cdot\frac{(mq+2h)p}{(mq+2h)p+hq}.$$

COROLLARIUM 1

151. Quod primo ad distantiam obiecti attinet, ea semper erit aliquanto maior quam distantia focalis lentis obiectivae idque eo magis, quo minor fuerit multiplicatio. Sin autem multiplicatio adeo fiat infinita, sumi debebit haec distantia $a=p$.

COROLLARIUM 2

152. Intervallum vero lentium primae et secundae potissimum a multiplicatione m pendet, ita ut pro multiplicatione infinita hoc intervallum adeo infinitum sit capiendum. Ne igitur pro maioribus multiplicationibus hoc intervallum nimis prodeat magnum, hoc incommodum evitabitur, si quantitates p et q tam parvae accipiantur, quam circumstantiae in praxi observandae permittunt.

COROLLARIUM 3

153. Cum loco x valore substituto sit mensura claritatis

$$= \frac{20hq}{(mq+2h)k}\sqrt[3]{\frac{hq}{(mq+2h)p}},$$

intelligimus claritatem eo fore maiorem, quo minor fuerit distantia focalis p; quam tamen tantam esse convenit, ut distantia obiecti a, quae ipsi proxime est aequalis, non fiat nimis exigua; praeterea vero etiam claritas proportionalis est isti formulae:

$$\left(\frac{q}{mq+2h}\right)^{\frac{4}{3}},$$

quae circumstantia suadet pro q valorem non nimis exiguum.

EXEMPLUM

154. Sumamus tres lentes datas ita esse comparatas, ut sit:

1. Lentis primae distantia focalis $p = \frac{1}{2}$ dig. eaque propemodum planoconvexa eiusque facies planior obiecto obvertatur. Sic enim distantia obiecti non nimis parva erit censenda.

2. Secundae autem lentis, quae utrinque sit aequaliter convexa, distantia focalis sit $q = 1$ dig., ut aperturam admittat, cuius semidiameter $x = \frac{1}{4}$ dig.

3. Tertiae vero lentis ocularis itidem utrinque aequaliter convexae sit distantia focalis $r = \frac{1}{3}$ dig., ut aperturam admittat, cuius semidiameter $= \frac{1}{12}$ dig. sive diameter $= \frac{1}{6}$ dig.

His igitur datis momenta constructionis ita sunt comparata, ut quaedam neutiquam a multiplicatione pendeant, reliqua vero pro qualibet multiplicatione seorsim definiri debeant. Prioris generis sunt:

1. Distantia tertiae lentis a secunda, quae constanter erit $\frac{2}{3}$ dig. pro oculis scilicet valentibus, ita ut lens ocularis ab imagine reali distet intervallo $= \frac{1}{3}$ dig., scilicet suae distantiae focali aequali. In gratiam autem myopum et presbytarum conveniet hoc intervallum mutabile reddi ope cochleae, qua lens ocularis circiter parte quadragesima digiti vel propius admoveri vel longius removeri possit.

2. Distantia oculi a lente oculari itidem censeri potest constanter $= \frac{1}{2}r = \frac{1}{6}$ dig.; etiamsi enim revera ea paulisper a multiplicatione pendeat et aliquantillo maior esse debeat, tamen locus oculi tantae praecisionis non est capax.

Momenta autem pro varia multiplicatione variabilia sunt sequentia:

1. Distantia obiecti a lente obiectiva, quae hoc casu erit

$$a = \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{m}\right) \text{dig.}$$

sumto scilicet $h = 8$ dig., ita ut haec distantia semper superet $\frac{1}{2}$ dig.

2. Maxime autem a multiplicatione pendet intervallum lentium primae et secundae; quod si indicetur littera L, erit $L = \frac{m}{32}$ dig., ita ut pro multiplicatione $m = 320$ L tantum fiat decem digitorum et, si ad duos pedes augeatur, iam multiplicationi $m = 768$ inserviat, ad quam mutationem producendam evidens est tubo ductitio esse opus.

3. Inprimis quoque a multiplicatione pendet apertura primae lentis, cuius semidiameter erit

$$x = \frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{2}{m+16}} \text{ dig.},$$

ubi sumsimus $k = 20$. Perspicuum autem est, si valorem ipsius x minorem statuamus, confusionem in ratione triplicata diminutum iri.

4. Quodsi in loco imaginis realis seu in distantia $= \frac{1}{3}$ dig. post lentem mediam diaphragma velimus collocare, eius foraminis apertura esse debebit

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{m+16}{m+32} \text{ dig.};$$

quare, si multiplicatio sit valde magna, haec semidiameter erit $\frac{1}{6}$ dig. eiusque ergo diameter $= \frac{1}{3}$ dig., quae mensura etiam minoribus multiplicationibus inservire potest, ita ut diaphragma mutare non sit opus.

5. Quod ad foraminulum attinet, cui oculus est adplicandus, si necesse videatur eius semidiametrum ipsi y aequalem statuere, reperietur ea $=\frac{16x}{m+16}$; quae ergo pro casu $m=112$ prodiret $=\frac{1}{640}$ dig. Quoniam vero tantillum foraminulum quasi sensus effugeret, sufficiet praecepisse hoc foraminulum quam minimum fieri.

Hoc autem microscopio constructo, quemadmodum hic est descriptum, eius ope in obiecto spatiolum conspicietur, cuius semidiameter erit

$$z=\frac{4}{m}\cdot\frac{m+16}{m+32}\text{ dig.},$$

quae ergo pro maioribus multiplicationibus erit $z=\frac{4}{m}$ dig., quod spatium certe satis est notabile. Denique vero mensura claritatis, qua obiecta cernentur, erit

$$\frac{320x}{m+16}=\frac{16}{m+16}\sqrt[3]{\frac{2}{m+16}},$$

cuius quadrato proprie loquendo ipsa claritas censenda est proportionalis. Quodsi ergo obiectum a sole collustretur et nos multiplicationem eo usque augere velimus, ut ipsa claritas centies millies adeo fiat minor (quandoquidem tum adhuc duplo maior erit, quam si obiectum a plena luna illustraretur), hoc eveniet pro multiplicatione $m=700$; quae multiplicatio tanta est, ut vix unquam maior desideretur.

PROBLEMA 4

155. *Microscopium compositum ita ex tribus lentibus conficere, ut margo coloratus evanescat et lens media post imaginem realem cadat.*

SOLUTIO

Hoc ergo casu cum tres habeantur lentes, litterarum P et Q prior P negativum habebit valorem posteriore Q manente positiva. Sit igitur $P=-k$, ut sit multiplicatio

$$m=kQ\cdot\frac{h}{a}\quad\text{seu}\quad kQ=\frac{ma}{h};$$

unde distantiae focales lentium erunt

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=+\frac{A\mathfrak{B}}{k}a,\quad r=-\frac{ABh}{m}$$

et lentium intervalla

$$\text{I et II} \quad = Aa\left(1+\frac{1}{k}\right), \qquad \text{II et III} \quad = \frac{AB}{k}a\left(1-\frac{1}{Q}\right),$$

unde patet esse debere $A>0$ ideoque etiam $\mathfrak{A}>0$ et $\mathfrak{A}<1$, tum vero etiam $B(Q-1)>0$, ita ut, si B sit >0, tum esse debeat $Q>1$, sin autem $B<0$, tum $Q<1$.

Nunc consideretur spatium conspicuum, cuius semidiameter est

$$z = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{ma+h}\cdot ah\xi,$$

ita ut posito

$$M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}}{ma+h}\cdot h$$

fiat

$$z = Ma\xi,$$

ubi sumi potest $\mathfrak{r}=1$, siquidem lens ocularis sit utrinque aequalis et $\mathfrak{q}$ unitatem non superet, sive negative sive positive. Pro $\mathfrak{q}$ autem habebitur haec aequatio:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (k+1)M.$$

Deinde pro loco oculi fiet distantia

$$O = \frac{\mathfrak{r}r}{Ma}\cdot\frac{h}{m};$$

quae ut sit positiva, debet esse $r>0$ seu $AB<0$ adeoque B negativum et $Q<1$. Hinc igitur pro margine colorato tollendo habebitur ista aequatio:

$$0 = \frac{\mathfrak{q}}{P} + \frac{\mathfrak{r}}{PQ} = \frac{\mathfrak{q}}{k} + \frac{1}{kQ},$$

unde colligitur $\mathfrak{q} = -\frac{1}{Q}$; quare, cum sit $Q<1$, prodiret $\mathfrak{q}$ non solum negativum, sed etiam unitate maius; quod cum sit absurdum, evidens est hoc casu marginem coloratum tolli plane non posse; neque ergo opus est, ut hunc casum ulterius prosequamur.

SCHOLION

156. Hoc igitur casu reiecto istud caput, in quo simpliciora huius generis microscopia sumus contemplati, finiemus et, quemadmodum haec microscopia

ad maiorem perfectionis gradum evehi queant, indagabimus; praecipuum autem incommodum, quo haec microscopia etiamnum laborant, in hoc consistit, quod pro maioribus multiplicationibus claritas nimis fiat exigua, cuius rei ratio manifesto sita est in parvitate aperturae x, quae autem maiorem valorem accipere non potest, nisi ipsa expressio pro semidiametro confusionis inventa minorem valorem adipiscatur; id quod duplici modo obtinere poterimus, priore scilicet, dum loco lentis obiectivae simplicis duae vel tres vel etiam quatuor lentes convexae substituuntur; quippe quo modo id lucramur, ut hae lentes maiores distantias focales consequantur quam lens simplex atque etiam maiorem aperturam adipiscantur. Deinde vero, si etiam lentibus concavis uti velimus, expressio illa pro semidiametro confusionis adeo ad nihilum redigi poterit, ita ut aperturae primae lentis alii limites non praescribantur, nisi quos ipsa lentis figura postulat. Deinde vero, etiam si diversas vitri species adhibeamus, adeo effici poterit, ut etiam altera confusio a diversa refractione oriunda penitus tollatur; in quo etsi summus perfectionis gradus consistere videtur, tamen id adhuc incommodi se immiscet, quod lentes illae loco obiectivae substituendae multo fiant minores; quod cum priore modo secus eveniat, utique operae erit pretium hos ambos modos percurrere. Denique vero, etsi campus visionis hic est satis notabilis, tamen, ut argumentum hoc plene absolvamus, etiam monstrabimus, quomodo hunc campum adhuc magis atque adeo ad lubitum amplificari conveniat.

CAPUT II

DE ULTERIORI HORUM MICROSCOPIORUM PERFECTIONE DUM IIS MAIOR CLARITATIS GRADUS DUAS PLURESVE LENTES CONVEXAS LOCO OBIECTIVAE SUBSTITUENDO COMPARATUR

PROBLEMA 1

157. *Loco lentis obiectivae eiusmodi duas lentes convexas proxime sibi iunctas substituere, ut binis reliquis lentibus secundum praecepta in superiore capite data constitutis maior claritatis gradus obtineatur.*

SOLUTIO

Cum hic quatuor lentes sint considerandae, quarum binae priores minimo intervallo sint seiunctae, tertia vero ante imaginem realem cadat, littera P minime ab unitate discrepabit, Q vero adhuc erit positiva, tertia vero R negativa; quam ob causam statuamus $R = -k$, unde distantiae focales harum lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}a}{P}, \quad r = \frac{AB\mathfrak{C}a}{PQ} \quad \text{et} \quad s = \frac{ABCa}{PQk}.$$

Cum vero sit

$$PQk = \frac{ma}{h},$$

erit

$$s = ABC \cdot \frac{h}{m}.$$

Intervalla autem lentium erunt

$$\text{I et II} \quad = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right),$$

$$\text{II et III} \quad = -\frac{AB}{P}\cdot a\left(1 - \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III et IV} \quad = \frac{ABC}{PQ}\cdot a\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Cum autem omnes lentes sint convexae, erit

$$1.\ \mathfrak{A} > 0, \quad 2.\ -A\mathfrak{B} > 0, \quad 3.\ AB\mathfrak{C} > 0 \quad \text{et} \quad 4.\ ABC > 0$$

ideoque etiam

$$\frac{C}{\mathfrak{C}} > 0 \quad \text{seu} \quad 1 + C > 0.$$

Ratione intervallorum autem tenendum est, quia primum debet esse minimum, litteram P parum ab unitate discrepare, ita ut, si hoc intervallum ponatur $= \eta a$, futurum sit $P = \frac{A}{A - \eta}$ existente η fractione satis parva. Deinde debet esse $-AB(Q-1) > 0$ et $ABC > 0$.

Consideremus nunc spatium in obiecto conspicuum, cuius semidiameter est

$$z = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s}}{ma + h}\cdot ah\xi,$$

ubi $\mathfrak{q}$ tam erit parvum, ut reiici possit; deinde vero tam $\mathfrak{r}$ quam $\mathfrak{s}$ unitati aequales sumi poterunt, siquidem binae postremae lentes utrinque aequaliter convexae conficiantur. Hoc enim modo maximus campus visionis obtinebitur, uti in capite praecedente est ostensum. Ponamus igitur

$$M = \frac{2h}{ma + h}$$

fietque

$$z = Ma\xi;$$

unde pro loco oculi habebitur

$$O = \frac{s}{Ma}\cdot\frac{h}{m},$$

quae, ut iam assumsimus, est positiva. Ex quo pro tollendo margine colorato reperitur haec aequatio

$$0 = \frac{\mathfrak{q}}{P} + \frac{\mathfrak{r}}{PQ} + \frac{\mathfrak{s}}{PQR};$$

cum autem sit

$$\mathfrak{q} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{s} = 1 \quad \text{et} \quad R = -k,$$

habebitur

$$0 = 1 - \frac{1}{k} \quad \text{seu} \quad k = 1$$

ut ante, ita ut iam sit $PQ = \frac{ma}{h}$, et quia proxime $P = 1$, fiet proxime $Q = \frac{ma}{h}$ sive pro maioribus multiplicationibus erit Q valde magnum. His notatis aequationes fundamentales erunt

$$1. \quad -\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P-1)M,$$

$$2. \quad -\mathfrak{C}\mathfrak{r} = (PQ-1)M - \mathfrak{q},$$

quarum prior non amplius in computum venit, quoniam tam $\mathfrak{q}$ quam $P-1$ sunt valde parva; altera vero dat

$$\mathfrak{C} = -\left(\frac{ma}{h} - 1\right)M = -2\left(\frac{ma-h}{ma+h}\right),$$

unde pro maioribus multiplicationibus concluditur

$$\mathfrak{C} = -2 \quad \text{et} \quad C = -\frac{2}{3},$$

quibus valoribus tuto uti licebit; etiamsi enim vel campus visionis parumper diminueretur vel etiam margo coloratus non perfecte tolleretur, id neutiquam turbare debet. Quare, cum hactenus invenerimus

$$k = 1, \quad PQ = \frac{ma}{h} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = -2, \quad C = -\frac{2}{3},$$

prodeunt distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}a}{P}, \quad r = -2AB\cdot\frac{h}{m} \quad \text{et} \quad s = -\frac{2}{3}\cdot AB\cdot\frac{h}{m},$$

ita ut sit $s = \frac{1}{3}r$, et nunc apparet AB esse debere negativum. Intervalla autem ita exprimentur:

$$\text{Primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \eta a \quad \text{existente} \quad P = \frac{A}{A-\eta},$$

$$\text{secundum} = -\frac{AB}{P}\cdot a\left(1 - \frac{1}{Q}\right),$$

quod ob $AB < 0$ per se fit positivum,

$$\text{tertium} = -\frac{4}{3}AB\cdot\frac{h}{m} = 2s$$

atque distantia oculi

$$O = \frac{s}{Ma}\cdot\frac{h}{m} = \frac{s(ma+h)}{2ma} = \frac{1}{2}s \text{ proxime.}$$

Tandem superest consideranda aequatio pro apertura x determinanda, quae est

$$\frac{1}{k^3}=\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{1}{A^3 P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right)-\frac{h}{A^3B^3ma}\left(\frac{\lambda''}{8}-\frac{3\nu}{4}\right)-\frac{27h\lambda'''}{8A^3B^3ma}\right).$$

Statuatur brevitatis gratia

$$\varDelta=\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-\frac{1}{A^3 P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3}+\frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right)-\frac{h}{A^3B^3ma}\left(\frac{\lambda''}{8}-\frac{3\nu}{4}\right)-\frac{27h\lambda'''}{8A^3B^3ma},$$

ut sit

$$x=\frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{a^2h}{\mu m\varDelta}}=\frac{a}{k}\sqrt[3]{\frac{h}{\mu m a\varDelta}};$$

quae expressio ut eo maior prodeat quam casu praecedente, efficiendum est, ut valor $\varDelta$, quantum fieri potest, infra unitatem deprimatur, ad quod primo littera $\lambda=\lambda'=1$ capiatur; pro duabus posterioribus autem lentibus, quia utrinque aequaliter convexae esse debent, litterae λ'' et λ''' ita iam definiuntur, ut sit

$$\lambda''=1+25\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2 \quad \text{et} \quad \lambda'''=1+\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2;$$

tantum igitur restant definiendae litterae A et B, quia propemodum est $P=1$. At circa litteras A et B iam praescribitur esse 1. $\mathfrak{A}>0$ et 2. $AB<0$ pariter ac $A\mathfrak{B}<0$, ita ut sit $\frac{B}{\mathfrak{B}}>0$ seu $1+B>0$. Quamobrem omnia illa membra pro $\varDelta$ erunt positiva, ita ut eius valor ad nihilum redigi nequeat, sed tantum ad minimum sit revocandus. Pro primo quidem termino is eo minor reddetur, quo maior capiatur $\mathfrak{A}$; quia autem tum A fit negativum, littera B fiet positiva ideoque $\mathfrak{B}<1$, ex quo secundum membrum solum iterum fit maius unitate. Simili modo, si $\mathfrak{B}$ statuatur numerus magnus, fiet B negativum et A capi debebit positivum; unde $\mathfrak{A}$ fiet unitate minus, ita ut nunc primus terminus solus unitatem sit superaturus. Deinde vero etiam inprimis cavendum est, ne productum illud negativum AB fiat nimis parvum, quoniam alioquin distantiae focales r et s quasi evanescerent, ex quo necesse est, ut formula $-AB$ non infra certum valorem deprimatur. Statuamus igitur $AB=-\theta$, ita ut θ denotet limitem illum pro hoc producto observandum; qui cum ut quantitas constans spectari queat, dum litterae A et B pro variabilibus habentur, erit

$$\frac{dB}{B}=-\frac{dA}{A}.$$

His ergo notatis expressio litteram $\mathcal{A}$ definiens erit

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \frac{1}{A^3\mathfrak{B}^3P} - \frac{\nu}{A^3B\mathfrak{B}P} + \frac{h}{\theta^3ma}\left(\frac{\lambda''}{8} - \frac{3\nu}{4}\right) + \frac{27h\lambda'''}{8\theta^3ma},$$

in qua posteriora membra sunt constantia; unde ad minimum eius valorem inveniendum tantum opus erit priora membra differentiari, ubi quidem $P=1$. Hunc in finem notetur esse

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} = 1 + \frac{1}{A} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathfrak{B}} = 1 + \frac{1}{B}$$

hincque

$$\frac{d\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2} = \frac{dA}{A^2} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}^2} = \frac{dB}{B^2} = -\frac{dA}{AB},$$

ex quo aequatio differentialis prodibit

$$0 = -\frac{3B}{\mathfrak{A}^2} + \frac{3B}{A^2\mathfrak{B}^3} - \frac{3}{A^2\mathfrak{B}^2} - \nu\left(\frac{B}{A} + \frac{B}{\mathfrak{A}} - \frac{2}{A^2\mathfrak{B}} + \frac{1}{A^2B}\right),$$

quae per B divisa dat

$$0 = 3\left(\frac{1}{A^2\mathfrak{B}^3} - \frac{1}{\mathfrak{A}^2} - \frac{1}{A^2\mathfrak{B}^2B}\right) - \nu\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{2}{A^2\mathfrak{B}B} + \frac{1}{A^2B^2}\right),$$

atque hinc elisis litteris germanicis elicietur

$$0 = 3\left(\frac{1}{AB} - 1\right)\left(1 + \frac{2}{A} + \frac{1}{AB}\right) + \nu\left(\frac{1}{A^2B^2} + \frac{2}{A^2B} - \frac{2}{A} - 1\right),$$

quae ergo reducitur ad hos factores:

$$0 = (3+\nu)\left(\frac{1}{AB} - 1\right)\left(1 + \frac{2}{A} + \frac{1}{AB}\right);$$

ex qua, cum ob $AB = -\theta$ secundus factor evanescere nequeat, factor tertius praebet

$$B = -\frac{1}{A+2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = -\frac{1}{A+1};$$

sive etiam ambae litterae per θ sequenti modo definientur:

$$B = \frac{\theta - 1}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{\theta - 1}{\theta + 1},$$

deinde

$$A = -\frac{2\theta}{\theta - 1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = +\frac{2\theta}{\theta + 1}.$$

Ex his autem valoribus concludimus fore

$$\varDelta = \frac{(\theta+1)^3}{8\theta^3}\left(1 + \frac{1}{P}\right) - \frac{\nu(\theta^2-1)}{4\theta^2}\left(1 - \frac{1}{\theta P}\right) + \frac{h}{\theta^3 ma}\left(\frac{\lambda''}{8} - \frac{3\nu}{4}\right) + \frac{27h\lambda'''}{8\theta^3 ma},$$

ubi θ plerumque erit numerus valde magnus, ut etiam pro maioribus multiplicationibus distantia focalis s non fiat nimis exigua. Hinc igitur erit satis exacte

$$\varDelta = \frac{1}{4}(1 - \nu),$$

et cum propemodum sit $\nu = \frac{1}{5}$, erit $\varDelta = \frac{1}{5}$, ita ut tuto sumi possit $\mu\varDelta = \frac{1}{5}$; unde obtinebitur

$$x = \frac{a}{k}\sqrt[3]{\frac{5h}{ma}},$$

qui valor eum, quem in capite praecedente habuimus, superat in ratione $\sqrt[3]{5}:1$ seu proxime ut $17:10$. Quare etiam claritas in eadem ratione hic maior obtinetur.

COROLLARIUM 1

158. Per numerum igitur θ distantiae focales sequenti modo exprimuntur:

$$p = \mathfrak{A}a = \frac{2\theta}{\theta+1}\cdot a, \quad q = \frac{2\theta}{(\theta+1)P}\cdot a, \quad r = 2\theta\cdot\frac{h}{m} \quad \text{et} \quad s = \frac{2}{3}\theta\cdot\frac{h}{m},$$

ita ut sit proxime $q = p$ et exacte $s = \frac{1}{3}r$; tum vero lentium intervalla

$$\text{primum} = -\frac{2\theta}{\theta-1}\left(1 - \frac{1}{P}\right)a = \eta a$$

ideoque

$$P = \frac{2\theta}{2\theta + \eta(\theta-1)} \quad \text{adeoque} \quad P < 1,$$

$$\text{secundum} = \theta\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{PQ}\right)a = \frac{\theta a}{P} - \frac{\theta h}{m},$$

$$\text{tertium} = \frac{4}{3}\theta \cdot \frac{h}{m} = 2s.$$

COROLLARIUM 2

159. Quoniam intervallum binarum lentium sibi proximarum convenientissime ex earum distantia focali definitur, ponamus esse $\eta a = \zeta p$; hinc definietur

$$P = \frac{(\theta+1)}{(\theta+1)+\zeta(\theta-1)};$$

quare, cum sit θ numerus valde magnus, fiet $P = \frac{1}{1+\zeta}$; quare si capiatur $\zeta = \frac{1}{10}$, fiet $P = \frac{10}{11}$, qui valor ad praxin satis videtur accommodatus, cum hoc intervallum adhuc exiguam mutationem permittat. Quod ad campum visionis attinet, spatii in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z = \frac{2ah}{ma+h} \cdot \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{ma+h};$$

eadem scilicet est uti in problemate 2 capitis praecedentis atque etiam distantia oculi perinde hic determinatur.

SCHOLION 1

160. En ergo iam insignem perfectionem eorum microscopiorum, quae in capite praecedente evolvimus, cum claritas hic inventa iam notabiliter maior sit quam ibi idque in ratione $12:7$, et quia revera claritas secundum rationem duplicatam sentitur, hic triplo maior est censenda. Quocirca in his microscopiis multiplicatio multo longius proferri poterit quam in praecedentibus, antequam obscuritas fiat intolerabilis. Hinc si velimus, ut pro multiplicatione $m = 1000$ distantia focalis lentis ocularis non minor fiat quam $\frac{1}{4}$ dig., oportebit assumere $\theta = 47$, ita ut sumto $\theta = 50$ non sit metuendum, ut lente oculari nimis exigua opus habeamus. Hunc igitur casum in sequenti exemplo evolvisse operae pretium videtur.

EXEMPLUM

161. Statuamus igitur $\theta = 50$ sumtoque $k = 8$ dig. et, ut modo notavimus, $P = \frac{10}{11}$ pro data obiecti distantia $= a$ nanciscimur sequentes distantias focales:

$$p = \frac{100}{51}a, \quad q = \frac{110}{51}a, \quad r = \frac{800}{m} \text{ dig.} \quad \text{et} \quad s = \frac{800}{3m} \text{ dig.}$$

lentiumque intervalla

$$\text{primum} = \frac{10}{49}a, \quad \text{secundum} = 55a - \frac{400}{m} \text{ dig.} \quad \text{et} \quad \text{tertium} = \frac{1600}{3m} \text{ dig.}$$

et distantiam oculi

$$= \frac{400}{3m}\left(1 + \frac{8}{ma}\right) \text{ dig.}$$

Quoniam porro est $\mathfrak{A} = \frac{100}{51}$ et $\mathfrak{B} = \frac{49}{51}$, ob $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$ constructio lentium duarum priorum, si quidem ex vitro communi conficiantur, ita se habebit:

I. Pro lente prima

erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{p}{1,1896} = -0,84062\,p \\ \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p}{3,0077} = 0,33248\,p. \end{cases}$$

II. Pro secunda lente

erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{0,2470} = 4,0486\,q \\ \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{1,5711} = 0,6365\,q. \end{cases}$$

His notatis evolvamus valorem litterae Δ, qui erit $\Delta = 0,221$, qui per $\mu = 0,9381$ multiplicatus dabit $\mu\Delta = 0,2073$; qui ergo a supra assumto $\frac{1}{5}$ vix differt; hinc ergo colligimus pro apertura lentis obiectivae

$$x = \frac{a}{k}\sqrt[3]{\frac{40}{ma}} = \frac{0,17099\,a}{\sqrt[3]{ma}},$$

ex quo valore prodit mensura claritatis

$$= \frac{160}{ma} \cdot x = \frac{27,3584}{m\sqrt[3]{ma}};$$

denique pro campo visionis erit

$$z = \frac{4a}{ma+8} \text{ dig.},$$

ac si tandem in loco imaginis realis velimus diaphragma constituere, foraminis eius semidiameter debet esse

$$= ABCz = \frac{133a}{ma+8} \text{ dig.};$$

unde conficitur sequens

CONSTRUCTIO HUIUSMODI MICROSCOPIORUM EX QUATUOR LENTIBUS COMPOSITORUM PRO QUAVIS MULTIPLICATIONE

162. Singulae hae lentes ex vitro communi, cuius refractio est $n = 1,55$, parentur et posita obiecti distantia $= a$, quam iterum $= \frac{1}{2}$ dig. assumi licebit, erit:

I. Pro lente prima, cuius distantia focalis est $p = \frac{100}{51}a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -1,6482\,a \\ \text{posterioris} & = +0,6520\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter

$$x = \frac{0,17099}{\sqrt[3]{ma}} \cdot a$$

et distantia ad lentem secundam

$$= \frac{10}{49}a = 0,2040\,a.$$

II. Pro lente secunda, cuius distantia focalis $q = \frac{110}{51}a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 8,7323\,a \\ \text{posterioris} & = 1,3730\,a, \end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter aliquanto maior quam praecedentis, et distantia ad lentem tertiam $= 55\,a - \frac{400}{m}$ dig.

III. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est $r=\frac{800}{m}$ dig., erit

$$\text{radius faciei utriusque } =\frac{880}{m} \text{ dig.},$$

aperturae semidiameter $=\frac{200}{m}$ dig.
et distantia ad lentem quartam $=\frac{1600}{3m}$ dig. $=\frac{533}{m}$ dig.

IV. Pro lente quarta, cuius distantia focalis $=\frac{800}{3m}$ dig., erit

$$\text{radius utriusque faciei } =\frac{293}{m} \text{ dig.},$$

eius aperturae semidiameter $=\frac{67}{m}$ dig.
et distantia ad oculum $=\frac{133}{m}$ dig.

V. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit

$$z=\frac{4a}{ma+8} \text{ dig.}$$

et instrumenti longitudo $=55{,}2040\,a+\frac{267}{m}$ dig.
et mensura claritatis $=\frac{27{,}358}{m\sqrt[3]{ma}}$,

ubi observandum est ut supra § 148, IV duas priores lentes pro omni multiplicatione, duas vero posteriores pro qualibet obiecti distantia retineri posse, pro quibus eadem inserviet tabula, quam ibi adiecimus.

SCHOLION 2

163. Eaedem formulae, quas hic invenimus, etiam ad telescopia transferri possunt; ubi cum sit $a=\infty$ et $h=a$, ne lentes in infinitum crescant, debet esse $\theta=0$, ita tamen, ut θa fiat quantitas finita; scilicet cum sit $p=\frac{2\theta}{\theta+1}\cdot a$, erit $\theta a=\frac{p}{2}$ sicque reliquae distantiae focales erunt

$$q=\frac{p}{P},\quad r=\frac{p}{m}\quad \text{et}\quad s=\frac{p}{3m},$$

deinde lentium intervalla

$$\text{primum } =\left(1-\frac{1}{P}\right)p,\quad \text{secundum } =\frac{p}{2P}-\frac{p}{2m},\quad \text{tertium } =\frac{2p}{3m}.$$

Quod nunc ad litteram P attinet, formula supra data hic locum habebit

$$P = \frac{\theta + 1}{\theta + 1 + \xi(\theta - 1)},$$

quae hic dat

$$P = \frac{1}{1 - \xi};$$

quia autem hic de telescopiis agitur, sumi poterit $\zeta = \frac{1}{25}$, ita ut sit $P = \frac{25}{24}$; tum vero erit distantia oculi

$$O = \frac{s(m+1)}{2m} = \frac{1}{2} s\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

ita ut tota longitudo fiat

$$= p\left(1 - \frac{1}{2P} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{6m^2}\right)$$

ac porro semidiameter campi apparentis

$$\frac{z}{a} = \Phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{1718}{m+1} \text{ min.}$$

Nunc etiam consideretur aequatio postrema ex semidiametro confusionis deducta, in qua membrum vinculis inclusum per $8\theta^3$ multiplicetur, factor vero communis per idem dividatur, et habebitur

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu m x^3}{p^3}\left(1 + \frac{1}{P} - \frac{2\nu}{P} + \frac{1}{m}(\lambda'' - 6\nu) + \frac{27\lambda'''}{m}\right);$$

ubi, cum pro vitro communi sit $\nu = 0{,}2326$, si statuatur $P = \frac{25}{24}$ et termini per m divisi negligantur, ob $\mu = 1$ proxime fiet proxime

$$\frac{1}{k^3} = \frac{mx^3}{p^3} \cdot \frac{3}{2},$$

unde colligitur

$$p = kx \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot m,$$

unde, cum claritatis gradus y dari soleat, ut sit $x = my$, tum vero assumatur $ky = 1$, siquidem statuatur $y = \frac{1}{50}$ dig. et $k = 50$, uti supra est factum, habebitur

$$p = m\sqrt[3]{\frac{3}{2}m} \text{ dig.} \quad \text{sive} \quad p = \frac{8}{7} m \sqrt[3]{m}.$$

Cognito autem P erit $q = \frac{24}{25}p$. Sumsimus autem hic $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$, et cum sit $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = -1$, constructio harum lentium pro vitro communi, ubi $n = 1{,}55$, erit:

I. Pro lente prima

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{p}{\sigma} = 0{,}6145\,p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{p}{\varrho} = 5{,}2438\,p. \end{cases}$$

II. Pro lente secunda autem erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{\sigma + (\sigma - \varrho)} = +\dfrac{q}{3{,}0641} = +\,0{,}3264\,q \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{\varrho - (\sigma - \varrho)} = -\dfrac{q}{1{,}2460} = -\,0{,}8026\,q; \end{cases}$$

hinc ergo obtinetur sequens

CONSTRUCTIO TELESCOPII ASTRONOMICI EX QUATUOR LENTIBUS COMPOSITI PRO VITRO COMMUNI $n = 1{,}55$

164. Singula momenta pro constructione pro more recepto ita in ordinem redigantur, scilicet proposita multiplicatione m definiatur inde

$$p = \frac{8}{7} m \sqrt[3]{m}.$$

I. Pro prima lente, cuius distantia focalis $= p$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\,p \\ \text{posterioris} & = 5{,}2438\,p, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{m}{50}$ dig.
et distantia ad lentem sequentem erit $= \frac{1}{25}p = 0{,}04\,p$.

II. Pro lente secunda, cuius distantia focalis est $\frac{24}{25}p$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = +\,0{,}3134\,p \\ \text{posterioris} & = -\,0{,}7705\,p; \end{cases}$$

apertura non definitur, dummodo sit maior praecedente,
et distantia ad lentem tertiam $= \frac{12}{25} p - \frac{p}{2m}$.

III. Pro tertia lente, cuius distantia focalis est $r = \frac{p}{m}$, erit

$$\text{radius utriusque faciei } = 1{,}1 \cdot \frac{p}{m},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{p}{4m}$
et distantia ad lentem quartam $= \frac{2p}{3m}$.

IV. Pro quarta lente, cuius distantia focalis $= \frac{p}{3m}$, erit

$$\text{radius utriusque faciei } = 1{,}1 \cdot \frac{p}{3m},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{p}{12\,m}$
et distantia ad oculum $O = \frac{p}{6m}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$.

V. Tota ergo longitudo erit

$$= p\left(\frac{13}{25} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{6m^2}\right)$$

et semidiameter campi apparentis $\Phi = \frac{1718}{m+1}$ min.

VI. Si in loco imaginis realis, quae inter binas posteriores lentes medium interiacet, diaphragma sit constituendum, eius foraminis radius erit

$$= ABCz = \frac{p}{6(m+1)}.$$

PROBLEMA 2

165. *Iisdem quaternis lentibus retentis microscopium conficere, quod ad omnes multiplicationes producendas sit accommodatum.*

SOLUTIO

Sint harum lentium distantiae focales p, q, r et s, quae, uti ex problemate praecedente perspicitur, ita debent esse comparatae, ut sit primo $s = \frac{1}{3} r$, tum vero $q = \frac{11}{10} p$; deinde etiam recordandum est ambas posteriores

lentes utrinque esse debere aeque convexas, de figura vero priorum mox videbimus. Formulas ergo supra inventas considerando erit:

$$1.\ \theta = \frac{mr}{2h},$$

unde, cum sit $p = \frac{2\theta}{\theta+1}\cdot a$, hinc colligemus

$$a = \frac{\theta+1}{2\theta}\cdot p = \frac{(mr+2h)}{2mr}\cdot p,$$

quae ergo etiam a multiplicatione pendet, ita ut pro qualibet multiplicatione distantiam obiecti variari oporteat.

2. Lentium intervalla ita se habebunt:

$$\text{Primum} = \frac{1}{10}p,$$

$$\text{secundum} = \frac{11mr+18h}{40h}\cdot p - \frac{1}{2}r \quad \text{ob} \quad P = \frac{10(mr+2h)}{11mr+18h}$$

seu

$$\text{secundum intervallum} = \frac{11mrp}{40h} + \frac{9}{20}p - \frac{1}{2}r,$$

$$\text{tertium} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}r = \frac{2}{3}r$$

atque distantia oculi

$$O = s\left(\frac{1}{2} + \frac{hr}{(mr+2h)p}\right)$$

seu O proxime $=\frac{1}{2}s$; sicque pro varia multiplicatione tantum secundum intervallum fiet mutabile.

Porro vero erit spatii conspicui semidiameter

$$z = \frac{1}{2}\cdot\frac{(mr+2h)hp}{m(mr+2h)p+2mhr},$$

unde, si m sit numerus praemagnus, fiet $z = \frac{h}{2m}$.

Ut nunc figuram duarum priorum lentium definiamus, pro quibus supra sumsimus $\lambda = 1$ et $\lambda' = 1$, perpendere oportet litteras

$$\mathfrak{A} = \frac{2mr}{mr+2h} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = \frac{mr-2h}{mr+2h}.$$

Quia autem earum figura pro varia multiplicatione mutari non potest atque pro rei natura sufficit figuram tantum proxime definivisse, consideramus m ut numerum praemagnum sumamusque $\mathfrak{A}=2$ et $\mathfrak{B}=1$. Possumus etiam superioribus valoribus[1]) uti, ubi erat $\theta=50$, quippe qui valor certe multiplicationi magnae respondet; facile enim intelligitur tum eandem figuram tam maioribus quam minoribus multiplicationibus satis exacte convenire; quare si vitrum commune adhibeamus, habebitur pro lente prima

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-0{,}8406\,p\\ \text{posterioris} & =+0{,}3325\,p\end{cases}$$

et pro lente secunda

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =4{,}0486\,q\\ \text{posterioris} & =0{,}6365\,q.\end{cases}$$

Denique pro apertura primae lentis invenimus eius semidiametrum

$$x=\frac{0{,}171\,a}{\sqrt[3]{ma}}$$

indeque mensuram claritatis nacti sumus

$$=\frac{27{,}358}{m\sqrt[3]{ma}}$$

existente $a=\frac{mr+2h}{2mr}\cdot p=\frac{1}{2}p$ proxime.

EXEMPLUM

166. 1. Sumamus pro harum lentium distantiis focalibus

$$p=1 \text{ dig.},\quad q=\frac{11}{10}\text{ dig.},\quad r=1\text{ dig.}\quad \text{et}\quad s=\frac{1}{3}\text{ dig.},$$

quippe qui valores ad praxin maxime idonei videntur; ac si hae lentes ex vitro communi parentur, earum figura ita determinetur, ut sit

2. I. Pro lente prima

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-0{,}84\text{ dig.}\\ \text{posterioris} & =+0{,}33\text{ dig.}\end{cases}$$

1) $\mathfrak{A}=\frac{100}{51}$, $\mathfrak{B}=\frac{49}{51}$. Vide § 161. E. Ch.

II. Pro secunda lente

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 4{,}45 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} & = 0{,}70 \text{ dig.} \end{cases}$$

III. Pro tertia lente

$$\text{radius faciei utriusque} = 1{,}1 \text{ dig.}$$

IV. Pro quarta lente

$$\text{radius faciei utriusque} = \frac{11}{30} \text{ dig.}$$

3. Quibus lentibus paratis prima et secunda ad intervallum $= \frac{1}{10}$ dig. firmentur, tertia vero et quarta ad intervallum $= \frac{2}{3}$ dig., ita tamen, ut pro indole oculi quarta lens tantillum mutari possit; ambo autem paria eiusmodi tubis inserantur, qui pro lubitu ad maius minusve spatium diduci queant, quemadmodum multiplicatio postulat, siquidem intervallum inter secundam et tertiam lentem esse debet $\left(\frac{11m}{320} - \frac{1}{20}\right)$ dig.

4. Simili modo etiam distantia obiecti aliquantum erit variabilis et pro qualibet multiplicatione esse debet

$$a = \frac{m+16}{2m} \text{ dig.} = \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{m}\right) \text{ dig.}$$

Deinde vero locus oculi ut constans spectari potest, ita ut sit eius distantia

$$O = \frac{1}{6} \text{ dig.}$$

5. Tertiae et quartae lenti tanta datur apertura, quantae sunt capaces.

6. Primae autem lentis apertura maxime a multiplicatione pendet, cum sit eius semidiameter

$$x = \frac{0{,}0855}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}m}},$$

unde mensura claritatis prodit

$$\frac{27{,}36}{m\sqrt[3]{\frac{1}{2}m}}.$$

7. Circa hoc microscopium haud abs re fore arbitror, si pro aliquot praecipuis multiplicationibus valores momentorum variabilium, quae sunt 1. distantia obiecti $= a$, 2. intervallum lentium secundae et tertiae, quod indicemus littera L, 3. semidiameter aperturae primae lentis x et 4. mensura claritatis $= 20y$, adiunxerimus; quem in finem sequens tabella[1]) est adiecta:

m	a	L	x	*Claritas*
50	0,660	1,669	0,0292	0,1871
100	0,580	3,387	0,0232	0,0743
200	0,540	6,825	0,0184	0,0295
300	0,527	10,262	0,0160	0,0172
400	0,520	13,700	0,0146	0,0117
500	0,516	17,137	0,0136	0,0087
600	0,513	20,575	0,0128	0,0068
700	0,511	24,012	0,0121	0,0055
800	0,510	27,450	0,0116	0,0047
900	0,509	30,887	0,0111	0,0040
1000	0,508	34,325	0,0108	0,0034

PROBLEMA 3

167. *Loco lentis obiectivae eiusmodi tres lentes convexas proxime sibi iunctas substituere, ut binis reliquis lentibus secundum praecepta in capite superiore data constitutis maior claritatis gradus obtineatur.*

SOLUTIO

Cum hic quinque lentes sint considerandae et imago realis in quartum seu ultimum intervallum incidat, litterae P, Q, R erunt positivae, sequens vero S ponatur $= -k$, ita ut sit $PQRk = \frac{ma}{h}$. Hinc distantiae focales

1) Nonnulli valores editionis principis, praecipue pro x et pro claritate, leves modificationes passi sunt. E. Ch.

singularum lentium ita exprimentur:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}a}{P}, \quad r = \frac{AB\mathfrak{C}a}{PQ},$$

$$s = -\frac{ABC\mathfrak{D}a}{PQR} \quad \text{et} \quad t = -ABCD \cdot \frac{h}{m}.$$

Intervalla vero lentium ita se habebunt:

$$\text{I et II } = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{II et III } = -\frac{AB}{P} \cdot a\left(1 - \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III et IV } = \frac{ABC}{PQ} \cdot a\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad \text{IV et V } = -\frac{ABCDa}{PQR}\left(1 + \frac{1}{k}\right);$$

quorum cum duo priora sint valde parva, litterae P et Q quam minime ab unitate recedere debent; quamobrem in expressione campi litterae $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ pro nihilo erunt habendae, posteriores vero $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ unitati aequales sumantur, siquidem binae postremae lentes utrinque fiant aeque convexae. Hinc ergo spatii in obiecto conspicui fiet semidiameter

$$z = \frac{2ah}{ma + h} \cdot \xi;$$

at vero littera

$$M = \frac{2h}{ma + h},$$

ex qua distantia oculi fit

$$O = \frac{t}{Ma} \cdot \frac{h}{m} = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{h}{ma}\right) \quad \text{seu proxime } = \frac{1}{2}t.$$

Aequationum porro fundamentalium prima et secunda omitti possunt, quia ob litteras P et Q proxime $= 1$ litterae $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ sponte fiunt minimae; tertia vero dabit

$$-\mathfrak{D}\mathfrak{s} = (PQR - 1)M,$$

$$-\mathfrak{D} = \frac{2(ma - hk)}{k(ma + h)},$$

unde pro maioribus multiplicationibus fit $\mathfrak{D} = -\frac{2}{k}$; ex aequatione autem pro margine colorato, quae hoc casu erit

$$\frac{1}{PQR} - \frac{1}{PQRk} = 0,$$

colligimus ut ante $k = 1$, ita ut sit $\mathfrak{D} = -2$ hincque $D = -\frac{2}{3}$; quibus

inventis distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = \frac{AB\mathfrak{C}}{PQ}\cdot a,$$

$$s = 2ABC\cdot\frac{h}{m} \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{3}ABC\cdot\frac{h}{m} = \frac{1}{3}s;$$

unde sequitur

$$\mathfrak{A} > 0, \quad A\mathfrak{B} < 0, \quad AB\mathfrak{C} > 0 \quad \text{et} \quad ABC > 0$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -\frac{AB}{P}\cdot a\left(1 - \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{tertium} = \frac{ABC}{PQ}\cdot a\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad \text{quartum} = \frac{4}{3}ABC\cdot\frac{h}{m} = 2t.$$

Denique pro apertura primae lentis seu littera x definienda habetur ista aequatio:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \dfrac{\nu}{A\mathfrak{A}} - \dfrac{1}{A^3P}\left(\dfrac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \dfrac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \dfrac{1}{A^3B^3PQ}\left(\dfrac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \dfrac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)\\ \qquad + \dfrac{h}{8A^3B^3C^3ma}(\lambda''' - 6\nu) + \dfrac{27h\lambda''''}{8A^3B^3C^3ma}\end{array}\right\},$$

in qua expressione numeri λ''' et λ'''' inde dantur, quod hae lentes debent esse utrinque aeque convexae; priores vero λ, λ' et λ'' habent coefficientes positivos, quia [$\mathfrak{A} > 0$,] $A\mathfrak{B} < 0$ [,$AB\mathfrak{C} > 0$], cum ex hypothesi omnes lentes sint convexae. Quare cum totum negotium nunc eo redeat, ut huic expressioni valor minimus concilietur, primo his litteris λ, λ', λ'' tribuatur valor minimus, qui est unitas; deinde vero litterae A, B, C ita definiri debent, ut haec expressio minimum adipiscatur valorem; quem in finem ante omnia notari convenit, ne binae ultimae lentes pro maioribus multiplicationibus nimis fiant exiguae, quantitatem ABC semper certum limitem superare debere; quare, cum ea positiva esse debeat, statuamus

$$ABC = \theta,$$

ita ut θ tanquam numerus datus spectari possit; ex quo bina ultima membra per se determinantur; restant igitur tantum tria membra priora, quibus, quomodo minimus valor induci queat, est investigandum, ubi quidem pro litteris P et Q unitatem scribere licebit. Cum autem iam supra huiusmodi investigationes saepius expediverimus, inde concludere possumus a scopo nos

minime esse aberraturos, si has tres formulas $\mathfrak{A}$, $-A\mathfrak{B}$ et $AB\mathfrak{C}$ inter se reddamus aequales, ita ut distantiae focales p, q, r eatenus tantum a ratione aequalitatis recedant, quatenus litterae P et Q ab unitate discrepant. Aequalitas autem primae et secundae harum expressionum dat

$$\mathfrak{B} = -\frac{\mathfrak{A}}{A} = \mathfrak{A} - 1 \quad \text{seu} \quad \mathfrak{B} = -\frac{1}{A+1};$$

unde fit

$$B = \frac{\mathfrak{A}-1}{2-\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2+A}.$$

Aequalitas autem secundae et tertiae dabit

$$\mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{B}}{B} = \mathfrak{B} - 1 = -\frac{1}{B+1};$$

quamobrem habebimus

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - 2 = -\frac{A+2}{A+1} \quad \text{hincque} \quad C = -\frac{A+2}{2A+3};$$

at vero debet esse $ABC = \theta$, unde omnes hae litterae per θ sequenti modo exprimentur:

$$A = \frac{3\theta}{1-2\theta}, \quad B = -\frac{(1-2\theta)}{2-\theta} \quad \text{et} \quad C = -\frac{(2-\theta)}{3}$$

atque hinc porro

$$\mathfrak{A} = \frac{3\theta}{1+\theta}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{(1-2\theta)}{1+\theta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = -\frac{(2-\theta)}{1+\theta};$$

quibus valoribus adhibitis aequatio nostra ultima induet hanc formam:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu m x^3}{a^2 h} \left\{ \begin{aligned} &\frac{(1+\theta)^3}{27\theta^3} + \frac{\nu(1-2\theta)(1+\theta)}{9\theta^2} + \frac{(1+\theta)^3}{27\theta^3 P}\left(1 - \frac{\nu(1-2\theta)(2-\theta)}{(1+\theta)^2}\right) \\ &+ \frac{(1+\theta)^3}{27\theta^3 PQ}\left(1 - \frac{3\nu(2-\theta)}{(1+\theta)^2}\right) + \frac{h}{8\theta^3 ma}(\lambda''' - 6\nu) + \frac{27h\lambda''''}{8\theta^3 ma} \end{aligned} \right\}.$$

Statuamus nunc brevitatis gratia expressionem uncinulis inclusam

$$\varDelta = \frac{(1+\theta)^3}{27\theta^3}\left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ}\right) - \frac{\nu(1+\theta)}{27\theta^3}\left(3\theta(2\theta-1) + \frac{(2\theta-1)(\theta-2)}{P} + \frac{3(2-\theta)}{PQ}\right)$$
$$+ \frac{h}{8\theta^3 ma}(\lambda''' - 6\nu) + \frac{27h\lambda''''}{8\theta^3 ma};$$

quae formula, si θ fuerit numerus praemagnus et litterae P et Q unitati aequales reputentur, praebet

$$\varDelta = \frac{3-8\nu}{27};$$

qui valor utique multo minor est, quam si lens obiectiva esset vel simplex vel etiam duplicata; unde etiam x maiorem valorem sortietur, qui erit

$$x = \frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{a^2 h}{\mu m \varDelta}}$$

et dabit semidiametrum aperturae lentis obiectivae, dummodo ea non fuerit maior, quam figura lentis permittit. Invento autem x erit $y = \frac{h}{m\alpha}\cdot x$ et mensura claritatis $= \frac{20h}{m\alpha}\cdot x$.

COROLLARIUM 1

168. Hae formulae aeque patent ad telescopia atque ad microscopia hoc tantum discrimine intercedente, quod pro telescopiis, ubi $a = \infty$ et $h = a$, sit θ infinite parvum, pro microscopiis autem θ fiat numerus praemagnus.

COROLLARIUM 2

169. Pro microscopiis igitur erit proxime

$$\mathfrak{A} = 3, \quad A = -\frac{3}{2}, \quad \mathfrak{B} = 2, \quad B = -2, \quad \mathfrak{C} = 1 \quad \text{et} \quad C = \infty$$

seu numerus praemagnus; tum vero

$$\varDelta = \frac{1}{27}\left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ}\right) - \frac{\nu}{27}\left(6 + \frac{2}{P}\right).$$

COROLLARIUM 3

170. At si numeri huius praemagni θ rationem quoque habere velimus, habebimus adhuc propius

$$\mathfrak{A} = 3 - \frac{3}{\theta}, \quad A = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4\theta},$$

$$\mathfrak{B} = 2 - \frac{3}{\theta}, \quad B = -2 - \frac{3}{\theta},$$

$$\mathfrak{C} = 1 - \frac{3}{\theta}, \quad C = \frac{\theta}{3} - 1;$$

tum vero etiam adcuratius erit

$$\varDelta = \frac{1}{27}\left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ}\right) + \frac{1}{9\theta}\left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ}\right)$$
$$- \frac{\nu}{27}\left(6 + \frac{2}{P}\right) - \frac{\nu}{9\theta}\left(1 - \frac{1}{P} - \frac{1}{PQ}\right).$$

COROLLARIUM 4

171. Quod nunc ad intervalla lentium priorum attinet, si sumamus utrumque eorum esse debere $= \zeta p = \zeta \mathfrak{A} a$, valoribus prioribus proxime veris adhibendis reperiemus

$$P = \frac{1}{1 + 2\zeta} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{1 + P\zeta} = \frac{1 + 2\zeta}{1 + 3\zeta},$$

unde, si statuamus $\zeta = \frac{1}{10}$, erit

$$P = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad Q = \frac{12}{13} \quad \text{hincque} \quad PQ = \frac{10}{13}$$

et

$$\varDelta = \frac{7}{54} - \frac{14\nu}{45} + \frac{7}{18\theta} + \frac{\nu}{6\theta}.$$

COROLLARIUM 5

172. Cum autem valor ν a ratione vitri pendeat, notetur pro vitro coronario, quo est $n = 1{,}53$, esse propemodum $\nu = \frac{1}{5}$ et pro vitro crystallino, quo $n = 1{,}58$, esse $\nu = \frac{1}{4}$; hinc ergo colligitur pro vitro coronario fore

$$\varDelta = \frac{91}{1350} + \frac{19}{45\theta}.$$

Pro vitro autem crystallino erit

$$\varDelta = \frac{7}{135} + \frac{31}{72\theta};$$

ex quo perspicitur plurimum praestare, si tres priores lentes ex vitro crystallino parentur.

SCHOLION 1

173. Quod nunc ad lentium constructionem attinet, quia pro tribus prioribus numeri λ, λ' et λ'' unitati aequales sunt positi, ut scilicet singulae

minimam confusionem producant, sufficiet litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ valores proximos tribuisse, ita ut tuto capere liceat $\mathfrak{A} = 3$, $\mathfrak{B} = 2$ et $\mathfrak{C} = 1$; unde secundum praecepta generalia singulae hae lentes pro distantiis focalibus datis p, q, r construi poterunt, ubi notasse iuvabit esse

$$q = \frac{p}{P} = \frac{6}{5}p \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{PQ} = \frac{13}{10}p;$$

licebit enim nunc distantiam focalem p tanquam cognitam spectare ex eaque distantiam obiecti definire, quae erit

$$a = \frac{1+\theta}{3\theta}\cdot p = \frac{1}{3}p\left(1 + \frac{1}{\theta}\right);$$

tum vero littera θ commodissime definitur ex lente quarta, cuius distantia focalis s, si itidem ut cognita spectetur, erit $\theta = \frac{ms}{2h}$, ita ut nunc habeatur

$$a = \frac{1}{3}p\left(1 + \frac{2h}{ms}\right).$$

Tum vero erit $t = \frac{1}{3}s$ et intervallum ultimum $= \frac{2}{3}s$, dum duo priora intervalla sunt per hypothesin $= \frac{1}{10}p$. Tertium vero intervallum maxime a multiplicatione pendebit; erit enim id

$$= \theta a\left(\frac{13}{10} - \frac{h}{ma}\right) = \frac{13msa}{20h} - \frac{1}{2}s = \frac{13mps}{60h} + \frac{13}{30}p - \frac{1}{2}s,$$

ex quo patet, quo maior multiplicatio desideretur, eo magis instrumentum elongari debere; tum vero etiam apertura primae lentis inprimis a multiplicatione pendet; ex formula enim supra inventa, cum sit proxime

$$\mu = 1, \quad a = \frac{1}{3}p \quad \text{et} \quad \varDelta = \frac{7}{135} \text{ pro vitro crystallino,}$$

si, ut supra fecimus, sumamus $k = 20$, $[h = 8 \text{ dig.}]$, obtinebimus

$$x = \frac{1}{10}\sqrt[3]{\frac{15p^2}{7m}}\ \text{dig.} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{\frac{135a^2}{7m}}\ \text{dig.};$$

quare, si ut supra distantiam obiecti circiter dimidii digiti statuamus, ut sit $p = \frac{3}{2}$ dig., fiet

$$x = \frac{1}{10}\sqrt[3]{\frac{135}{28m}}\ \text{dig.} = \frac{0{,}1689}{\sqrt[3]{m}}\ \text{dig.}$$

Porro autem pro claritate erit

$$y = \frac{8}{10m}\sqrt[3]{\frac{135}{7ma}}$$

et mensura claritatis

$$= \frac{16}{m}\sqrt[3]{\frac{135}{7ma}}$$

et casu $a = \frac{1}{2}$ dig. erit ea

$$= \frac{54{,}060}{m\sqrt[3]{m}}.$$

Ex his igitur statim poterimus eiusmodi microscopium conficere, quod retentis iisdem lentibus ad omnes multiplicationes producendas sit accommodatum; utamur autem ut hactenus vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, ita ut valorem ipsius x aliquantillum imminui conveniat, uti cuique lubuerit; ac tum pro lente prima, cuius distantia focalis $= p$ et $\mathfrak{A} = 3$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - 3(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{p}{2{,}6827} = -0{,}3728p\\ \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + 3(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{p}{4{,}5008} = +0{,}2222p,\end{cases}$$

quae ergo aperturam admittit, cuius semidiameter erit circiter

$$x = 0{,}055p = \frac{1}{18}p.$$

Pro secunda autem lente, cuius distantia focalis $q = \frac{6}{5}p$, erit

$$\text{radius faciei (ob } \mathfrak{B} = 2)\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - 2(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{q}{1{,}2460} = -0{,}8026q\\ \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + 2(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{q}{3{,}0641} = +0{,}3264q.\end{cases}$$

Pro lente autem tertia, cuius distantia focalis est $r = \frac{13}{10}p$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{r}{\varrho} = 5{,}2438r\\ \text{posterioris} = \dfrac{r}{\sigma} = 0{,}6145r.\end{cases}$$

Videtur autem hic commode sumi posse $p = 1\frac{1}{2}$ dig., ut fiat circiter $a = \frac{1}{2}$ dig., tum vero $s = 1$ dig., ut fiat $t = \frac{1}{3}$ dig.; unde orietur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUINQUE LENTIBUS COMPOSITI AD OMNES MULTIPLICATIONES IDONEI

174. Si omnes lentes ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, parentur, habebitur:

I. Pro lente prima, cuius distantia focalis est $p = 1\frac{1}{2}$ dig.,

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -0{,}5592 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = +0{,}3333 \text{ dig.};\end{cases}$$

cuius semidiameter aperturae posset esse $x = 0{,}0833$ dig., verum ob multiplicationem datam $= m$ sumi conveniet

$$x = \frac{0{,}15}{\sqrt[3]{m}} \text{ dig.}$$

et distantia ad lentem secundam $= 0{,}15$ dig.

II. Pro lente secunda, cuius distantia focalis est $q = \frac{18}{10}$ dig., capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -1{,}4447 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = 0{,}5875 \text{ dig.};\end{cases}$$

apertura modo maior sit praecedente,
distantia ad lentem tertiam $= 0{,}15$ dig.

III. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est $r = \frac{39}{20}$ dig., capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 10{,}2255 \text{ dig.}\\ \text{posterioris} & = 1{,}1983 \text{ dig.};\end{cases}$$

de apertura idem tenendum quod ante
et distantia ad lentem quartam erit

$$= \left(\frac{13m}{320} - \frac{1}{2}\right) \text{dig.}^{1)}$$

1) Editio princeps: $= \left(\frac{13m}{320} + \frac{3}{20}\right)$ dig. Correxit E. Ch.

IV. Pro quarta lente, cuius distantia focalis est $s = 1$ dig., capiatur

$$\text{radius utriusque faciei } = 1{,}1 \text{ dig.},$$

aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}$ dig.

et distantia ad lentem quintam $= \frac{2}{3}$ dig. $= 0{,}67$ dig.

V. Pro quinta lente, cuius distantia focalis $= \frac{1}{3}$ dig., capiatur

$$\text{radius utriusque faciei } = 0{,}37 \text{ dig.},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{12}$ dig.

et distantia oculi $= \frac{1}{6}$ dig. $= 0{,}17$ dig.

VI. Semidiameter spatii in obiecto conspicui erit $z = \frac{1}{2}\frac{ah}{ma+h}$ existente distantia obiecti

$$a = \frac{1}{3}p\left(1 + \frac{2h}{ms}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{16}{m}\right) \text{ dig.}^{1})$$

VII. Cum sit semidiameter aperturae lentis obiectivae

$$x = \frac{0{,}15}{\sqrt[3]{m}} \text{ dig.},$$

fiet hinc

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{2{,}40}{m\sqrt[3]{m}}$$

et mensura claritatis

$$= \frac{48}{m\sqrt[3]{m}},$$

ita ut, si fuerit $m = 512$, mensura claritatis futura sit $= \frac{3}{256} = \frac{1}{85}$, quae adhuc 34 vicibus maior est quam claritas lunae plenae.

VIII. Subiungamus adhuc tabellam, in qua pro praecipuis multiplicationibus m exhibeantur

1. distantia obiecti a lente obiectiva $a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{16}{m}\right)$ dig.[2]),
2. intervallum lentium tertiae et quartae, quod sit $l = \left(\frac{13m}{320} - \frac{1}{2}\right)$ dig.[2]),

1) Editio princeps: $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{8}{m}\right)$. Correxit E. Ch.

2) Vide notas ad articulos III et VI pertinentes. Ob inaccuratas formulas pro a et l omnes valores in tabella editionis principis corrigendi erant. E. Ch.

3. semidiameter aperturae lentis obiectivae $x = \frac{0{,}15}{\sqrt[3]{m}}$ et

4. claritas $= \frac{48}{m\sqrt[3]{m}}$.

m	a[1])	l[1])	x	*Claritas*
50	0,660	1,531	0,041	0,261
100	0,580	3,563	0,032	0,103
200	0,540	7,625	0,026	0,041
300	0,527	11,688	0,022	0,024
400	0,520	15,750	0,020	0,016
500	0,516	19,813	0,019	0,012
600	0,513	23,875	0,018	0,009
700	0,511	27,938	0,017	0,008
800	0,510	32,000	0,016	0,006
900	0,509	36,063	0,016	0,006
1000	0,508	40,125	0,015	0,005

SCHOLION 2

175. Cum formulae nostrae inventae aeque ad telescopia ac microscopia pateant, dum illo casu ponitur $\theta = 0$, hoc vero $\theta =$ numero praemagno, operae pretium videtur adcuratius investigare, cuiusmodi instrumenta sint proditura et ad quemnam usum futura sint accommodata, si litterae θ valor mediocris veluti 1 vel 2 tribuatur; hunc in finem sumamus $\theta = 2$, ut sit

$$s = \frac{4h}{m} \quad \text{et} \quad t = \frac{4h}{3m} \quad \text{hincque} \quad m = \frac{4h}{s};$$

tum vero sequentes habebuntur valores:

$$\mathfrak{A} = 2, \quad \mathfrak{B} = 1, \quad \mathfrak{C} = 0$$

ideoque

$$A = -2, \quad B = \infty \quad \text{et} \quad C = 0,$$

1) Vide notam 2 p. 368 E. Ch.

ita tamen, ut sit

$$BC = -1 \quad \text{et} \quad B\mathfrak{C} = -1;$$

ex quibus valoribus distantiae focales lentium priorum erunt

$$p = 2a, \quad q = \frac{2a}{P}, \quad r = \frac{2a}{PQ}$$

et intervalla

$$\text{primum} = -2a\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = \infty\left(1 - \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{tertium} = \frac{2a}{PQ}\left(1 - \frac{1}{R}\right) = 2a\left(\frac{1}{PQ} - \frac{h}{ma}\right) \quad \text{et} \quad \text{quartum} = \frac{8h}{3m}$$

manente distantia oculi $O = \frac{1}{2}t$. Ut iam fiat primum intervallum $= \frac{1}{10}p$, sumi debebit $P = \frac{10}{11}$, at Q semper debet esse $= 1$, quantumvis secundum intervallum accipiatur; conveniet autem primo aequale sumi, ita ut sit $q = \frac{11}{5}a$ et $r = \frac{11}{5}a$ tertiumque intervallum $= 2a\left(\frac{11}{10} - \frac{h}{ma}\right)$; deinde ut ante erit

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{ma + h}.$$

Verum nunc obtinebimus

$$\varDelta = \frac{2}{5} - \frac{\nu}{4} + \frac{h}{64ma}(\lambda''' - 6\nu) + \frac{27h\lambda''''}{64ma},$$

qui valor pro casu $\nu = \frac{1}{5}$ foret $\varDelta = \frac{7}{20}$, at pro casu $\nu = \frac{1}{4}$ foret $\varDelta = \frac{27}{80}$ seu utroque casu proxime $\varDelta = \frac{1}{3}$; hinc ergo colligimus:

$$x = \frac{1}{k}\sqrt[3]{\frac{3a^2h}{\mu m}}$$

seu

$$x = \frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{3a^2h}{m}}$$

indeque porro

$$y = \frac{h}{20m}\sqrt[3]{\frac{3h}{ma}}$$

et mensura claritatis

$$= \frac{h}{m}\sqrt[3]{\frac{3h}{ma}}.$$

His notatis, quae ad instrumenti constructionem pertinent, sequentia observentur:

1. Si caperetur $s=1$ dig., foret $m=4h$ dig. seu $\frac{h}{m}=\frac{1}{4}$ dig., quem valorem ita interpretari oportet, quod instrumentum nobis obiecta m vicibus maiora repraesentet, quam si ea in distantia h spectaremus; unde patet obiecta nobis in eadem magnitudine repraesentari, quam si ea nudis oculis spectaremus in distantia $=\frac{h}{m}$, ex quo perspicuum est instrumentum, de quo hic agitur, nobis obiecta eadem magnitudine esse repraesentaturum, quam si ea cerneremus in distantia $=\frac{1}{4}$ dig. sublata scilicet summa confusione, qua obiecta tam vicina nos adficerent.

2. Si distantiam focalem s maiorem vel minorem uno digito assumeremus, multiplicatio etiam fieret vel minor vel maior; praxis autem minorem valorem pro s vix admittit, propterea quod $t=\frac{1}{3}s$, minorem vero multiplicationem nemo magnopere desiderabit; unde iste valor $s=1$ dig. nostro scopo maxime accommodatus videtur.

3. Huiusmodi ergo instrumentum tum usum praestare poterit, quando obiecta ita spectare optamus, quasi ea in distantia $=\frac{1}{4}$ dig. intueremur, vel, quod eodem redit, 32 vicibus maiora, quam si ea in distantia octo digitorum aspiceremus, sicque hoc instrumentum idem praestabit, quod microscopium tricies et bis multiplicans.

4. Quia autem in microscopiis distantia obiecti admodum parva sumi solet, hoc instrumentum tum potissimum usurpari poterit, quando ad obiecta non pro lubitu appropinquare licet; quamobrem, si distantia obiecti a aliquanto maior fuerit, quam in microscopiis admitti solet, videamus, quomodo nostrum instrumentum tum futurum sit comparatum; statuamus igitur praeterea $a=1$ ped. $=12$ dig. manente $s=1$ dig. et distantiae focales lentium hoc modo determinabuntur:

$$p=24 \text{ dig.},\quad q=26{,}4 \text{ dig.},\quad r=26{,}4 \text{ dig.},\quad s=1 \text{ dig.}\quad \text{et}\quad t=\frac{1}{3} \text{ dig.}$$

Deinde vero intervalla

$$\begin{aligned} &\text{primum} = 2{,}4 \text{ dig.}, && \text{secundum} = 2{,}4 \text{ dig.},\\ &\text{tertium} = 25{,}9 \text{ dig.}, && \text{quartum} = 0{,}67 \text{ dig.} \end{aligned}$$

Aperturae vero primae lentis semidiameter nunc erit

$$x=\frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{3\cdot 144}{4}} \text{ dig.} = \frac{1}{20}\sqrt[3]{108} \text{ dig.} = 0{,}238 \text{ dig.}$$

hincque mensura claritatis $=0{,}099$ sicque ipsa claritas 100 vicibus minor erit, quam si idem obiectum nudis oculis aspicimus, quae sola circumstantia huiusmodi instrumenta ab usu practico excluderet, nisi longitudo eorum iam satis esset incommoda; quin etiam, si propius ad obiecta accedere liceat, nihil impedit, quominus microscopio ordinario utamur, praecipue si tam exigua multiplicatione contenti esse velimus; idem adeo praestaret microscopium simplex distantiae focalis $=\frac{1}{4}$ dig.

SCHOLION 3

176. Easdem igitur nostras formulas nunc etiam ad telescopia adplicemus, ubi est $a=\infty$ et sumitur $h=a$; tum igitur capi oportet $\theta=0$, ita tamen, ut θa fiat quantitas finita; cum igitur sit

$$p=\frac{3\theta}{1+\theta}\cdot a=3\theta a,$$

ita ut sit $\theta a=\frac{1}{3}p$, unde erit porro

$$q=\frac{p}{P} \quad \text{et} \quad r=\frac{p}{PQ}, \quad \text{at} \quad s=\frac{2p}{3m} \quad \text{et} \quad t=\frac{2p}{9m};$$

tum vero intervalla lentium

$$\text{primum } =p\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum } =\frac{p}{2P}\left(1-\frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{tertium } =\frac{p}{3}\left(\frac{1}{PQ}-\frac{1}{m}\right), \quad \text{quartum } =\frac{4p}{9m}$$

pro loco oculi manente

$$O=\frac{1}{2}t\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Faciamus nunc duo priora intervalla inter se aequalia, et quia lentes obiectivae iam sunt multo maiores, statuamus utrumque $=\frac{1}{25}p$ et reperietur

$$P=\frac{25}{24} \quad \text{et} \quad Q=\frac{12}{11} \quad \text{hincque} \quad PQ=\frac{25}{22};$$

unde superiores valores erunt

$$q=\frac{24}{25}p \quad \text{et} \quad r=\frac{22}{25}p$$

tertiumque intervallum

$$= \frac{1}{3} p \left(\frac{22}{25} - \frac{1}{m}\right) = \frac{22}{75} p - \frac{p}{3m}.$$

Pro campo porro apparente fiet eius semidiameter

$$\Phi = \frac{z}{a} = \frac{2}{m+1} \cdot \xi = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{m+1} = \frac{1718}{m+1} \text{ min.}$$

Denique aequatio pro distinctione visionis erit

$$\frac{\mu m x^3}{p^3} \left(\frac{71}{25} - \frac{36}{5} \nu + \frac{27}{8m} (\lambda''' - 6\nu) + \frac{729 \lambda''''}{8m}\right) = \frac{1}{k^3}.$$

Hic iam proponi solet gradus claritatis, quo obiecta repraesententur, qui sit $y = \frac{1}{50}$ dig., sumique debet $x = my = \frac{m}{50}$ dig. et capiatur etiam ut in libro superiore $k = 50$; quibus positis reperietur

$$p = m \sqrt[3]{\mu m} \left(\frac{71}{25} - \frac{36}{5} \nu + \frac{27}{8m} (\lambda''' - 6\nu) + \frac{729 \lambda''''}{8m}\right),$$

ubi, si vitro communi utamur, erit $\mu = 0{,}9381$ et $\nu = 0{,}2326$; at vero iam sumsimus $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$, et quia binae postremae lentes debent esse utrinque aeque convexae, esse oportet

$$\lambda'''' = 1{,}6298 \quad \text{et} \quad \lambda''' = 1 + 0{,}6298 (1 - 2\mathfrak{D})^2 = 16{,}745,$$

ex quibus valoribus colligimus

$$p = m \sqrt[3]{(1{,}0931 m + 188)} \text{ dig.}$$

PROBLEMA 4

177. *Loco lentis obiectivae eiusmodi quatuor lentes convexas proxime sibi iunctas substituere, ut binis reliquis lentibus secundum praecepta superiora constitutis maior claritatis gradus obtineatur.*

SOLUTIO

Cum hic sex habeantur lentes ideoque quinque intervalla, totidem quoque litterae P, Q, R, S, T in calculum sunt introducendae; quarum tres priores P, Q et R unitati proxime sunt aequales, quia quatuor priores lentes sibi

proxime iunctae ponuntur; ultima vero T debet esse negativa sive $T = -k$, quia imago realis in ultimum intervallum incidit, sicque habebitur

$$PQRSk = \frac{ma}{h};$$

deinde distantiae focales lentium nunc ita exprimentur:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}a}{P}, \quad r = \frac{AB\mathfrak{C}a}{PQ},$$

$$s = -\frac{ABC\mathfrak{D}a}{PQR}, \quad t = \frac{ABCD\mathfrak{E}a}{PQRS} \quad \text{et} \quad u = ABCDE \cdot \frac{h}{m}.$$

Intervalla vero lentium ita se habent:

$$\begin{aligned}
&\text{Primum} &&= Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right),\\
&\text{secundum} &&= -ABa\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{PQ}\right),\\
&\text{tertium} &&= ABCa\left(\frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQR}\right),\\
&\text{quartum} &&= -ABCDa\left(\frac{1}{PQR} - \frac{1}{PQRS}\right),\\
&\text{quintum} &&= ABCDEa\left(\frac{1}{PQRS} + \frac{h}{ma}\right).
\end{aligned}$$

Distantia vero oculi erit ut ante

$$O = \frac{1}{2}u\left(1 + \frac{h}{ma}\right)$$

perinde ac spatii conspicui semidiameter

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{ma + h}.$$

Ob hunc ipsum vero campum, ut tantus evadat, oportet esse $\mathfrak{E} = -2$ hincque $E = -\frac{2}{3}$. Postea autem ut margo coloratus evanescat, debet esse $k = 1$, ita ut sit $PQRS = \frac{ma}{h}$. Denique ut confusio ab apertura lentium oriunda prodeat minima, ex superioribus colligere licet hoc fieri, si istae expressiones quatuor

$$\mathfrak{A}, \quad -A\mathfrak{B}, \quad AB\mathfrak{C}, \quad -ABC\mathfrak{D}$$

inter se aequales reddantur; unde colligimus has determinationes:

$$1. \quad \mathfrak{B} = -\frac{\mathfrak{A}}{A} = \mathfrak{A} - 1,$$

$$2. \quad \mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{B}}{B} = \mathfrak{B} - 1 = \mathfrak{A} - 2,$$

$$3. \quad \mathfrak{D} = -\frac{\mathfrak{C}}{C} = \mathfrak{C} - 1 = \mathfrak{A} - 3.$$

Deinde vero ponatur $-ABCD = \theta$, ut fiat quintae lentis distantia focalis

$$t = +2\theta \cdot \frac{h}{m}$$

sextaeque

$$u = \frac{2}{3}\theta \cdot \frac{h}{m} = \frac{1}{3}t$$

et intervallum quintum $= \frac{2}{3}t = 2u$.

Iam in hac aequatione assumta $ABCD = -\theta$ loco litterarum A, B, C, D introducantur litterae germanicae respondentes eritque

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{A}} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}} \cdot \frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}} = -\theta$$

sive

$$\theta = \frac{\mathfrak{A}}{1-\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{A}}{4-\mathfrak{A}},$$

unde per θ istae litterae hoc modo definientur:

$$\mathfrak{A} = \frac{4\theta}{\theta+1}, \quad \mathfrak{B} = \frac{3\theta-1}{\theta+1}, \quad \mathfrak{C} = \frac{2\theta-2}{\theta+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} = \frac{\theta-3}{\theta+1},$$

$$A = -\frac{4\theta}{3\theta-1}, \quad B = -\frac{3\theta-1}{2\theta-2}, \quad C = -\frac{2\theta-2}{\theta-3} \quad \text{et} \quad D = \frac{\theta-3}{4};$$

ex quibus valoribus primo distantiae focales ita definientur:

$$p = \frac{4\theta a}{\theta+1}, \quad q = \frac{4\theta}{\theta+1} \cdot \frac{a}{P}, \quad r = \frac{4\theta}{\theta+1} \cdot \frac{a}{PQ},$$

$$s = \frac{4\theta}{\theta+1} \cdot \frac{a}{PQR}, \quad t = 2\theta \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad u = \frac{2}{3}\theta \cdot \frac{h}{m}$$

similique modo lentium intervalla:

$$\begin{aligned}
&\text{Primum} &&= -\frac{4\theta}{3\theta-1}\cdot a\left(1-\frac{1}{P}\right),\\
&\text{secundum} &&= -\frac{4\theta}{2\theta-2}\cdot a\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{PQ}\right),\\
&\text{tertium} &&= -\frac{4\theta}{\theta-3}\cdot a\left(\frac{1}{PQ}-\frac{1}{PQR}\right),\\
&\text{quartum} &&= \theta a\left(\frac{1}{PQR}-\frac{h}{ma}\right),\\
&\text{quintum} &&= \frac{2\theta}{3}\cdot a\cdot\frac{2h}{ma}=\frac{4}{3}\theta\cdot\frac{h}{m}=2u.
\end{aligned}$$

Quodsi iam velimus, ut trium intervallorum priorum quodlibet fiat

$$=\zeta p=\frac{4\theta}{1+\theta}\cdot\zeta a,$$

litterae P, Q, R et S sequenti modo determinabuntur:

$$\frac{1}{P}=1+\frac{(3\theta-1)}{1+\theta}\cdot\zeta,\quad \frac{1}{PQ}=1+\frac{(5\theta-3)}{1+\theta}\cdot\zeta,\quad \frac{1}{PQR}=1+\frac{(6\theta-6)}{1+\theta}\cdot\zeta.$$

His praemissis aequatio pro dato distinctionis gradu obtinendo sequenti forma exprimi poterit:

$$\frac{1}{k^3}=\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\left\{\begin{array}{c}
\frac{1}{\mathfrak{A}^3}\left(\lambda+\frac{\lambda'}{P}+\frac{\lambda''}{PQ}+\frac{\lambda'''}{PQR}\right)\\
-\frac{\nu}{\mathfrak{A}^3}\left(\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)+\frac{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-1)}{P}+\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-1)}{PQ}+\frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)}{PQR}\right)\\
+\frac{h}{8\theta^3 ma}(\lambda''''-6\nu)+\frac{27h\lambda'''''}{8\theta^3 ma}
\end{array}\right\},$$

pro qua brevitatis gratia ponamus

$$\frac{1}{k^3}=\frac{\mu m x^3}{a^2 h}\cdot\varDelta,$$

ita ut $\varDelta$ denotet quantitatem illam uncinulis inclusam, pro qua notetur litteris λ, λ', λ'' et λ''' valorem $=1$ tribui convenire, ut scilicet haec quantitas minima evadat, et quia duae postremae lentes utrinque debent esse

aeque convexae, erit

$$\lambda'''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2 (1 - 2\mathfrak{C})^2 = 1 + 25\left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2$$

et

$$\lambda''''' = 1 + \left(\frac{\sigma - \varrho}{2\tau}\right)^2.$$

Quantitas ergo $\varDelta$, si loco $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ valores inventi substituantur, ita exprimetur:

$$\varDelta = \frac{(1+\theta)^3}{16\theta^3} - \frac{\nu(\theta+1)(5\theta^2 - 6\theta + 5)}{16\theta^3} + \frac{(1+\theta)^2(7\theta - 5)}{32\theta^3}\cdot\zeta$$
$$- \frac{\nu(\theta - 1)(7\theta^2 - 18\theta + 23)}{16\theta^3}\cdot\zeta + \frac{h}{8\theta^3 ma}(\lambda'''' - 6\nu) + \frac{27h\lambda'''''}{8\theta^3 ma}.$$

Atque in hoc negotio id potissimum intenditur, ut valor ipsius $\varDelta$ vel plane ad nihilum redigatur vel saltim tam exiguus reddatur, ut ex hac aequatione numerus k multo maior prodeat quam 20, etiamsi apertura primae lentis tanta accipiatur, quam eius figura permittit; tum autem hoc valore pro x assumto pro gradu claritatis habebitur $y = \frac{hx}{ma}$ et mensura claritatis fiet

$$= \frac{20hx}{ma} = \frac{160x}{ma}.$$

COROLLARIUM 1

178. Quoniam pro microscopiis θ semper est numerus satis magnus, nisi forte multiplicatio exigua requiratur, quem casum hic merito excludimus, bina postrema membra ipsius $\varDelta$ manifesto tam sunt parva, ut tuto negligi queant, sicque hic valor aestimari debebit ex prioribus tantum membris

$$\varDelta = \frac{(1+\theta)^3}{16\theta^3} - \frac{\nu(\theta+1)(5\theta^2 - 6\theta + 5)}{16\theta^3} + \frac{(1+\theta)^2(7\theta - 5)}{32\theta^3}\cdot\zeta$$
$$- \frac{\nu(\theta - 1)(7\theta^2 - 18\theta + 23)}{16\theta^3}\cdot\zeta.$$

COROLLARIUM 2

179. Cum autem sit θ numerus praemagnus, haec expressio reducitur ad sequentem formam proxime veram:

$$\Delta = \frac{1}{16} - \frac{5}{16}\nu + \frac{7}{32}\zeta - \frac{7\nu}{16}\cdot\zeta + \frac{3}{16\theta} + \frac{\nu}{16\theta} + \frac{9}{32\theta}\cdot\zeta + \frac{25\nu}{16\theta}\cdot\zeta;$$

quae expressio si nihilo esset aequalis, verus valor ipsius Δ sine dubio tam foret exiguus, ut litterae x maximus valor, quem lentis figura permittit, tribui posset.

COROLLARIUM 3

180. Quoniam littera ν ab indole vitri pendet, cuius valor, prouti refractio ab $n = 1{,}50$ usque ad 1,58 augetur, ab $\frac{1}{5}$ usque ad $\frac{1}{4}$ crescit. Sumto $\nu = \frac{1}{5}$ fiet

$$\Delta = \frac{21}{160}\zeta + \frac{19}{32\theta}\cdot\zeta + \frac{1}{5\theta};$$ 1)

quae partes cum omnes sint positivae, patet, si lentes ex tali vitro parentur, valorem Δ ad nihilum redigi non posse. Sin autem fuerit $\nu = \frac{1}{4}$, habebitur

$$\Delta = -\frac{1}{64} + \frac{13}{64\theta} + \frac{7}{64}\zeta + \frac{43}{64\theta}\cdot\zeta,$$

qui valor utique nihilo aequalis esse poterit, quod scilicet eveniet casu $\theta = \infty$, si fuerit $\zeta = \frac{1}{7}$, qui valor ad praxin satis est accommodatus; at si sumamus $\theta = 50$, tum fiet $\Delta = 0$, si fuerit $\zeta = \frac{37}{393}$ seu $\zeta = \frac{1}{11}$, quod etiam praxi maxime convenit.

COROLLARIUM 4

181. Ut igitur valor ipsius Δ ad nihilum redigatur, vitro uti conveniet maiorem refractionem producente, cuiusmodi est vitrum crystallinum, pro quo $n = 1{,}58$; ac si forte praxis minus successerit, commode hic usu venit, ut lentium priorum intervallis tantillum mutatis scopo intento satisfieri queat; quod remedium in praxi eo facilius adhibetur, quod in ipsa lentium constructione nulla mutatio exigitur.

SCHOLION 1

182. Quod θ semper sit numerus satis magnus, ex supra traditis facile perspicitur; cum enim penultimae lentis distantia focalis t uno digito minor

1) Editio princeps: $\Delta = \frac{7}{80}\zeta + \frac{10}{16\theta}\cdot\zeta + \frac{1}{5\theta}$. Correxit E. Ch.

statui nequeat ob $h = 8$ dig., erit $\theta = \frac{m}{16}$ dig.; quare, cum multiplicatio m vix minor desiderari soleat quam 500 vel 480, habebitur hinc $\theta = 30$ dig.; maximam autem multiplicationem, quam quidem ob defectum claritatis adhuc desiderare possumus, aestimare licet $m = 960$, quo ergo casu erit $\theta = 60$ dig., ita ut valores ipsius θ intra 30 et 60 contenti sint aestimandi. Hoc autem notato si priora membra formulae $\varDelta$ fuerint $= 0$, facile intelligetur posteriora membra neutiquam esse turbatura; haec enim ultima membra certe adhuc minora erunt quam $\frac{125}{\theta^3 m}$; unde, si priora membra actu evanescant, prodibit aequatio

$$\frac{1}{k^3} < \frac{\mu m x^3}{a^2 h} \cdot \frac{125}{\theta^3 m} < \frac{125 \mu x^3}{a^2 h \theta^3}$$

sive sumto $\theta = 30$ erit

$$k^3 > \frac{30^3 a^2 h}{125 \mu x^3} \quad \text{sive} \quad k > \frac{30}{x} \sqrt[3]{\frac{a^2 h}{125 \mu}}.$$

Nunc quod ad valorem ipsius x attinet, observemus, si lens obiectiva esset simplex ideoque eius distantia focalis $p = a$ proxime, tum ob eius figuram capi posse $x = \frac{1}{6} a$ vel certe non maius; etsi autem hic quatuor lentes convexae in locum obiectivae substituantur, quarum singularum distantiae focales sunt fere quadruplo maiores, tamen, quia primae facies anterior est concava ideoque posterioris faciei radius valde parvus, ea vix maiorem aperturam admittet quam lens simplex, ita ut etiam hoc casu x maius capi nequeat quam $\frac{1}{6} a$; sit ergo $x = \frac{1}{6} a$ et sumto $a = \frac{1}{2}$ semper erit $k > 90$, quo valore indicatur insignis gradus distinctionis, cum etiam pro optimis telescopiis hic valor non ultra 50 augeri soleat; ex quo concludere licet non adeo necessarium esse, ut etiam priora membra ipsius $\varDelta$ penitus evanescant, dummodo ea per m multiplicata non multum superent posteriora; tum autem priora membra fere penitus evanescere debebunt; at iis nihilo aequalibus positis valor numeri ζ ita in genere determinabitur, ut sit

$$\zeta = \frac{+ 5\nu - 1 - \frac{(3 + \nu)}{\theta} - \frac{(3 + \nu)}{\theta^2} + \frac{5\nu - 1}{\theta^3}}{\frac{7}{2} - 7\nu + \frac{9 + 50\nu}{2\theta} - \frac{(3 + 82\nu)}{2\theta^2} - \frac{(5 - 46\nu)}{2\theta^3}},$$

ubi inprimis cavendum est, ne littera ζ nimis fiat parva, quam ut intervallum ζp commode in praxi locum habere queat, id quod obtinetur, dummodo ζ non notabiliter minor prodeat quam $\frac{1}{20}$; quamobrem operae pretium

erit investigare, an etiam vitro communi ad hunc scopum uti liceat, quandoquidem iam vidimus crystallinum satis esse idoneum; cum igitur pro vitro communi sit $n = 1{,}55$ et $\nu = 0{,}2326$, fiet

$$\zeta = \frac{0{,}1630 - \frac{3{,}2326}{\theta} - \frac{3{,}2326}{\theta^2} + \frac{0{,}1630}{\theta^3}}{1{,}8718 + \frac{10{,}3150}{\theta} - \frac{11{,}0366}{\theta^2} + \frac{2{,}8498}{\theta^3}};$$

hic autem primum observari convenit, si esset $\theta = \infty$, fore $\zeta = \frac{1}{11}$ circiter, qui valor utique ad praxin maxime esset accommodatus; at si sumamus $\theta = 30$, orietur $\zeta = \frac{1}{43}$, qui valor nimis est exiguus; unde patet pro θ maiorem valorem accipi debere. Sumto autem $\theta = 50$ reperitur $\zeta = \frac{0{,}0971}{2{,}0340} = \frac{1}{22}$ proxime, qui valor adhuc admitti commode poterit. Sumto autem $\theta = 60$ eruitur $\zeta = \frac{0{,}1082}{2{,}0407} = \frac{1}{18}$ [proxime], qui valor praxi egregie convenire videtur. Hunc igitur casum sequenti exemplo fusius evolvamus.

EXEMPLUM 1

183. Si omnes lentes ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, conficiantur ac sumatur $\theta = 60$, ut microscopium adeo ad multiplicationem $m = 1000$ adhiberi possit, momenta constructionis sequenti modo se habebunt.

Primo scilicet habebimus

$$\mathfrak{A} = \frac{240}{61} = 4 - \frac{4}{61} = 4 - \frac{1}{15} \text{ proxime},$$

$$\mathfrak{B} = 3 - \frac{1}{15}, \quad \mathfrak{C} = 2 - \frac{1}{15}, \quad \mathfrak{D} = 1 - \frac{1}{15}$$

atque porro

$$\frac{1}{P} = 1 + \left(3 - \frac{1}{15}\right)\zeta;$$

et quia modo vidimus sumi debere $\zeta = \frac{1}{18}$, erit

$$\frac{1}{P} = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{270} = 1{,}1629,$$

$$\frac{1}{PQ} = 1 + \frac{5}{18} - \frac{2}{270} = 1{,}2703,$$

$$\frac{1}{PQR} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{90} = 1{,}3222;$$

unde distantiae focales lentium erunt

$$p=\left(4-\frac{1}{15}\right)a=3{,}9333\,a, \qquad q=\frac{p}{P}=4{,}5740\,a,$$
$$(0{,}5947571) \qquad\qquad (0{,}6602996)$$

$$r=\frac{p}{PQ}=4{,}9965\,a, \qquad s=\frac{p}{PQR}=5{,}2006\,a.$$
$$(0{,}6986634) \qquad\qquad (0{,}7160543)$$

Tum vero

$$t=\frac{960}{m}\text{ dig.} \quad \text{et} \quad u=\frac{320}{m}\text{ dig.}$$

Harum porro quatuor priorum lentium intervallum commune est

$$=\frac{1}{18}p=0{,}2185\,a.$$

Quartum vero intervallum erit

$$=79{,}332\,a-\frac{480}{m}\text{ dig.}$$

Quintum vero

$$=2u=\frac{640}{m}\text{ dig.}$$

et distantia oculi

$$O=\frac{1}{2}u=\frac{160}{m}\text{ dig.}$$

Nunc igitur singularum lentium constructio est describenda.

I. Pro prima lente

cuius distantia focalis est $p=3{,}9333\,a$ et numeri

$$\lambda=1, \quad \mathfrak{A}=4-\frac{1}{15},$$

erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} &=\dfrac{p}{\sigma-\mathfrak{A}(\sigma-\varrho)}=-\dfrac{p}{4{,}0236}=-0{,}97756\,a\\[2ex] \text{posterior} &=\dfrac{p}{\varrho+\mathfrak{A}(\sigma-\varrho)}=+\dfrac{p}{5{,}8417}=+0{,}67332\,a,\end{cases}$$

quae aperturam admittit, cuius semidiameter $x=0{,}16833\,a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis est $q = 4{,}5740\,a$ et numeri

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = 3 - \frac{1}{15},$$

erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{q}{2{,}5869} = -1{,}7682\,a\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{q}{4{,}4050} = +1{,}0384\,a.\end{cases}$$

III. Pro lente tertia

cuius distantia focalis est $r = 4{,}9965\,a$ et numeri

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} - 2,$$

erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{r}{1{,}1502} = -4{,}3440\,a\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{r}{2{,}9683} = +1{,}6833\,a.\end{cases}$$

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis $s = 5{,}2006\,a$ et numeri

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{A} - 3,$$

erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{s}{\sigma - \mathfrak{D}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{s}{0{,}2865} = 18{,}1522\,a\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{s}{\varrho + \mathfrak{D}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{s}{1{,}5316} = 3{,}3955\,a.\end{cases}$$

Hinc ergo deducitur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX SEX LENTIBUS COMPOSITI REFRACTIONE VITRI EXISTENTE $n = 1{,}55$

184. Pro hoc microscopio sumitur m numerus praemagnus arbitrarius, quippe a quo tantum binae lentes posteriores pendent.

I. Pro prima lente

cuius distantia focalis $p = 3{,}9333\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0{,}97756\,a \\ \text{posterioris} & = +\,0{,}67332\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= 0{,}16833\,a$

et distantia ad lentem secundam $= 0{,}2185\,a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis $q = 4{,}5740\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,1{,}7682\,a \\ \text{posterioris} & = +\,1{,}0384\,a; \end{cases}$$

apertura et distantia ad lentem sequentem sunt ut ante.

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $r = 4{,}9965\,a$, est

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,4{,}3440\,a \\ \text{posterioris} & = +\,1{,}6833\,a, \end{cases}$$

apertura et distantia ad lentem sequentem ut ante.

IV. Pro lente quarta

cuius distantia focalis $s = 5{,}2006\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 18{,}1522\,a \\ \text{posterioris} & = 3{,}3955\,a, \end{cases}$$

apertura ut ante;

distantia ad lentem quintam vero erit $= 79{,}332\,a - \frac{480}{m}$ dig.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis est $t = \frac{960}{m}$ dig., capiatur

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{1056}{m} \text{ dig.},$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{240}{m}$ dig.

et distantia ad lentem sextam $= \frac{640}{m}$ dig.

VI. Pro lente sexta

cuius distantia focalis $u = \frac{320}{m}$ dig., erit

$$\text{radius utriusque faciei} = \frac{352}{m} \text{ dig.,}$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{80}{m}$ dig.
et distantia oculi $= \frac{160}{m}$ dig.

VII. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit $= \frac{4a}{ma + 8}$ dig. et mensura claritatis, qua obiecta repraesentabuntur, erit $= \frac{26{,}9328}{m}$, quae, etiamsi multiplicatio statuatur $m = 1000$, adhuc satis est magna.

VIII. Hoc tantum in hoc genere microscopiorum displicebit forte, quod eorum longitudo, quippe quae fere aequalis est $80a$, tam fit enormis ideoque minus commoda videbitur; sed cum distantiam obiecti facile ad digiti dimidium vel adeo trientem diminuere liceat, nihil impedit, quominus haec microscopia ad quosvis usus adhiberi queant.

IX. Etiamsi hic quaelibet multiplicatio peculiares lentes quintam et sextam postulat, tamen facile intelligitur, si huiusmodi instrumentum ad certam multiplicationem fuerit accommodatum, tum idem etiam tam pro maioribus quam pro minoribus multiplicationibus optimo successu adhiberi posse, dum scilicet eius longitudo sive minuitur sive augetur.

X. Denique cum quatuor lentes priores maiores esse debeant quam apertura primae lentis, artifici praecipi poterit, ut disci harum lentium in diametro contineant $\frac{2}{5}a$, ita ut, si fuerit $a = \frac{1}{2}$ dig., diameter horum discorum sit $\frac{1}{5}$ dig.

EXEMPLUM 2

185. Si omnes lentes ex vitro crystallino parentur, omnia momenta, quae ad constructionem microscopiorum pertinent, describere, ita ut fiat $\varDelta = 0$. Cum hoc casu sit $n = 1{,}58$, erit $\nu = 0{,}2529$; unde ex formula supra data colligemus

$$\zeta = \frac{0{,}2645 - \frac{3{,}2529}{\theta} - \frac{3{,}2529}{\theta^2} + \frac{0{,}2645}{\theta^3}}{+1{,}7297 + \frac{10{,}8225}{\theta} - \frac{11{,}8689}{\theta^2} + \frac{3{,}3167}{\theta^3}};$$

iam si θ esset infinitum, foret $\zeta = \frac{0,2645}{1,7297} = \frac{1}{6}$ circiter; sin autem sumamus ut ante $\theta = 60$, prodibit $\zeta = \frac{0,2094}{1,9068} = \frac{1}{9}$ circiter; unde patet, si ipsi ζ minor valor tribuatur, tum $\varDelta$ nacturum esse valorem negativum, quem commode in nostrum lucrum convertere poterimus; cum enim tum ex aequatione principali pro hoc casu fiat

$$\varDelta = \frac{-0,2094 + 1,9068\,\zeta}{16},$$

si ponamus ut in exemplo praecedente $\zeta = \frac{1}{18}$, fiet

$$\varDelta = -0,0065.$$

Cum autem pro prima lente sumserimus $\lambda = 1$, facile intelligitur, si huic λ maior valor tribuatur, fieri posse, ut haec expressio pro $\varDelta$ penitus evanescat; hunc in finem statuamus $\lambda = 1 + \omega$, et cum in computo confusionis ex littera $\lambda = 1$ nata sit formula $\frac{1}{\mathfrak{A}^3}$, nunc ex valore $\lambda = 1 + \omega$ nascetur $\frac{1+\omega}{\mathfrak{A}^3}$, ita ut nunc valor $\varDelta$ augmentum accipiat

$$= \frac{\omega}{\mathfrak{A}^3} = \frac{\omega(1+\theta)^3}{64\theta^3} = 0,0164\,\omega,$$

ita ut fiat

$$\varDelta = 0,0164\,\omega - 0,0065.$$

Quare, ut fiat $\varDelta = 0$, capi debebit $\omega = \frac{0,0065}{0,0164} = \frac{65}{164}$ sicque pro prima lente statui debebit $\lambda = 1 + \frac{65}{164}$ manentibus pro tribus lentibus sequentibus $\lambda' = 1 = \lambda'' = \lambda'''$; quo effici poterit, ut prima lens aliquanto maioris aperturae capax reddatur. Cum igitur sit ut in exemplo praecedente $\theta = 60$ et $\zeta = \frac{1}{18}$, tam distantiae focales quam intervalla eosdem quoque valores retinebunt tantumque superest, ut singularum lentium constructio doceatur.

I. Pro prima autem lente

cuius distantia focalis $p = 3,9333\,a$ et numeri

$$\lambda = 1 + \omega \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = 4 - \frac{1}{15},$$

erit

$$\text{radius}\begin{cases} \text{anterior} & \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) + \tau\sqrt{\omega}} = \dfrac{p}{-4,0865 + 0,5524} = -1,1129\,a \\ \text{posterior} & \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) - \tau\sqrt{\omega}} = \dfrac{p}{5,8106 - 0,5524} = +0,7480\,a, \end{cases}$$

unde haec lens aperturam admittit, cuius semidiameter $x = 0,1870\,a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis est $q = 4{,}5740\,a$, erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = -\dfrac{q}{2{,}6452} = -1{,}7292\,a\\[2ex] \text{posterior} & = +\dfrac{q}{4{,}3693} = +1{,}0469\,a.\end{cases}$$

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $r = 4{,}9965\,a$, erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = -\dfrac{r}{1{,}2039} = -4{,}1503\,a\\[2ex] \text{posterior} & = +\dfrac{r}{2{,}9280} = +1{,}7065\,a.\end{cases}$$

IV. Pro lente quarta

cuius distantia focalis $s = 5{,}2006\,a$, erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} & = \dfrac{s}{0{,}2375} = 21{,}8973\,a\\[2ex] \text{posterior} & = \dfrac{s}{1{,}4866} = 3{,}4983\,a.\end{cases}$$

Hinc ergo sequitur

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX SEX LENTIBUS COMPOSITI

186. Constructis ex vitro crystallino, pro quo $n = 1{,}58$, quaternis lentibus prioribus, quemadmodum modo est praeceptum, pro data obiecti distantia $= a$ statuantur intervalla inter has lentes $= \frac{1}{18}p = 0{,}2185\,a$ et priori lenti tribuatur apertura, cuius semidiameter $x = 0{,}1870\,a$, et intervallum a quarta harum lentium usque ad quintam

$$= 79{,}332\,a - \frac{480}{m}\text{ dig.}$$

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $t = \frac{960}{m}$ dig.

et quam una cum sexta ex vitro communi conficere licebit, capiatur

radius utriusque faciei $= \frac{1056}{m}$ dig.,

eius aperturae semidiameter $= \frac{240}{m}$ dig.
et distantia ad lentem sextam $= \frac{640}{m}$ dig.

VI. Pro lente sexta

cuius distantia focalis $u = \frac{320}{m}$ dig., erit

radius faciei utriusque $= \frac{352}{m}$ dig.,

eius aperturae semidiameter $= \frac{80}{m}$ dig.
et distantia oculi $= \frac{160}{m}$ dig.

VII. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit $= \frac{4a}{ma+8}$ dig.; at mensura claritatis fiet $= \frac{29{,}920\,a}{m}$, satis notabiliter maior quam in exemplo praecedente.

Ceterum eadem hic erunt observanda, quae supra sunt allata.

COROLLARIUM 5

187. His duobus microscopiorum generibus inter se comparandis istud insigne commodum consequimur, quod, si forte vitrum occurrat, cuius refractio medium quodpiam teneat inter refractiones $n = 1{,}55$ et $n = 1{,}58$, tum per regulam interpolationum constructio lentium facile definiri queat.

SCHOLION 2

188. Accommodemus formulas, quas in hoc problemate invenimus, etiam ad telescopia, quandoquidem hic determinationes aliquantum differentes induximus. Cum igitur sit $a = \infty$ et $h = a$, debebit esse $\theta = 0$, sed ita tamen, ut fiat $\theta a =$ quantitati finitae, ponaturque $\theta a = l$; tum ergo fient elementa nostra

$$\mathfrak{A} = 4\theta, \quad \mathfrak{B} = -1, \quad \mathfrak{C} = -2, \quad \mathfrak{D} = -3 \quad \text{et} \quad \mathfrak{E} = -2$$

hincque

$$A = 4\theta, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{2}{3}, \quad D = -\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad E = -\frac{2}{3},$$

tum vero

$$\frac{1}{P} = 1 - \zeta, \quad \frac{1}{PQ} = 1 - 3\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{PQR} = 1 - 6\zeta.$$

Quare distantiae focales lentium erunt

$$p = 4l, \quad q = 4l(1-\zeta), \quad r = 4l(1-3\zeta), \quad s = 4l(1-6\zeta),$$
$$t = \frac{2l}{m} \quad \text{et} \quad u = \frac{2}{3}\cdot\frac{l}{m}$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \text{secundo} = \text{tertio} = \zeta p = 4\zeta l,$$
$$\text{quartum} = l(1-6\zeta) - \frac{l}{m}, \quad \text{quintum} = \frac{4}{3}\cdot\frac{l}{m};$$

ac denique distantia oculi

$$O = \frac{1}{3}\cdot\frac{l}{m}\left(2+\frac{1}{m}\right).$$

Porro vero campi apparentis semidiameter

$$\Phi = \frac{z}{a} = \frac{1718}{m+1}\ \text{min.}$$

Denique aequatio pro sufficiente distinctione comparanda erit

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu m x^3}{l^3}\left\{\frac{1}{16} - \frac{5}{32}\zeta - \frac{\nu}{16}(5-23\zeta) + \frac{1}{8m}(\lambda'''' - 6\nu) + \frac{27\lambda'''''}{8m}\right\},$$

ubi quidem sumsimus $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 1$; tum vero numeri λ'''' et λ''''' inde sumi debent, quod binae postremae lentes utrinque debent esse aequaliter convexae. Quodsi iam velimus, ut haec expressio penitus ad nihilum redigatur, poni oportebit

$$m(1-\tfrac{5}{2}\zeta) - m\nu(5-23\zeta) + 2(\lambda'''' - 6\nu) + 54\lambda''''' = 0.$$

Binas autem postremas lentes semper licebit ex vitro communi construere, ubi est $n = 1{,}55$; tum autem erit $\lambda'''' = 16{,}74\tfrac{1}{2}$ et $\lambda''''' = 1{,}6298$ hincque bina membra postrema dabunt 118,7080, ita ut esse debeat

$$m(1-\tfrac{5}{2}\zeta) - m\nu(5-23\zeta) + 118{,}7080 = 0;$$

quodsi iam etiam quatuor priores lentes ex eodem vitro communi parentur, ob $\nu = 0{,}2326$ reperietur

$$-0{,}1630m + 2{,}8498\zeta m + 118{,}7080 = 0$$

adeoque

$$\zeta = \frac{0,1630\,m - 118,7080}{2,8498\,m} \quad \text{seu} \quad \zeta = \frac{1630\,m - 1187080}{28498\,m};$$

hinc ergo pro ζ valor positivus non prodit, nisi sit

$$m > \frac{1187080}{1630} \quad \text{seu} \quad m > 728 \text{ circiter};$$

tanta vero multiplicatio vim telescopiorum longe superat ac tum quidem deberet esse $\zeta = 0$, cum tamen $\frac{1}{50}$ superare debeat; quod incommodum etiam locum habet, si priores lentes ex vitro crystallino conficiantur, etsi fiat aliquanto minus. Ex quo perspicuum est formulas hic inventas ad telescopia neutiquam tanto successu applicari posse quam ad microscopia, uti modo ostendimus.

CAPUT III

DE SUMMA MICROSCOPIORUM HUIUS GENERIS PERFECTIONE DUM OPE LENTIUM CONCAVARUM ET EX ALIA VITRI SPECIE CONFECTARUM OMNIS PLANE CONFUSIO AD NIHILUM REDIGITUR

PROBLEMA 1

189. *Loco lentis obiectivae duas lentes, quarum prior sit concava, substituere, ut manentibus binis lentibus posterioribus confusio omnis tollatur.*

SOLUTIO

Cum hic ergo quatuor habeantur lentes ideoque tria intervalla, litterarum P, Q, R ultima debet esse negativa; ponatur ergo $R = -k$, et ut margo coloratus tollatur, ex supra traditis manifestum est capi debere $k = 1$, ita ut sit $PQ = \frac{ma}{h}$; deinde ut simul idem campus comparetur qui ante, debet esse $\mathfrak{C} = -2$ et $C = -\frac{2}{3}$; unde distantiae focales lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P} \cdot a, \quad r = -2AB \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad s = -\frac{2}{3}AB \cdot \frac{h}{m},$$

intervalla vero lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right),$$

$$\text{secundum} = -\frac{ABa}{P} + AB \cdot \frac{h}{m}$$

et

$$\text{tertium} = -\frac{4}{3}AB \cdot \frac{h}{m} = 2s$$

et ut ante distantia oculi

$$O = \frac{1}{2} s \left(1 + \frac{h}{ma}\right),$$

quemadmodum etiam spatii in obiecto conspicui semidiameter manet

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{ma + h};$$

nunc autem cum prima lens debeat esse concava, necesse est sit $\mathfrak{A} < 0$ ideoque et $A < 0$, quare oportebit esse $P < 1$; tum vero ob $AB < 0$ debet esse $B > 0$ ideoque etiam $\mathfrak{B}$ quantitas positiva. Ponamus iam ut ante, quoniam duae priores lentes sibi debent esse proximae, intervallum primum $= -\zeta p$ fietque

$$\frac{1}{P} = 1 + \frac{\mathfrak{A}}{A} \cdot \zeta = 1 + (1 - \mathfrak{A}) \zeta.$$

Cum prima lens sit concava, sit ea quoque ex vitro crystallino parata, dum reliquae ex vitro coronario factae esse sumuntur, ita ut nunc n denotet 1,58 et $n' = 1{,}53 = n'' = n'''$, quibus reliquae litterae independentes consentaneae esse debent. Quo posito aequatio omnem confusionem a diversa radiorum refrangibilitate oriundam tollens erit [§ 27]

$$0 = N \cdot \frac{1}{p} + \frac{N'}{P^2} \cdot \frac{1}{q} + \frac{N'}{P^2 Q^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{N'}{P^2 Q^2 R^2} \cdot \frac{1}{s}$$

seu

$$0 = \frac{N}{N'} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{P^2 q} + \frac{h^2}{m^2 a^2 r} + \frac{h^2}{m^2 a^2 s},$$

ubi duo posteriora membra manifesto reiici possunt, et cum sit circiter $\frac{N}{N'} = \frac{10}{7}$ et $P = 1$ proxime, haec aequatio dabit

$$0 = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}} - \frac{1}{A\mathfrak{B}}$$

adeoque

$$\mathfrak{B} = \frac{7}{10} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{7}{10}(1 - \mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad B = \frac{7(1 - \mathfrak{A})}{3 + 7\mathfrak{A}};$$

qui valor ut fiat positivus existente $\mathfrak{A} < 0$, necesse est, ut $3 + 7\mathfrak{A}$ sit positivum sive $-\mathfrak{A} < \frac{3}{7}$; si autem non sit $P = 1$, adcuratius habebimus

$$\mathfrak{B} = \frac{7}{10}(1 - \mathfrak{A})(1 + (1 - \mathfrak{A})\zeta),$$

ubi tantum notetur esse debere $\mathfrak{B} < 1$, ut etiam B prodeat positivum.

Ponatur igitur

$$(1-\mathfrak{A})(1+(1-\mathfrak{A})\zeta)<\frac{10}{7}, \qquad (1-\mathfrak{A})^2+\frac{1-\mathfrak{A}}{\zeta}<\frac{10}{7\zeta}$$

et addito utrinque $\frac{1}{4\zeta^2}$ oportebit esse

$$1-\mathfrak{A}+\frac{1}{2\zeta}<\sqrt{\frac{10}{7\zeta}+\frac{1}{4\zeta^2}}.$$

Ne nunc binae priores lentes sibi nimium fiant vicinae, statuamus $\zeta=\frac{1}{7}$ capique debebit

$$1-\mathfrak{A}<-\frac{7}{2}+\sqrt{10+\frac{49}{4}} \quad \text{seu} \quad 1-\mathfrak{A}<1{,}217.$$

Sumamus igitur

$$1-\mathfrak{A}=1{,}2=\frac{6}{5}$$

eritque

$$\mathfrak{A}=-\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad A=-\frac{1}{6};$$

tum vero ob $\zeta=\frac{1}{7}$ erit $\frac{1}{P}=\frac{41}{35}$ hincque

$$\mathfrak{B}=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{41}{35}=\frac{246}{250}=\frac{123}{125} \quad \text{et} \quad B=\frac{123}{2}=61\frac{1}{2};$$

unde sequitur $AB=-10\frac{1}{4}$, qui valor sine dubio nimis est parvus, quia pro magnis multiplicationibus pro r nimis exiguum praeberet valorem; verum notandum est, si $1-\mathfrak{A}$ tantillo maior caperetur quam $\frac{6}{5}$, ut discrimen in praxi sentiri non posset, tum productum AB quantumvis magnum evadere posse; si enim ponamus $1-\mathfrak{A}=\frac{6}{5}+\omega$, inde elicitur

$$B=\frac{246+235\omega+25\omega^2}{4-235\omega-25\omega^2};$$

qui valor adeo infinitus evaderet, si tantum sumeretur $\omega=\frac{1}{60}$ proxime, quo pacto valores A, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ vix sensibiliter mutarentur, ita ut sumtis hisce valoribus

$$\mathfrak{A}=-\frac{1}{5}, \quad A=-\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{P}=\frac{41}{35}$$

ob

$$\zeta=\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}=\frac{123}{125}=1-\frac{2}{125}$$

littera B adhuc ut indefinita spectari atque sine haesitatione ita definiri possit, ut littera r idoneum valorem nanciscatur. Quamobrem habebimus, ut sequitur:

$$p = -\frac{1}{5}a, \quad q = 0{,}19212\,a, \quad r = \theta \cdot \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{3}r,$$

ubi θ pro lubitu assumi potest; deinde vero intervalla erunt

$$\text{primum} = -\frac{1}{7}p = \frac{1}{35}a, \quad \text{secundum} = \frac{41\,\theta a}{70} - \frac{1}{2}\theta \cdot \frac{h}{m}, \quad \text{tertium} = 2s.$$

Nunc denique, ut etiam confusio ab apertura lentium oriunda evanescat, satisfieri debet huic aequationi [§ 31]:

$$0 = \frac{\mu}{\mu'}(\lambda + \nu\,\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})) - \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right).$$

Quodsi iam hic sumatur $\lambda' = 1$, ob

$$\mu = 0{,}8724, \quad \nu = 0{,}2529, \quad \mu' = 0{,}9875, \quad \nu' = 0{,}2196$$

calculo facto reperietur

$$\lambda = 2{,}4137 + 0{,}0607 = 2{,}4744,$$

unde colligitur $\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}0655$; quare pro lente prima ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p = -\frac{1}{5}a$ et numeri

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \lambda = 2{,}4744,$$

erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{p}{1{,}8710 - 1{,}0655} \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{p}{-0{,}1469 + 1{,}0655}, \end{cases}$$

unde fit

$$\text{radius faciei}\begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p}{0{,}8055} = -0{,}2483\,a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{0{,}9186} = -0{,}2177\,a; \end{cases}$$

quae ergo aperturae capax est, cuius semidiameter $x = 0{,}0544\,a$, nisi forte secunda lens tantam aperturam non patiatur.

Pro secunda autem lente ex vitro coronario, cuius distantia focalis $q = 0{,}19212\,a$ et numeri

$$\mathfrak{B} = \frac{123}{125} \quad \text{et } \lambda' = 1,$$

erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{0{,}2496} = 0{,}7697\,a \\ \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{q}{1{,}6372} = 0{,}1173\,a, \end{cases}$$

cuius ergo apertura maior esse nequit quam $x = 0{,}0293\,a$. Hinc autem colligitur

$$y = \frac{hx}{ma} = \frac{0{,}2344}{m} \text{ dig.}$$

hincque mensura claritatis $= \frac{4{,}688}{m}$, quae ergo fere sexies minor est quam in ultimo casu capitis praecedentis.

Hinc ergo colligitur sequens

CONSTRUCTIO HUIUSMODI MICROSCOPIORUM EX QUATUOR LENTIBUS COMPOSITORUM

190. Posita distantia obiecti ab instrumento $= a$ et multiplicatione $= m$ habebitur

I. Pro prima lente concava ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p = -\frac{1}{5}a$,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -0{,}2483\,a \\ \text{posterioris} = -0{,}2177\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter ob rationes modo allegatas $x = 0{,}0293\,a$
et distantia ad lentem secundam $= -\frac{1}{7}p = 0{,}0286\,a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis est $q = 0{,}1921\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 0{,}7697\,a \\ \text{posterioris} = 0{,}1173\,a; \end{cases}$$

apertura manet ut ante.

Distantia ad lentem tertiam $= \frac{41}{560} mar - \frac{1}{2} r$,
ubi r denotat distantiam focalem tertiae lentis, quam pro arbitrio assumere licet.

III. Pro tertia autem lente, cuius distantia focalis $= r$, si ex vitro coronario paretur,

$$\text{radius faciei utriusque} = 1{,}06\, r;$$

perinde autem est, ex quanam vitri specie haec lens atque etiam quarta parentur;

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} r$
et distantia ad lentem quartam $= \frac{2}{3} r$.

IV. Pro quarta lente, cuius distantia focalis est $s = \frac{1}{3} r$, capiatur

$$\text{radius utriusque faciei} = 1{,}06\, s$$

vel potius secundum indolem vitri, ex qua paratur.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} s$
et distantia ad oculum $= \frac{1}{2} s$.

V. Porro spatii in obiecto conspicui semidiameter erit ut hactenus

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{ma + h} = \frac{4a}{ma + 8} \text{ dig.}$$

VI. Claritatis autem, qua obiecta conspicientur, mensura erit $= \frac{4{,}688}{m}$.

COROLLARIUM 1

191. Hic manifestum est, ne duae priores lentes nimis fiant exiguae, quam ut ab artifice adcurate elaborari possint, necessario distantiam obiecti a multo maiorem statui debere quam hactenus. Videtur autem haec distantia a vix minor duobus digitis commode assumi posse, quod quidem in praxi pro lucro est habendum, praesertim cum claritas ab hac distantia non pendeat.

COROLLARIUM 2

192. Sumta autem distantia $a = 2$ dig. intervallum secundum evadet $\frac{41}{280} mr - \frac{1}{2} r$; quare si sumamus $r = 1$ dig., siquidem ob $s = \frac{1}{3} r$ commode minus accipi nequit, pro multiplicatione $m = 280$ hoc intervallum erit $40\frac{1}{2}$ dig.;

sin autem multiplicatio desideretur duplo maior, $m = 560$, hoc intervallum fiet $= 81\frac{1}{2}$ dig. atque adeo maius pro maioribus multiplicationibus; quae enormis longitudo sine dubio maxime displicebit.

SCHOLION

193. Quod haec microscopia his incommodis sint obnoxia, causa in eo est sita, quod distantiae focales priorum lentium nimis sint exiguae, dum scilicet p et q tantum parti circiter quintae ipsius a aequari debebant, cum in casu postremo capitis praecedentis hae distantiae focales adeo quadruplo essent maiores quam distantia a, atque hinc etiam factum est, ut mensura claritatis hic tantum inventa sit $= \frac{4,688}{m}$, cum ante esset $\frac{29,92}{m}$, hoc est sexies maior atque adeo secundum veritatem tricies sexies maior. Quamobrem, etiamsi artifex in constructione horum microscopiorum omnem diligentiam et industriam adhibeat eique opus ex voto succedat, tamen vehementer dubito, an haec microscopia ullam praerogativam prae antecedentibus mereantur, quamvis hic etiam secunda confusio a diversa refrangibilitate oriunda penitus sit sublata, quod in praecedente capite praestare non licuit. Hic quidem primam lentem sumsimus concavam, secundam vero convexam; verum ex superioribus satis liquet nullum commodum exspectari posse, si hae lentes inter se permutarentur; quin potius hic ordo iam supra anteferri in praxi debere est observatus ideoque superfluum foret, si istum casum seorsim evolvere vellemus. Quamobrem nunc statim loco lentis obiectivae tres lentes substituamus, quarum una sit concava binaeque reliquae convexae, et inquiramus praecipue, num hoc casu distantia focalis harum lentium aliquanto maior fieri queat quam casu hic tractato et num forte numerum lentium ulterius augendo maiora adhuc commoda sperari queant.

PROBLEMA 2

194. *Loco lentis obiectivae tres lentes sibi proxime iunctas substituere, quarum prima sit concava et ex vitro crystallino parata, binae autem reliquae convexae ex vitro coronario, ut manentibus binis lentibus postremis omnis confusio ad nihilum redigatur.*

SOLUTIO

Cum hic quatuor habeantur intervalla, litterarum P, Q, R, S ultima erit negativa et margo coloratus tolletur, si fuerit $S = -1$. Binae vero primae

litterae P et Q unitati proxime erunt aequales, ita ut sit $PQR = \frac{ma}{h}$. Quod ad reliquas litteras attinet, conditio campi postulat, ut sit $\mathfrak{D} = -2$ et $D = -\frac{2}{3}$, et cum prima lens sit concava, erit $\mathfrak{A}$ negativum ideoque etiam A, ita tamen, ut sit $-A < 1$. Deinde ob $q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P} \cdot a$, quia haec lens debet esse convexa, littera $\mathfrak{B}$ erit positiva, et quia tertia lens, pro qua est $r = \frac{AB\mathfrak{C}}{PQ} \cdot a$, etiam debet esse convexa, esse debet $B\mathfrak{C} < 0$, et quia porro fit

$$s = +\frac{2ABC}{PQR} \cdot a = 2ABC \cdot \frac{h}{m},$$

ne haec lens pro maioribus multiplicationibus fiat nimis parva, productum ABC aequari debet numero praemagno positivo, unde concluditur BC fore numerum magnum negativum. Cum autem sit etiam $B\mathfrak{C} < 0$ hicque numerus non possit esse praemagnus, sequitur C esse debere numerum praemagnum hincque $\mathfrak{C}$ unitati proxime aequale; quamobrem B debet esse numerus negativus hincque $\mathfrak{B} > 1$, contra vero $\mathfrak{C} < 1$, sed differentia existente valde parva, ut prodeat C numerus praemagnus positivus.

His notatis consideremus aequationem, qua confusio posterior penitus tollitur, quae erit

$$0 = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{P^2 q} + \frac{1}{P^2 Q^2 r} + \frac{1}{P^2 Q^2 R^2 s} + \frac{1}{P^2 Q^2 R^2 t},$$

ubi ob $PQR = \frac{ma}{h}$ bina postrema membra tuto reiicere licet, et cum litterae P et Q proxime unitati aequentur, habebimus hanc determinationem:

$$0 = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r},$$

ita ut sit

$$\frac{1}{p} = -\frac{7}{10}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$

sive substitutis valoribus

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = -\frac{7}{10}\left(\frac{1}{B\mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{B}}\right);$$

et quia proxime est $\mathfrak{C} = 1$, obtinebimus

$$1 + A = \frac{7}{10}$$

adeoque

$$A = -\frac{3}{10} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A} = -\frac{3}{7}.$$

Cum autem sufficiat rem propemodum tantum definivisse, sumamus $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$ et statuendo ambo priora intervalla

$$= -\frac{1}{7}p = \frac{1}{14}a$$

fiet

$$\frac{1}{P} = \frac{17}{14} \quad \text{et} \quad \frac{1}{PQ} = \frac{17}{14} - \frac{3}{14B}$$

hincque

$$p = -\frac{1}{2}a, \quad q = +\frac{\mathfrak{B}}{3P}\cdot a, \quad r = -\frac{B}{3PQ}\cdot a;$$

qui valores substituti dabunt

$$0 = -\frac{20}{7} + \frac{3}{\mathfrak{B}P} - \frac{3}{BPQ},$$

$$0 = -\frac{20}{7} + \frac{51}{14\mathfrak{B}} - \frac{51}{14B} + \frac{9}{14B^2}$$

seu

$$0 = -\frac{20}{7} + \frac{51}{14} + \frac{9}{14B^2}$$

ob $\frac{1}{\mathfrak{B}} - \frac{1}{B} = 1$ vel

$$0 = \frac{11}{14} + \frac{9}{14B^2};$$

hinc ergo non enormiter aberrabitur, quicquid pro B accipiatur; quodsi autem aequationem ex destructione alterius confusionis consideremus, patebit non incongrue sumi posse $\mathfrak{B} = 2$ ideoque $B = -2$, ita ut iam sit

$$\frac{1}{PQ} = \frac{37}{28}, \quad q = \frac{17}{21}a \quad \text{et} \quad r = \frac{37}{42}a;$$

tum autem aequatio adhuc resolvenda erit

$$\lambda = \frac{3}{4}\nu + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{17\cdot 27}{14\cdot 8^2}(\lambda' - 2\nu') + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{27\cdot 37\cdot\lambda''}{28\cdot 8^2},$$

ubi poni potest tam $\lambda' = 1$ quam $\lambda'' = 1$, et ob

$$\nu = 0{,}2529 \quad \text{et} \quad \nu' = 0{,}2196 \quad \text{et} \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{9875}{8724}$$

fiet

$$\lambda = 0{,}1897 + 0{,}3252 + 0{,}6322 \quad \text{adeoque} \quad \lambda = 1{,}1471;$$

unde colligitur

$$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}3365.$$

Quare pro prima lente crystallina erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = +\dfrac{p}{1{,}9668} = -\,0{,}2542\,a\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = -\dfrac{p}{0{,}2427} = +\,2{,}0602\,a.\end{cases}$$

Pro lente secunda ex vitro coronario paranda erit

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{q}{1{,}2067} = -0{,}6708\,a\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{q}{3{,}0935} = +0{,}2617\,a.\end{cases}$$

Simili modo pro tertia lente

$$\text{radius}\begin{cases}\text{anterior} = \dfrac{r}{\varrho} = \dfrac{r}{0{,}2267} = 3{,}8857\,a\\[2ex] \text{posterior} = \dfrac{r}{\sigma} = \dfrac{r}{1{,}6601} = 0{,}5306\,a;\end{cases}$$

pro quarum lentium apertura sumi poterit $= 0{,}0635\,a$, hincque sequitur

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUINQUE LENTIBUS COMPOSITI ET OMNIS FERE CONFUSIONIS EXPERTIS

195. Hic tres res pro lubitu assumi possunt

1. distantia obiecti $= a$,
2. multiplicatio $= m$,
3. distantia focalis quartae lentis $= s$.

I. Pro prima lente crystallina, cuius distantia focalis $p = -0{,}5000a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -0{,}2542\,a\\ \text{posterioris} & = +2{,}0602\,a,\end{cases}$$

aperturae semidiameter $x = 0{,}0635\,a$, qui etiam in duabus sequentibus locum habet, et distantia ad sequentem $= \frac{1}{14}a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis $q = 0{,}8095\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -0{,}6708\,a\\ \text{posterioris} & = +0{,}2617\,a,\end{cases}$$

distantia ad lentem tertiam $= \frac{1}{14}a$.

III. Pro tertia lente itidem coronaria, cuius distantia focalis $r = 0{,}8809\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 3{,}8857\,a\\ \text{posterioris} & = 0{,}5306\,a;\end{cases}$$

eius distantia ad lentem quartam $= \frac{37mas}{448} - \frac{1}{2}s$.

IV. Quartam lentem pro lubitu ex quovis vitri genere construere licet, cuius distantia focalis $= s$; tum erit eius distantia ad lentem ocularem $= \frac{2}{3}s$.

V. Ipsius lentis ocularis distantia focalis erit $= \frac{1}{3}s$ eaque pariter utrinque aeque convexa et distantia ad oculum usque $= \frac{1}{6}s$.

VI. Mensura claritatis erit $\frac{10}{m}$ et spatii in obiecto conspicui semidiameter $z = \frac{4a}{ma+8}$ dig.

SCHOLION 1

196. Si casum propositum ita immutemus, ut binae priores lentes sint concavae et ex vitro crystallino factae, tum simili modo solutionem adornando omnia eodem modo definientur, nisi quod nunc ambae litterae $\mathfrak{B}$ et B

debeant esse negativae; ac tum destructio alterius confusionis dabit hanc aequationem:

$$1 + A = \frac{7}{10} + \frac{3}{10\mathfrak{B}} \quad \text{seu} \quad A = -\frac{3}{10} + \frac{3}{10\mathfrak{B}};$$

unde, si sumatur $\mathfrak{B} = -2$ hincque $B = -\frac{2}{3}$, elicietur $A = -\frac{9}{20}$ ideoque $\mathfrak{A} = -\frac{9}{11}$, qui valores praebent distantias focales

$$p = -\frac{9}{11}a, \quad q = -\frac{9}{10P}\cdot a, \quad r = \frac{3}{10PQ}\cdot a,$$

ubi est

$$\frac{1}{P} = 1 + \frac{20}{11}\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{PQ} = 1 + \frac{50}{11}\zeta;$$

sumsimus autem $\mathfrak{C} = 1$ proxime, ut pro C numerus praemagnus prodeat et ponendo $ABC = \theta$ fiat $s = 2\theta\cdot\frac{h}{m}$ et ut ante $t = \frac{1}{3}s$ ultimumque intervallum $= 2t$. Duo priora vero intervalla erunt per hypothesin $= -\frac{9}{11}\zeta a$, intervallum vero tertium $= \theta a\left(\frac{1}{PQ} - \frac{h}{ma}\right)$.

Tum vero, ut etiam prior confusio evanescat, sequenti aequationi satisfieri oportebit:

$$0 = \lambda + \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A}) - \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{(1-\mathfrak{A})^3}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right),$$

quae fit substitutis valoribus

$$0 = \lambda - \frac{180\nu}{121} + \frac{8000}{1331P}\left(\frac{\lambda'}{8} - \frac{3\nu}{4}\right) - \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{30^3}{11^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right),$$

unde sequitur

$$1331\lambda + \frac{1000\lambda'}{P} = 1980\nu + \frac{6000\nu}{P} + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{27000}{PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right).$$

Si igitur hic capiatur $\lambda'' = 1$ et ponatur $\lambda' = \lambda$, ut scilicet pro utroque valor minimus reperiatur, habebitur ista aequatio:

$$\lambda\left(1331 + \frac{1000}{P}\right) = 1980\nu + \frac{6000\nu}{P} + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{27000}{PQ}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right),$$

unde facile patet valorem ipsius λ multo maiorem esse proditurum quam 12, unde constructio harum lentium admodum lubrica evaderet. Interim tamen

hunc casum diligentius evolvamus sumto $[\nu' = \frac{1}{5},\ C = 12,]\ \zeta = \frac{11}{80}$, ut fiat $\frac{1}{P} = \frac{5}{4}$ et $\frac{1}{PQ} = \frac{13}{8}$, quibus positis aequatio nostra ad hos numeros reducetur:

$$2581\,\lambda = 52888{,}492,$$

ita ut sit

$$\lambda = \frac{52888{,}5}{2581} = 20{,}492,$$

unde colligitur

$$\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 3{,}8742.$$

Hinc pro prima lente erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{p}{2{,}7620 - 3{,}8742}\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{p}{-1{,}0379 + 3{,}8742},\end{cases}$$

unde fit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -\dfrac{p}{1{,}1122} = +\,0{,}7356\,a\\[2ex] \text{posterioris} = +\dfrac{p}{2{,}8363} = -\,0{,}2885\,a.\end{cases}$$

Pro secunda lente

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{q}{0{,}5911} = -\,1{,}9032\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = \dfrac{q}{1{,}1330} = -\,0{,}9930\,a.\text{[1]}\end{cases}$$

Pro lente autem tertia ex vitro coronario erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{r}{\varrho} = \dfrac{r}{0{,}2267} = 2{,}1504\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{\sigma} = \dfrac{r}{1{,}6601} = 0{,}2937\,a\text{[2]});\end{cases}$$

---

1) Editio princeps: *radius faciei* $\begin{cases}\textit{anter.} = \cdots = -2{,}1147\cdot a\\ \textit{poster.} = \cdots = -1{,}1033\cdot a.\end{cases}$ Qui falsi valores evenerunt sumendo $q = -\frac{5}{4}\,a$ loco $q = -\frac{9\cdot 5}{10\cdot 4}\,a$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: *radius faciei* $\begin{cases}\textit{anter.} = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{r}{0{,}2338} = 2{,}0851\cdot a\\ \textit{poster.} = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{r}{1{,}6380} = 0{,}2949\cdot a.\end{cases}$ Ob $\mathfrak{C} = 1$ per hypothesin valores harum fractionum sunt $\frac{r}{\varrho}, \frac{r}{\sigma}$. Correxit E. Ch.

quae tres lentes cum communem circiter aperturam exigant, eius semidiameter sumi debebit $x = 0{,}0721\,a$, ex quo fit $y = \frac{0{,}5768}{m}$ dig. hincque mensura claritatis $= \frac{11{,}536}{m}$, quae ergo fere triplo maior est quam casu praecedentis problematis.

Hinc ergo deducitur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUINQUE LENTIBUS COMPOSITI

197. Hic scilicet primo datur distantia obiecti $= a$, deinde multiplicatio $= m$ ac tertio distantia focalis quartae lentis $= s$; unde fit

$$\theta = ABC = \frac{ms}{16}.$$

I. Pro prima lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p = -0{,}8182\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = +0{,}7356\,a \\ \text{posterioris} & = -0{,}2885\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $x = 0{,}0721\,a$, quae et pro binis sequentibus valet, et distantia ad secundam lentem $= 0{,}1125\,a$.

II. Pro secunda lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $q = -1{,}125\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -1{,}9032\,a \\ \text{posterioris} & = -0{,}9930\,a \end{cases}$$

eiusque distantia ad lentem tertiam $= 0{,}1125\,a$.

III. Pro lente tertia ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis $r = 0{,}4875\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 2{,}1504\,a \\ \text{posterioris} & = 0{,}2937\,a, \end{cases}$$

eius distantia ad lentem quartam

$$= \theta a \left(\frac{13}{8} - \frac{h}{ma}\right) = \frac{13mas}{128} - \frac{1}{2}s.$$

IV. Quartam lentem ex quovis vitro pro lubitu construere licet, cuius distantia focalis sit $= s$; tum erit eius distantia ad lentem ocularem $= \frac{2}{3}s$.

V. Ipsius autem lentis ocularis erit distantia focalis $= \frac{1}{3}s$ eiusque ad oculum distantia $= \frac{1}{6}s$.

VI. Mensura claritatis autem erit, ut vidimus, $\frac{11,536}{m}$ spatiique conspicui semidiameter ut hactenus $z = \frac{4a}{ma + 8}$ dig.

SCHOLION 2

198. Quanquam autem haec microscopia praecedentibus anteferenda videntur, tamen, uti iam innuimus, ea neutiquam commendare audemus, propterea quod eorum constructio summis difficultatibus est implicata, ut etiam a sollertissimo artifice exspectari nequeat; cuius rei causa manifesto in eo est posita, quod pro litteris λ et λ' tam grandem valorem invenimus, scilicet ad viginti assurgentem. Facile enim intelligitur, si iste valor fuisset unitate vel adeo binario maior vel minor, inde harum lentium constructionem non sensibiliter fuisse mutatam, unde vicissim colligitur, etiamsi hae lentes summo studio fuerint elaboratae, tum maxime probabile fore valorem litterae λ iis convenientem non solum unitate vel binario, sed etiam magis a 20 esse discrepaturum; quod si eveniat, confusio inde orta adeo multo erit maior, quam si lens obiectiva simplex adhiberetur; ex quo manifestum est perfectam destructionem confusionis posterioris nullo plane modo sperari posse; quare, cum adhuc, ante quam diversa vitri indoles erat comperta, hanc confusionis speciem tolerare sumus coacti et sola destructione marginis colorati contenti esse debuimus, nunc etiam eo facilius huic conditioni renunciare poterimus, cum vitrum crystallinum adhibendo saltem hanc confusionem quodammodo diminuere liceat, quem in finem exempla quaedam subiungamus, quae ad praxin facile accommodari posse videntur, cum pro litteris λ valores unitate non multo maiores requirant neque tamen a praescripta in problemate conditione multum abhorreant.

EXEMPLUM 1

199. In formulis supra inventis statuamus $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$ et $\mathfrak{B} = 2$ hincque $A = -\frac{1}{3}$ et $B = -2$ manente littera $\mathfrak{C}$ aliquantillum minore unitate, ut C

fiat numerus praemagnus. Tum igitur erit ex formulis superioribus

$$\frac{1}{P}=1+\frac{3}{2}\zeta, \quad \frac{1}{PQ}=1+\frac{9}{4}\zeta,$$

unde distantiae focales erunt

$$p=-\frac{1}{2}a, \qquad q=\frac{2}{3}a+\zeta a,$$

$$r=\frac{2}{3}\mathfrak{C}\left(1+\frac{9}{4}\zeta\right)a=\frac{2}{3}\mathfrak{C}a+\frac{3}{2}\mathfrak{C}\zeta a,$$

$$s=\frac{4}{3}C\cdot\frac{h}{m} \quad \text{et} \quad t=\frac{1}{3}s=\frac{4}{9}C\cdot\frac{h}{m}.$$

Ut igitur hinc prodeat $s=1$ dig. circiter casu $m=1000$, debet esse $C=100$ ideoque $\mathfrak{C}=\frac{100}{101}$. Intervalla vero lentium erunt

$$\text{primum et secundum} = -\zeta p=\frac{1}{2}\zeta a,$$

$$\text{tertium} = \frac{11\,mas}{128}-\frac{1}{2}s \quad \text{et} \quad \text{quartum} = \frac{2}{3}s.$$

Commode autem hic sumere poterimus $\zeta=\frac{1}{6}$, ut sit

$$\frac{1}{P}=\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{PQ}=\frac{11}{8}.$$

Tum vero primam lentem concavam ex vitro crystallino parari ponamus, quandoquidem hoc modo altera confusio saltem diminuetur, secundam vero et tertiam ex vitro coronario; atque nunc prior confusio ad nihilum redigetur, si fiat

$$8\lambda=6\nu+\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{5\cdot 27}{4}\left(\frac{\lambda'}{8}-\frac{\nu'}{4}\right)+\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{11\cdot 27}{8^2}\left(1{,}03\lambda''+\frac{\nu'}{100}\right)$$

sive

$$\lambda=\frac{3}{4}\nu+\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{135}{32}\left(\frac{\lambda'}{8}-\frac{\nu'}{4}\right)+\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{297}{512}\left(1{,}03\lambda''+\frac{\nu'}{100}\right).$$

Cum nunc sit

$$\mu=0{,}8724, \quad \nu=0{,}2529 \quad \text{et} \quad \mu'=0{,}9875, \quad \nu'=0{,}2196,$$

sumamus $\lambda'=\lambda''=1$ hincque fiet

$$\lambda = 0{,}1897 + \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{27}{512} \cdot 16{,}9622$$

seu

$$\lambda = 1{,}2022,$$

unde fit

$$\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}3946.$$

Ex quo sequitur:

Pro prima lente

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} = + \dfrac{p}{1{,}9087} = -\, 0{,}2620\, a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau \sqrt{(\lambda - 1)}} = - \dfrac{p}{0{,}1846} = +\, 2{,}7086\, a. \end{cases}$$

Pro secunda autem lente

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma - \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = - \dfrac{q}{1{,}2067} = -\, 0{,}6906\, a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho + \mathfrak{B}(\sigma - \varrho)} = + \dfrac{q}{3{,}0935} = +\, 0{,}2694\, a. \end{cases}$$

Pro tertia lente

erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{r}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{r}{0{,}2410} = 3{,}7656\, a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{r}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{r}{1{,}6458} = 0{,}5514\, a. \end{cases}$$

Pro harum igitur trium lentium apertura communi sumi poterit

$$x = 0{,}0655\, a,$$

unde fit

$$y = \frac{0{,}5240}{m}$$

hincque mensura claritatis fiet $= \frac{10{,}480}{m}$.

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUINQUE LENTIBUS COMPOSITI ET AD PRAXIN MAGIS ACCOMMODATI

200. Dantur hic distantia obiecti $= a$ et multiplicatio $= m$ et quartae lentis distantia focalis $= s$ hincque erit:

I. Pro prima lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p = -\frac{1}{2}a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}2620\,a \\ \text{posterioris} & = +2{,}7086\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= 0{,}0655\,a$

et distantia ad lentem secundam $= \frac{1}{12}a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis est $q = 0{,}8333\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}6906\,a \\ \text{posterioris} & = +0{,}2694\,a \end{cases}$$

eiusque distantia ad tertiam lentem $= \frac{1}{12}a$.

III. Pro tertia lente itidem ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis $r = 0{,}9075\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 3{,}7656\,a \\ \text{posterioris} & = 0{,}5514\,a \end{cases}$$

eiusque distantia a lente quarta $\frac{11mas}{128} - \frac{1}{2}s$.

IV. Perinde est, ex quonam vitri genere lens quarta conficiatur, eiusque distantia focalis arbitrio nostro permittitur, quae sit $= s$, dummodo haec lens sit utrinque aeque convexa, ut aperturam admittat, cuius semidiameter $= \frac{1}{4}s$;

eius vero a lente quinta distantia statuatur $= \frac{2}{3}s$.

V. Lens denique quinta seu ocularis habeat distantiam focalem $= \frac{1}{3}s$

et semidiametrum aperturae $= \frac{1}{12}s$,

siquidem est utrinque aequaliter convexa; tum vero distantia oculi erit $= \frac{1}{5}s$.

VI. Spatii in obiecto conspicui semidiameter erit ut hactenus $= \frac{4a}{ma+8}$.

Mensura vero claritatis erit $= \frac{10{,}480}{m}$.

EXEMPLUM 2

201. Statuatur hic $\mathfrak{A} = -1$ et $\mathfrak{B} = 2$ hincque $A = -\frac{1}{2}$ et $B = 2$ sumaturque $\zeta = \frac{1}{6}$ fietque

$$\frac{1}{P} = \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{PQ} = \frac{3}{2}.$$

Quare fient distantiae focales

$$p = -a, \quad q = \frac{4}{3}a, \quad r = \frac{3}{2}\mathfrak{C}a, \quad s = 2C\cdot\frac{h}{m}$$

ideoque vicissim

$$C = \frac{ms}{2h} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{3}s,$$

intervalla vero

$$\text{primum et secundum} = \frac{1}{6}a, \quad \text{tertium} = \frac{3mas}{32} - \frac{1}{2}s, \quad \text{quartum} = \frac{2}{3}s.$$

Iam ut confusio prior ad nihilum redigatur, satisfieri oportet huic aequationi:

$$\lambda = 2\nu + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{4}{3}(\lambda' - 2\nu') + \frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{3}{2}\left(1{,}03\,\lambda'' + \frac{\nu'}{100}\right).$$

Statuatur iterum $\lambda' = \lambda'' = 1$ et uti in praecedente exemplo calculo facto reperietur

$$\lambda = 0{,}5058 + \frac{\mu'}{\mu}\cdot 2{,}2960$$

seu $\lambda = 3{,}1047$; hinc ergo erit

$$\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}2731\,^{1)}.$$

Ex quo erit

Pro prima lente

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = +\dfrac{p}{1{,}7509} = -\;0{,}5711\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = -\dfrac{p}{0{,}0268} = +\,37{,}3134\,a.^{2)}\end{cases}$$

---

1) Editio princeps: $\lambda = 3{,}0047, \ldots . \tau\sqrt{\lambda - 1} = 1{,}2424$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: *radius faciei* $\begin{cases} \textit{anter.} = \cdots = \dfrac{p}{1{,}7816} = -\;0{,}5613\cdot a \\ \textit{poster.} = \cdots = \dfrac{p}{0{,}0575} = +\,17{,}3913\cdot a. \end{cases}$ Correxit E. Ch.

Pro secunda lente

erit uti in praecedente exemplo

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -\dfrac{q}{1,2067}\\[2ex] \text{posterioris} & = +\dfrac{q}{3,0935};\end{cases}$$

quare, cum hic sit $q = 1,3333\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -1,1049\,a\\ \text{posterioris} & = +0,4310\,a.\end{cases}$$

Simili modo quoque pro tertia lente erit ut ante

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = \dfrac{r}{0,2410}\\[2ex] \text{posterioris} & = \dfrac{r}{1,6458}.\end{cases}$$

Cum igitur hic $r = \frac{3}{2}\mathfrak{C}a = 1,4850\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 6,1618\,a\\ \text{posterioris} & = 0,9023\,a.\end{cases}$$

Pro communi ergo harum lentium apertura sumi poterit

$$x = 0,1077\,a,$$

unde fit

$$y = \frac{0,8616}{m}$$

et mensura claritatis $= \dfrac{17,232}{m}$.

Ex quibus oritur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUINQUE LENTIBUS COMPOSITI

202. Hic igitur dantur distantia obiecti $= a$, secundo multiplicatio $= m$ et tertio distantia focalis quartae lentis $= s$ eritque:

I. Pro prima lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p = -a$,

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\ 0{,}5711\, a \\ \text{posterioris} & = +\ 37{,}3134\, a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= 0{,}1077\, a$,

distantia ad lentem secundam $= \frac{1}{6} a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis $q = 1{,}3333\, a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\ 1{,}1049\, a \\ \text{posterioris} & = +\ 0{,}4310\, a \end{cases}$$

eiusque ad lentem tertiam distantia $= \frac{1}{6} a$.

III. Pro tertia lente itidem coronaria, cuius distantia focalis $r = 1{,}4850\, a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 6{,}1618\, a \\ \text{posterioris} & = 0{,}9023\, a \end{cases}$$

et distantia ad lentem quartam $= \frac{3mas}{32} - \frac{1}{2} s$.

IV. Perinde est, ex quonam vitri genere lens quarta paretur, eiusque distantia focalis in nostro arbitrio relinquitur, quae sit $= s$, modo sit utrinque aeque convexa; unde aperturam admittet, cuius semidiameter $= \frac{1}{4} s$;

eius vero a lente quinta intervallum $= \frac{2}{3} s$.

V. Lens denique quinta habeat distantiam focalem $= \frac{1}{3} s$ et aperturam, cuius semidiameter $= \frac{1}{12} s$, siquidem est utrinque aeque convexa, et distantia oculi $O = \frac{1}{6} s$.

VI. Spatii in obiecto conspicui semidiameter $= \frac{4a}{ma+8}$ et mensura claritatis $= \frac{17{,}232}{m}$.

COROLLARIUM

203. Hoc microscopium ob duplicem causam priori anteferendum videtur: 1. quod distantiae focales trium priorum lentium hic sint maiores quam ante respectu distantiae obiecti a; unde hoc commodum nascitur, quod,

etiamsi distantia obiecti a hic duplo minor capiatur quam ante, tamen istae lentes non evadant nimis exiguae; unde longitudo instrumenti fere ad semissem reduci potest; deinde etiam 2. hic mensura claritatis fere duplo maior est quam casu praecedente.

PROBLEMA 3

204. *Si loco lentis obiectivae quatuor lentes sibi proximae substituantur, quarum binae priores ex vitro crystallino, posteriores vero ex coronario sint factae, manentibus binis ultimis lentibus ut hactenus microscopium ita adornare, ut utraque confusio penitus tollatur.*

SOLUTIO

Cum hic occurrant quinque intervalla, quarum tria prima sint minima, litterae P, Q, R parum ab unitate recedent, littera T vero erit $=-1$, ita ut sit $PQRS=\frac{ma}{h}$. Litterarum vero A, B, C, D, E haec ultima E erit $=-\frac{2}{3}$ ob $\mathfrak{E}=-2$, ut scilicet campus fiat ut hactenus $z=\frac{4a}{ma+8}$. Iam spectetur distantia focalis quintae lentis

$$t=ABCD\mathfrak{E}\cdot\frac{h}{m}=-2ABCD\cdot\frac{h}{m};$$

quae ne nimis fiat exigua, posito $ABCD=-\theta$, ut sit $t=2\theta\cdot\frac{h}{m}$, numerus θ debet esse praemagnus. Nunc autem solutionem ita instruamus, ut litterae A, B, C, D ex calculo elidantur, huncque in finem statuamus brevitatis gratia

$$\frac{1}{P}=\alpha,\quad \frac{1}{PQ}=\beta,\quad \frac{1}{PQR}=\gamma;$$

quae ergo litterae α, β, γ ab unitate non multum discrepabunt, ubi probe notetur has litteras cum iis, quae supra sunt usurpatae, confundi non debere. Cum iam distantiae focales quatuor priorum lentium sint

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=-\alpha A\mathfrak{B}a,\quad r=\beta AB\mathfrak{C}a,\quad s=-\gamma ABC\mathfrak{D}a,$$

unde colligitur

$$\frac{a}{p}=\frac{1}{\mathfrak{A}}=1+\frac{1}{A}, \quad \frac{\alpha a}{q}=-\frac{1}{A\mathfrak{B}}=-\frac{1}{A}-\frac{1}{AB},$$

$$\frac{\beta a}{r}=\frac{1}{AB\mathfrak{C}}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}, \quad \frac{\gamma a}{s}=-\frac{1}{ABC\mathfrak{D}}=-\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD},$$

manifestum ergo est fore

$$\frac{1}{p}\cdot a+\frac{\alpha}{q}\cdot a+\frac{\beta}{r}\cdot a+\frac{\gamma}{s}\cdot a=1-\frac{1}{ABCD}=1+\frac{1}{\theta}.$$

Cum ergo θ sit numerus praemagnus, proxime esse oportet

$$\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{q}+\frac{\beta}{r}+\frac{\gamma}{s}=\frac{1}{a},$$

quae est prima aequatio probe notanda. Secundam aequationem nobis suppeditabit destructio posterioris confusionis [§ 27], quae, si brevitatis gratia loco fractionis $\frac{10}{7}$ seu quaecunque alia experientiae fuerit consentanea scribatur ζ, hoc modo exprimetur:

$$0=\frac{\zeta}{p}+\frac{\zeta\alpha^2}{q}+\frac{\beta^2}{r}+\frac{\gamma^2}{s}.$$

Tertia vero aequatio ex destructione confusionis prioris [§ 31] est petenda; ubi cum expediat, ut litterae λ, λ', λ'', λ''' non multum unitatem superent earumque valores ob litteras ν, ν' etc. parum adficiantur simulque, ut vidimus, litterae μ et μ' parum discrepent, neglectis terminis a ν pendentibus statuamus $\lambda=\lambda'=\lambda''=\lambda'''=1$ ac tertia nostra aequatio sequentem induet formam:

$$\frac{1}{p^3}+\frac{\alpha^4}{q^3}+\frac{\beta^4}{r^3}+\frac{\gamma^4}{s^3}=0;$$

atque nunc totum negotium eo est reductum, ut his tribus aequationibus satisfiat, ubi quidem est notandum primae aequationi satis adcurate satisfieri debere, pro duabus posterioribus autem sufficere, si iis propemodum fuerit satisfactum; quae resolutio quo facilius instituatur, ponamus porro

$$\frac{1}{p}=\frac{z}{a}, \quad \frac{\alpha}{q}=\frac{y}{a}, \quad \frac{\beta}{r}=\frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{s}=\frac{v}{a},$$

ut tres nostrae aequationes prodeant

$$\text{I.} \quad z+y+x+v=1,$$

$$\text{II.} \quad \zeta z+\zeta\alpha y+\beta x+\gamma v=0,$$

$$\text{III.} \quad z^3+\alpha y^3+\beta x^3+\gamma v^3=0,$$

in quibus duabus posterioribus litterae α, β et γ sine notabili errore pro unitate haberi poterunt. Statuamus nunc, quo resolutio planior reddatur,

$$z = f + g, \quad y = f - g, \quad x = h + k, \quad v = h - k,$$

et tres nostrae aequationes abibunt in has:

$$\text{I. } f + h = \frac{1}{2},$$

$$\text{II. } \zeta f + h = 0,$$

$$\text{III. } f(f^2 + 3g^2) + h(h^2 + 3k^2) = 0.$$

Ex duabus prioribus colligimus

$$f = \frac{1}{2(1-\zeta)}, \quad h = \frac{\zeta}{2(\zeta - 1)},$$

et quia proxime $\zeta = \frac{3}{2}$, iam habemus hos duos valores:

$$f = -1 \quad \text{et} \quad h = \frac{3}{2};$$

qui in tertia substituti dabunt

$$-1 - 3g^2 + \frac{27}{8} + \frac{9}{2}k^2 = 0;$$

unde concluditur

$$g = \sqrt{\frac{3}{2}k^2 + \frac{19}{24}},$$

ubi nihil impedit, quominus k statuatur $= 0$; interim tamen, quia ob litteras β et γ posterior pars $h(h^2 + 3k^2)$ aliquantum augetur eaque etiam tam ob terminos littera ν adfectos aliquod incrementum capit quam ideo, quod haec pars insuper per $\frac{\mu'}{\mu}$ multiplicari debet, quae fractio unitate est maior, manifestum est sumi debere $g > \sqrt{\frac{19}{24}}$. Convenientissime ergo sumetur $g = 1$; tum vero erit

$$z = 0, \quad y = -2, \quad x = v = h$$

hincque

$$p = \infty, \quad q = -\frac{\alpha a}{2}, \quad r = \frac{2}{3}\beta a \quad \text{et} \quad s = \frac{2}{3}\gamma a.$$

Cum igitur hic primae lentis distantia focalis fiat infinita, idem est ac si haec prima lens penitus tolleretur locoque obiectivae tantum tres lentes substituerentur, quarum sola prima ex vitro crystallino sit paranda; et quia hic fit $\alpha = 1$ et $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$, idem plane hic habetur casus, quem iam supra in problemate 2 evolvimus, ita ut superfluum foret hoc problema ulterius prosequi.

SCHOLION

205. Hoc igitur problema ideo potissimum est notatu dignum, quod hic singulari prorsus methodo sumus usi eius solutionem investigandi, quae in aliis occasionibus insignem usum afferre posse videtur, ex quo etiam perspicuum est ne opus quidem esse quicquam insuper ad hoc caput adiicere.

CAPUT IV

DE ULTERIORI AMPLIFICATIONE CAMPI HUIC MICROSCOPIORUM GENERI CONCILIANDI

PROBLEMA 1

206. *Cuiuscunque indolis fuerit lens obiectiva, post imaginem realem duas adhuc lentes ita disponere, ut margine colorato evanescente campus maximus evadat.*

SOLUTIO

Quemadmodum in superiori capite vidimus naturam lentis obiectivae, sive sit simplex sive multiplicata, nihil in lentibus posterioribus mutare, ita vicissim multiplicatio lentium posteriorum neutiquam lentem obiectivam adficiet; quamobrem considerabimus hic lentem obiectivam ut simplicem, quandoquidem determinationes, quas inveniemus, aeque ad omnes multiplicatas quoque erunt accommodatae. Cum igitur iam habeantur tria intervalla, litterarum P, Q, R secunda erit negativa hincque ponatur $Q = -k$, ut sit $PkR = \frac{ma}{h}$; distantiae igitur focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{Pk}\cdot a \quad \text{et} \quad s = +ABC\cdot\frac{h}{m};$$

unde concluditur fore $\mathfrak{C} > 1$, hinc $C < 0$. Tum vero intervalla erunt

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right),$$

$$\text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Pk}\right),$$

$$\text{tertium} = ABCa\left(-\frac{1}{Pk} + \frac{h}{ma}\right);$$

unde sequitur $R<1$. Cum porro pro campo apparente sit

$$z=\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{ma+h}\cdot ah\xi,$$

ut campus fiat maximus, debet esse $\mathfrak{q}=1$, $\mathfrak{r}=1$ et $\mathfrak{s}=1$, ut fiat

$$z=\frac{3ah}{ma+h}\cdot\xi,$$

ex quo erit

$$M=\frac{3h}{ma+h};$$

hincque aequationes fundamentales

$$1.\quad -\mathfrak{B}=(P-1)M=\frac{3h(P-1)}{ma+h},$$

$$2.\quad \mathfrak{C}=(Pk+1)M-1.$$

Pro loco oculi vero distantia

$$O=\frac{\mathfrak{s}s}{Ma}\cdot\frac{h}{m}=\frac{s}{Ma}\cdot\frac{h}{m}=\frac{1}{3}s\left(1+\frac{h}{ma}\right).$$

Margo autem coloratus destruetur ope huius aequationis [§ 23]:

$$0=\frac{1}{P}-\frac{1}{Pk}-\frac{1}{PkR},$$

unde invenitur

$$k=1+\frac{1}{R}.$$

Quia vero debet esse $R<1$, statuamus $R=\frac{1}{2}$ fietque

$$k=3\quad\text{et}\quad PkR=\frac{3}{2}P=\frac{ma}{h},$$

ita ut sit

$$P=\frac{2ma}{3h}\quad\text{et}\quad Pk=\frac{2ma}{h},$$

ex quo concluditur

$$\mathfrak{C}=\left(\frac{2ma+h}{h}\right)M-1$$

seu

$$\mathfrak{C}=\frac{6ma+3h}{ma+h}-1=\frac{5ma+2h}{ma+h};$$

pro magnis igitur multiplicationibus erit $\mathfrak{C} = 5$ hincque $C = -\frac{5}{4}$. Ex priore vero aequatione prodit

$$\mathfrak{B} = \left(\frac{3h - 2ma}{3h}\right) M = \frac{3h - 2ma}{ma + h}$$

et pro magnis multiplicationibus

$$\mathfrak{B} = -2 \quad \text{et} \quad B = -\frac{2}{3}.$$

Statuamus igitur

$$\mathfrak{B} = -2, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad \mathfrak{C} = 5 \quad \text{et} \quad C = -\frac{5}{4},$$

dum est, ut vidimus,

$$P = \frac{2ma}{3h}, \quad k = 3 \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{2},$$

fientque distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{3Ah}{m}, \quad r = \frac{5Ah}{3m} \quad \text{et} \quad s = \frac{5Ah}{6m} = \frac{1}{2}r$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{3h}{2ma}\right), \quad \text{secundum} = \frac{4Ah}{3m}, \quad \text{tertium} = \frac{5Ah}{12m}.$$

Ne igitur distantiae focales posteriorum lentium fiant nimis parvae, necesse est, ut A sit numerus praemagnus ideoque $\mathfrak{A} = 1$ proxime, unde patet has determinationes lentem obiectivam non adficere et perinde valere, utcunque lens obiectiva fuerit comparata; quamobrem iam conveniet loco litterae A distantiam focalem q in computum introducere, ut sit $A = \frac{mq}{3h}$, sicque fient distantiae focales sequentium lentium

$$r = \frac{5q}{9} \quad \text{et} \quad s = \frac{5q}{18}$$

et intervalla erunt

$$\text{primum} = \frac{mqa}{3h}\left(1 - \frac{3h}{2ma}\right) = \frac{maq}{3h} - \frac{1}{2}q, \quad \text{secundum} = \frac{4q}{9}, \quad \text{tertium} = \frac{5q}{36}$$

et distantia oculi proxime

$$O = \frac{1}{3}s = \frac{5q}{54}.$$

In omnibus igitur casibus antea tractatis loco binarum lentium posteriorum adhibere licebit has ternas lentes, dummodo intervalla hic indicata observentur, hocque modo id lucri nascetur, quod campus apparens augeatur in ratione 2 : 3, siquidem hic est

$$z = \frac{3ah}{ma+h} \cdot \xi.$$

COROLLARIUM 1

207. Cum littera R arbitrio nostro permittatur, dummodo sit unitate minor, ponamus $R = \frac{2}{3}$ eritque $k = \frac{5}{2}$ et ob $PkR = \frac{ma}{h}$ erit

$$Pk = \frac{3ma}{2h} \quad \text{et} \quad P = \frac{3ma}{5h};$$

unde sequitur

$$\mathfrak{C} = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = -\frac{9}{5}$$

hincque

$$C = -\frac{7}{5} \quad \text{et} \quad B = -\frac{9}{14}.$$

COROLLARIUM 2

208. Hoc ergo casu $R = \frac{2}{3}$ fiet $q = \frac{3Ah}{m}$ hincque vicissim $A = \frac{mq}{3h}$, unde sequentes distantiae focales fient:

$$r = \frac{3Ah}{2m} = \frac{1}{2}q \quad \text{et} \quad s = \frac{3}{5}r = \frac{3}{10}q$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{maq}{3h} - \frac{5}{9}q, \quad \text{secundum} = \frac{1}{2}q \quad \text{et} \quad \text{tertium} = \frac{1}{3}s = \frac{1}{10}q.$$

SCHOLION

209. Hic scilicet litteris $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ ex aequationibus fundamentalibus eos valores tribuimus, quos obtinerent, si multiplicatio m revera esset infinite magna, neque vero hinc nostra solutio erroris redargui potest, nequidem pro minoribus multiplicationibus; dum enim hoc modo a veris harum litterarum valoribus recedimus, nihil aliud inde est metuendum, nisi quod campus apparens non tantus sit proditurus, quam hic supposuimus; quod vitium facile

est condonandum, praecipue quoniam pro maioribus multiplicationibus nequidem fiet sensibile, quemadmodum iam supra observavimus; quando autem in his determinationibus litteram m quasi infinitam spectamus, quoniam P eam quoque involvit ob $M=\frac{3h}{ma}$ in eadem scilicet hypothesi, habebimus in genere

$$\mathfrak{B}=-\frac{3h}{ma}\cdot P \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}=\frac{3h}{ma}\cdot Pk-1;$$

ubi probe notandum est hanc hypothesin $m=\infty$ tantum in his valoribus adhiberi; deinde litteram A, qua numerus praemagnus indicatur, ex calculo extrusimus eiusque loco distantiam focalem q introduximus, ita ut sit $A=\frac{mq}{3h}$, unde in genere reliquae erunt

$$r=\frac{(B+1)\mathfrak{C}q}{k} \quad \text{et} \quad s=-\frac{(C+1)Pkhr}{ma}=-\frac{(B+1)CPhq}{ma}.$$

Tum vero etiam intervalla lentium

$$\text{primum}=\frac{maq}{3h}-\frac{maq}{3hP},$$

$$\text{secundum}=(B+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)q=\frac{(k+1)}{\mathfrak{C}}\cdot r,$$

$$\text{tertium}=\left(1-\frac{ma}{Pkh}\right)s=(1-R)s.$$

Cum autem sit $P=\frac{ma}{hkR}$, valores hic assignati sequenti modo multo concinnius exprimentur:

$$\mathfrak{B}=-\frac{3}{kR},\quad \mathfrak{C}=\frac{3}{R}-1,\quad B=-\frac{3}{3+kR},\quad C=-\frac{3-R}{3-2R}.$$

Deinde distantiae focales

$$r=\frac{3-R}{3+kR}\cdot q,\quad s=\frac{(3-R)q}{(3+kR)(3-2R)} \quad \text{seu} \quad s=\frac{r}{3-2R}$$

ac denique intervalla

$$\text{primum}=\frac{maq}{3h}-\frac{kRq}{3},\quad \text{secundum}=\frac{R(k+1)r}{3-R},\quad \text{tertium}=(1-R)s$$

existente distantia oculi proxime $O=\frac{1}{3}s$.

Hactenus autem nondum rationem habuimus marginis colorati, cuius destructio postulat

$$k = 1 + \frac{1}{R},$$

unde formulae inventae in sequentes abibunt:

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{R+1}, \quad \mathfrak{C} = \frac{3}{R} - 1, \quad B = -\frac{3}{R+4}, \quad C = -\frac{3-R}{3-2R},$$

$$r = \frac{3-R}{4+R} \cdot q, \quad s = \frac{r}{3-2R} = \frac{(3-R)q}{(3-2R)(4+R)}$$

et intervalla

$$\text{primum} = \frac{maq}{3h} - \frac{(R+1)}{3} \cdot q,$$

$$\text{secundum} = \frac{(2R+1)r}{3-R} = \frac{2R+1}{4+R} \cdot q,$$

$$\text{tertium} = (1-R)s.$$

Has igitur determinationes cum singulis microscopiorum speciebus, quas in praecedentibus capitibus descripsimus, combinare licebit sicque obtinebitur sequens

CONSTRUCTIO GENERALIS MICROSCOPIORUM HUIUS GENERIS QUA EORUM CAMPUS IN RATIONE SESQUIALTERA AUGETUR

210. Hic iterum distantia obiecti a pro lubitu assumi potest perinde ac multiplicatio m; tum vero etiam distantia focalis q arbitrio nostro permittitur, quam tantam assumi convenit, ut postrema lens ocularis non fiat nimis parva; praeterea vero quoque fractio R ab arbitrio nostro pendet, dummodo ea unitate sit minor; hic autem accipiamus $R = \frac{1}{2}$, qui valor ad praxin maxime accommodatus videtur.

I. Sive lens obiectiva revera sit simplex sive ex duabus pluribusve lentibus proxime sibi iunctis composita, ea hic ut unica spectetur, ita ut eius loco omnes constructiones in superioribus capitibus datae substitui possint, atque inde dabitur eius aperturae semidiameter $= x$; tum vero eius a secunda lente distantia erit $= \frac{maq}{3h} - \frac{1}{2}q$; quod autem intervallum ob indolem lentis obiectivae aliquantum immutari potest, cuius tamen ratio in praxi non attendi meretur.

II. Pro secunda lente notandum est eam aeque ac sequentes ex quovis vitri genere parari posse, dummodo sint utrinque aequaliter convexae, ut ipsis maxima apertura tribui possit. Sit igitur secundae lentis distantia focalis $= q$ eritque distantia ad lentem tertiam $= \frac{4}{9}q$.

III. Pro tertia lente eius distantia focalis capiatur $r = \frac{5}{9}q$ et distantia ad quartam lentem $= \frac{5}{36}q$.

IV. Pro quarta lente eius distantia focalis capiatur $s = \frac{5}{18}q$ et distantia ad oculum $O = \frac{1}{3}s$ proxime.

V. Nunc autem spatii in obiecto conspicui erit semidiameter

$$z = \frac{3ah}{ma + h} \cdot \xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{ah}{ma + h}$$

et mensura claritatis eadem manebit ut ante, scilicet $= 20 \cdot \frac{hx}{ma}$, dum nempe mensurae in digitis exprimuntur.

COROLLARIUM

211. Si ergo nolimus, ut lens ocularis minor fiat quam $\frac{1}{3}$ dig., posito $s = \frac{1}{3}$ dig. sumi debebit $q = \frac{6}{5}$ dig. hincque intervallum primum

$$= \frac{2ma}{5h} - \frac{3}{5} \text{ dig.};$$

at si in superioribus lens ocularis etiam statuatur $= \frac{1}{3}$ dig., penultima fit 1 dig. et idem intervallum prodit circiter; unde patet praesenti casu longitudinem instrumenti notabiliter fore minorem.

PROBLEMA 2

212. *Cuiuscunque indolis fuerit lens obiectiva, post imaginem realem tres adhuc lentes ita disponere, ut margine colorato evanescente campus evadat maximus.*

SOLUTIO

Cum hic habeantur quatuor intervalla, litterarum P, Q, R, S secunda iterum erit negativa sitque ergo $Q = -k$, ut fiat $PkRS = \frac{ma}{h}$. Distantiae

ergo focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}a}{Pk}, \quad s = \frac{ABC\mathfrak{D}a}{PkR},$$

$$t = -ABCD\cdot\frac{h}{m} = -\frac{ABCDa}{PkRS};$$

unde, si loco A littera q in calculum introducatur, ob $A = -\frac{Pq}{\mathfrak{B}a}$ erit

$$r = \frac{B\mathfrak{C}q}{\mathfrak{B}k}, \quad s = -\frac{BC\mathfrak{D}q}{\mathfrak{B}kR}, \quad t = \frac{BCDq}{\mathfrak{B}kRS}.$$

Simili modo intervalla lentium per q ita reperientur expressa:

$$\text{primum} = -\frac{Pq}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{B}}\cdot q, \quad \text{secundum} = \frac{B}{\mathfrak{B}}\left(1 + \frac{1}{k}\right)q,$$

$$\text{tertium} = \frac{BC}{\mathfrak{B}k}\left(1 - \frac{1}{R}\right)q, \quad \text{quartum} = -\frac{BCD}{\mathfrak{B}kR}\left(1 - \frac{1}{S}\right)q.$$

Iam ut campus apparens prodeat maximus, statuantur litterae $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = \mathfrak{s} = \mathfrak{t} = 1$, ut fiat $M = \frac{4h}{ma + h}$ campi semidiametro existente

$$z = Ma\xi = \frac{4ah}{ma + h}\cdot\xi = \frac{ah}{ma + h}$$

sumto $\xi = \frac{1}{4}$; qui ergo campus quasi fit quadruplicatus, dum in problemate praecedente erat triplicatus, antea vero tantum duplicatus. Hinc ergo aequationes fundamentales dabunt

$$\mathfrak{B} = (1 - P)M, \quad \mathfrak{C} = (1 + Pk)M - 1, \quad \mathfrak{D} = (1 + PkR)M - 2.$$

Cum autem sufficiat his formulis proxime satisfecisse, quia parum interest, etiamsi campus aliquantum fiat minor, spectemus multiplicationem m cum numero P quasi infinitam ac tum istae litterae concinnius ita exprimentur ob $M = \frac{4h}{ma}$:

$$\mathfrak{B} = -\frac{4hP}{ma} \quad \text{adeoque} \quad \frac{\mathfrak{B}}{P} = -\frac{4h}{ma},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{4hPk}{ma} - 1, \quad \mathfrak{D} = \frac{4hPkR}{ma} - 2;$$

et cum sit $P = \frac{ma}{hkRS}$, hae expressiones etiam commodius ita exprimentur:

$$\mathfrak{B} = -\frac{4}{kRS}, \quad \mathfrak{C} = \frac{4}{RS} - 1, \quad \mathfrak{D} = \frac{4}{S} - 2.$$

At ob conditionem, qua margo coloratus destrui debet, habebimus istam aequationem:

$$0 = \frac{1}{P} - \frac{1}{Pk} - \frac{1}{PkR} - \frac{1}{PkRS},$$

ex qua nascitur

$$k = 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{RS},$$

ita ut litterae R et S arbitrio nostro permittantur. Cum autem bina ultima intervalla fiant certe satis exigua, litterae R et S parum ab unitate discrepare possunt; unde litterae $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ manifesto fient unitate maiores hincque C et D negativae, dum e contrario littera $\mathfrak{B}$ ipsa ac propterea etiam B sunt negativae; quare, ut nostra intervalla lentium fiant positiva, evidens est esse debere $S < 1$ et $R < 1$; qua conditione observata nunc omnia momenta facile determinari poterunt.

COROLLARIUM 1

213. Cum igitur tam R quam S sint fractiones unitate minores, litterae k valor certe ternarium superabit, quoniam

$$\frac{1}{R} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{RS} > \frac{1}{R}.$$

COROLLARIUM 2

214. Cum sit

$$\frac{P}{\mathfrak{B}} = -\frac{ma}{4h},$$

erit primum intervallum

$$= \frac{maq}{4h} - \frac{kRS}{4} \cdot q,$$

cuius pars prior $\frac{maq}{4h}$ minor est quam casu praecedentis problematis, ita ut hic longitudo instrumenti adhuc minor sit proditura.

COROLLARIUM 3

215. Has ergo quaternas lentes etiam cum omnibus lentibus obiectivis sive simplicibus sive compositis, quas supra descripsimus, combinare licebit; unde hoc insigne commodum assequemur, ut campus apparens prodeat quadruplicatus, cum in praecedentibus tantum esset duplicatus.

EXEMPLUM 1

216. Cum litterae R et S debeant esse unitate minores, consideremus casum quasi simplicissimum et ponamus $R=\frac{1}{2}$ et $S=\frac{2}{3}$, ut fiat $RS=\frac{1}{3}$ hincque

$$k=1+2+3=6;$$

ex his igitur valoribus, qui ad praxin satis accommodati videntur, colliguntur litterae

$$\mathfrak{B}=-2,\quad \mathfrak{C}=11,\quad \mathfrak{D}=4,\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=-\frac{11}{10},\quad D=-\frac{4}{3};$$

deinde ex distantia focali q sequentes ita definientur:

$$r=\frac{11}{18}q,\quad s=\frac{22}{45}q,\quad t=\frac{11}{45}q=\frac{1}{2}s;$$

denique vero intervalla lentium

$$\text{primum}=\frac{maq}{4h}-\frac{1}{2}q,\quad \text{secundum}=\frac{7}{18}q,\quad \text{tertium}=\frac{11}{180}q=\frac{1}{4}t,$$

$$\text{quartum}=\frac{11}{135}q.$$

EXEMPLUM 2

217. Statuamus nunc tam $R=\frac{1}{2}$ quam $S=\frac{1}{2}$ ac prodibit

$$k=1+2+4=7$$

eritque

$$\mathfrak{B}=-\frac{16}{7},\quad \mathfrak{C}=15,\quad \mathfrak{D}=6,\quad B=-\frac{16}{23},\quad C=-\frac{15}{14},\quad D=-\frac{6}{5}$$

et distantiae focales ita per q exprimentur:

$$r = \frac{15}{23}q, \qquad s = \frac{90}{161}q, \qquad t = \frac{36}{161}q$$

et intervalla

$$\text{primum} = \frac{maq}{4h} - \frac{7}{16}q, \quad \text{secundum} = \frac{8}{23}q, \quad \text{tertium} = \frac{15}{322}q,$$

$$\text{quartum} = \frac{18}{161}q.$$

Quod tandem ad locum oculi attinet, hic in genere erit

$$O = \frac{1}{4}t\left(1 + \frac{h}{ma}\right) = \frac{1}{4}t \text{ proxime.}$$

PROBLEMA 3

218. *Cuiuscunque indolis fuerit lens obiectiva, post imaginem realem quotcunque adhuc lentes, quarum numerus sit $= i$, ita disponere, ut evanescente margine colorato campus maximus evadat.*

SOLUTIO

Si operatio instituatur ut in problematibus antecedentibus, erit semper $Q = -k$ litterarumque sequentium R, S, T etc. numerus erit $i-1$ sitque ultima $= Z$; tum vero pro campo hic habebitur

$$M = \frac{(i+1)h}{ma+h}$$

ideoque

$$z = \frac{(i+1)ah}{ma+h}\cdot\xi.$$

Quodsi deinde etiam ut ante pro determinatione litterarum $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ multiplicationem m cum numero P ut infinite magnam consideremus, reperiemus

$$\mathfrak{B} = -\frac{(i+1)hP}{ma}, \quad \mathfrak{C} = \frac{(i+1)hPk}{ma} - 1,$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(i+1)hPkR}{ma} - 2, \quad \mathfrak{E} = \frac{(i+1)hPkRS}{ma} - 3 \quad \text{etc.}$$

Destructio vero marginis colorati dabit

$$k = 1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{RS} + \frac{1}{RST} \cdots \frac{1}{RST..Z},$$

quorum terminorum numerus est i.

Nunc vero has litteras ita definiamus, ut fiat

$$\frac{1}{R} = 2, \quad \frac{1}{RS} = 3, \quad \frac{1}{RST} = 4, \quad \frac{1}{RSTU} = 5$$

atque ultimus

$$\frac{1}{RSTU..Z} = i$$

ideoque

$$R = \frac{1}{2}, \quad S = \frac{2}{3}, \quad T = \frac{3}{4}, \quad U = \frac{4}{5} \cdots \text{ ac tandem } \quad Z = \frac{i-1}{i}.$$

Cum igitur hinc prodeat

$$k = 1 + 2 + 3 \cdots + i,$$

hoc est

$$k = \frac{i(i+1)}{2},$$

et cum sit $RST \ldots Z = \frac{1}{i}$, erit

$$kRS \ldots Z = \frac{i+1}{2}$$

hincque

$$P = \frac{2ma}{(i+1)h} \quad \text{seu} \quad \frac{1}{P} = \frac{(i+1)h}{2ma}$$

et hinc porro

$$\frac{1}{Pk} = \frac{h}{ima}, \quad \frac{1}{PkR} = \frac{2h}{ima}, \quad \frac{1}{PkRS} = \frac{3h}{ima}, \quad \frac{1}{PkRST} = \frac{4h}{ima} \quad \text{etc.},$$

donec perveniatur ad

$$\frac{1}{PkRST..Z} = \frac{h}{ma}.$$

Iam ex his formulis litterae nostrae germanicae $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. reperiuntur

$$\mathfrak{B} = -2, \quad \mathfrak{C} = i^2 + i - 1, \quad \mathfrak{D} = \frac{i^2+i-4}{2}, \quad \mathfrak{E} = \frac{i^2+i-9}{3}, \quad \mathfrak{F} = \frac{i^2+i-16}{4} \quad \text{etc.},$$

donec ultimus $\mathfrak{Z}$ fiat $= 1$ [hincque]

$$B = -\frac{2}{3}, \quad C = \frac{i^2+i-1}{2-i-i^2}, \quad D = \frac{i^2+i-4}{6-i-i^2}, \quad E = \frac{i^2+i-9}{12-i-i^2}, \quad F = \frac{i^2+i-16}{20-i-i^2} \quad \text{etc.}$$

Ex his igitur valoribus poterimus distantias focales omnium lentium post secundam per huius ipsius distantiam focalem q definire, quod facile praestabitur sequenti modo:

$$\frac{r}{q}=\frac{B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}k}=\frac{2}{3}\cdot\frac{i^2+i-1}{i^2+i},\quad \text{ergo}\quad r=\frac{2}{3}\cdot\frac{i^2+i-1}{i^2+i}\cdot q,$$

$$\frac{s}{r}=-\frac{C\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}R}=\frac{i^2+i-4}{i^2+i-2},\quad \text{ergo}\quad s=\frac{i^2+i-4}{i^2+i-2}\cdot r,$$

$$\frac{t}{s}=-\frac{D\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}S}=\frac{i^2+i-9}{i^2+i-6},\quad \text{ergo}\quad t=\frac{i^2+i-9}{i^2+i-6}\cdot s,$$

$$\frac{u}{t}=-\frac{E\mathfrak{F}}{\mathfrak{E}T}=\frac{i^2+i-16}{i^2+i-12},\quad \text{ergo}\quad u=\frac{i^2+i-16}{i^2+i-12}\cdot t$$

sicque ulterius

$$v=\frac{i^2+i-25}{i^2+i-20}\cdot u,\qquad w=\frac{i^2+i-36}{i^2+i-30}\cdot v\quad \text{etc.}$$

Lentium intervalla denique ita determinabuntur:

$$\text{primum}=-\frac{1}{\mathfrak{B}}(P-1)q=\frac{maq}{(i+1)h}-\frac{1}{2}q,$$

$$\text{secundum}=\frac{1}{2}\cdot\frac{i^2+i+2}{i^2+i-1}\cdot r,$$

$$\text{tertium}=-\frac{s}{\mathfrak{D}}(R-1)=\frac{1}{i^2+i-4}\cdot s,$$

$$\text{quartum}=-\frac{t}{\mathfrak{E}}(S-1)=\frac{1}{i^2+i-9}\cdot t,$$

$$\text{quintum}=-\frac{u}{\mathfrak{F}}(T-1)=\frac{1}{i^2+i-16}\cdot u,$$

$$\text{sextum}=-\frac{v}{\mathfrak{G}}(U-1)=\frac{1}{i^2+i-25}\cdot v\quad \text{etc.}$$

COROLLARIUM 1

219. Si igitur sit $i=1$, ut lens unica post imaginem realem reperiatur, erit $r=\frac{1}{3}q$ et intervalla

$$\text{primum}=\frac{maq}{2h}-\frac{1}{2}q,\quad \text{secundum}=2r$$

et

$$O=\frac{1}{2}r\left(1+\frac{h}{ma}\right).$$

COROLLARIUM 2

220. Si $i=2$, ut sint duae lentes post imaginem realem, earum distantiae focales erunt

$$r=\frac{5}{9}q \quad \text{et} \quad s=\frac{1}{2}r=\frac{5}{18}q,$$

tum vero intervalla

$$\text{primum} =\frac{maq}{3h}-\frac{1}{2}q, \quad \text{secundum} =\frac{4}{5}r=\frac{4}{9}q, \quad \text{tertium} =\frac{1}{2}s=\frac{5}{36}q$$

et

$$O=\frac{1}{3}s\left(1+\frac{h}{ma}\right).$$

COROLLARIUM 3

221. Si sit $i=3$, ut tres lentes post imaginem realem reperiantur, erit

$$r=\frac{11}{18}q, \quad s=\frac{4}{5}r=\frac{22}{45}q, \quad t=\frac{1}{2}s=\frac{11}{45}q;$$

tum vero intervalla

$$\text{primum} =\frac{maq}{4h}-\frac{1}{2}q, \quad \text{secundum} =\frac{7}{11}r=\frac{7}{18}q,$$

$$\text{tertium} =\frac{1}{8}s=\frac{11}{180}q, \quad \text{quartum} =\frac{1}{3}t=\frac{11}{135}q.$$

Pro loco denique oculi

$$O=\frac{1}{4}t\left(1+\frac{h}{ma}\right).$$

COROLLARIUM 4

222. Si sit $i=4$, ut quatuor lentes post imaginem realem reperiantur, earum distantiae focales erunt

$$r=\frac{19}{30}q, \quad s=\frac{8}{9}r=\frac{76}{135}q, \quad t=\frac{11}{14}s=\frac{418}{945}q, \quad u=\frac{1}{2}t=\frac{209}{945}q;$$

tum vero intervalla erunt

$$\text{primum } = \frac{maq}{5h} - \frac{1}{2}q, \quad \text{secundum } = \frac{11}{19}r = \frac{11}{30}q, \quad \text{tertium } = \frac{1}{16}s = \frac{19}{540}q,$$

$$\text{quartum } = \frac{1}{11}t = \frac{38}{945}q, \quad \text{quintum } = \frac{1}{4}u = \frac{209}{3780}q$$

et pro loco oculi

$$O = \frac{1}{5}u\left(1 + \frac{h}{ma}\right).$$

COROLLARIUM 5

223. Si sit $i = 5$, ut quinque lentes post imaginem realem disponantur, erit

$$r = \frac{29}{45}q, \quad s = \frac{13}{14}r = \frac{13 \cdot 29}{14 \cdot 45}q, \quad t = \frac{7}{8}s = \frac{7 \cdot 13 \cdot 29}{8 \cdot 14 \cdot 45}q,$$

$$u = \frac{7}{9}t = \frac{7 \cdot 13 \cdot 29}{2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 45}q, \quad v = \frac{1}{2}u = \frac{7 \cdot 13 \cdot 29}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 45}q;$$

tum vero intervalla erunt

$$\text{primum } = \frac{maq}{6h} - \frac{1}{2}q \quad \text{secundum } = \frac{16}{29}r = \frac{16}{45}q, \quad \text{tertium } = \frac{1}{26}s = \frac{29}{2 \cdot 14 \cdot 45}q,$$

$$\text{quartum } = \frac{1}{21}t = \frac{13 \cdot 19}{3 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 45}q, \quad \text{quintum } = \frac{1}{14}u = \frac{13 \cdot 29}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 45}q,$$

$$\text{sextum } = \frac{1}{5}v = \frac{7 \cdot 13 \cdot 29}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 45}q$$

ac denique

$$O = \frac{1}{6}v\left(1 + \frac{h}{ma}\right).$$

SECTIO QVARTA.

DE

MICROSCOPIIS COMPOSITIS,

IN QVIBVS DVAE IMAGINES REALES OCCVRRVNT.

CAPUT I

DE MICROSCOPIIS SIMPLICIORIBUS HUIUS GENERIS

PRAEMONITUM

Cum microscopia ad hanc sectionem relata iterum situ erecto obiecta repraesentent, litterae $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ etc. una cum multiplicatione m eadem retinent signa, quae in praeceptis generalibus sunt usurpata.

PROBLEMA 1

224. *Microscopium huius generis ex tribus lentibus componere eiusque qualitates et defectus investigare.*

SOLUTIO

Cum hic tantum tres lentes occurrant ideoque duo intervalla, in quorum utroque imago realis existit, ambae litterae P et Q statuendae sunt negativae; quamobrem ponamus $P = -k$ et $Q = -k'$, ut sit $kk' = \frac{ma}{h}$; distantiae vero focales lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{A\mathfrak{B}a}{k}, \quad r = \frac{ABa}{kk'} = AB \cdot \frac{h}{m},$$

intervalla vero lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \text{secundum} = \frac{ABa}{k}\left(1 + \frac{1}{k'}\right),$$

ita ut prima imago realis distet a prima lente intervallo $= Aa$ et a secunda intervallo $= \frac{Aa}{k}$; posterior vero imago realis post lentem secundam cadit

intervallo $= \frac{ABa}{k}$ et ante tertiam intervallo $= \frac{ABa}{kk'}$, ac si spatii in obiecto conspicui semidiameter sit $= z$, semidiameter prioris imaginis erit $= Az$, quae est inversa, posterioris vero $= ABz$, quae iterum est erecta. Hinc igitur patet esse debere $A > 0$ et $B > 0$, unde quoque fient $\mathfrak{A} > 0$ et $\mathfrak{B} > 0$, ita tamen, ut sit $\mathfrak{A} < 1$ et $\mathfrak{B} < 1$. Tum vero erit

$$z = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma - h} \cdot ah\xi \quad \text{et} \quad M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma - h} \cdot h,$$

ut sit $z = Ma\xi$, unde nanciscimur

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = -(1 + k)M;$$

ex quo perspicuum est, cum $\mathfrak{B}$ sit positivum, fieri $\mathfrak{q}$ negativum eoque ergo campum apparentem diminui; quare, ne is penitus ad nihilum redigatur, tribui debebit litterae $\mathfrak{r}$ maximus valor, qui est unitas, et posito $\mathfrak{q} = -\omega$ debet esse $\omega < 1$, cum sit

$$M = \frac{1 - \omega}{ma - h} \cdot h;$$

deinde ob

$$\mathfrak{B} = \frac{1 + k}{\omega} \cdot M = \frac{1 + k}{\omega} \cdot \frac{1 - \omega}{ma - h} \cdot h,$$

quia $\mathfrak{B} < 1$, debebit esse

$$(1 + k)(1 - \omega)h < \omega(ma - h),$$

quae quidem conditio facile impletur, si fuerit

$$\omega > \frac{(1 + k)h}{ma + hk};$$

et quia insuper est $\omega < 1$, ad hoc requiritur, ut sit $ma > h$, quae quidem conditio pro maioribus multiplicationibus sponte habet locum. Quodsi vellemus assumere $\omega = \frac{(1 + k)h}{ma + hk}$, prodiret $\mathfrak{B} = 1$ hincque $B = \infty$ et instrumentum fieret infinite longum; ex quo perspicuum est necessario capi oportere $\omega > \frac{(1 + k)h}{ma + hk}$.

Nunc etiam videamus, num margo coloratus destrui possit; quem in finem ante locus oculi examinari debet hac aequatione determinatus [§ 18]:

$$O = \frac{r}{Ma} \cdot \frac{h}{m} \quad \text{ob} \quad \mathfrak{r} = 1.$$

Quoniam igitur r est positivum, utique erit $O > 0$, unde pro destructione marginis colorati habebitur ista aequatio:

$$0 = \frac{\omega}{k} + \frac{1}{kk'};$$

quod cum fieri nequeat, manifestum est huiusmodi microscopia insigni vitio marginis colorati laborare, ita ut superfluum foret in reliqua constructionis praecepta inquirere.

COROLLARIUM 1

225. Cum ob duas imagines reales pauciores quam tres lentes adhiberi nequeant, constructio in problemate contenta utique est simplicissima, quae locum habere queat; quare, cum eam repudiare cogamur, ad minimum quatuor lentibus uti oportebit.

COROLLARIUM 2

226. Quoniam formula pro destructione marginis colorati duabus constat partibus positivis, ista confusio multo erit maior quam in telescopiis et microscopiis ex duabus tantum lentibus formatis ideoque multo minus tolerari poterit.

SCHOLION

227. Cum igitur tribus lentibus hic propositis unam ad minimum insuper adiici oporteat, id triplici modo fieri poterit; primo enim haec nova lens inter lentem obiectivam et primam imaginem realem, secundo insuper inter imaginem realem primam et secundam, ita ut in hoc intervallo duae lentes constituantur, tertio vero inter imaginem realem secundam et lentem ocularem cadere poterit. Verum hic tertius casus eodem vitio laborabit, quod hic est reprehensum; litterae enim P et Q eosdem retinebunt valores $-k$ et $-k'$, quippe quibus tantum tertia littera R adiungitur, sicque littera $\mathfrak{q}$ retinebit quoque valorem negativum, qui sit $\mathfrak{q} = -\omega$, unde pro margine colorato destruendo habebitur ista aequatio:

$$0 = \frac{\omega}{k} + \frac{\mathfrak{r}}{kk'} + \frac{\mathfrak{s}}{kk'R},$$

quae neutiquam subsistere potest, nisi vel $\mathfrak{r}$ vel $\mathfrak{s}$ capiatur negativum, quod autem, cum iam $\mathfrak{q}$ habeat valorem negativum, neutiquam expedit, quoniam alioquin campus nimis redderetur angustus, quocirca tantum bini casus priores nobis evolvendi relinquuntur.

PROBLEMA 2

228. *Microscopia huius generis ita ex quatuor lentibus componere, ut secunda adhuc ante priorem imaginem realem cadat, tertia vero inter ambas imagines ideoque sola ocularis post secundam imaginem, in quo id potissimum efficiatur, ut margo coloratus evanescat.*

SOLUTIO

Hic ergo habentur tria intervalla totidemque litterae P, Q et R, quarum duae posteriores debent esse negativae. Ponamus itaque $Q = -k$ et $R = -k'$, ut sit $Pkk' = \frac{ma}{h}$; distantiae porro focales harum lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{Pk}\cdot a \quad \text{et} \quad s = -\frac{ABC}{Pkk'}\cdot a = -ABC\cdot\frac{h}{m};$$

tum vero intervalla lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -\frac{ABa}{P}\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABCa}{Pk}\left(1+\frac{1}{k'}\right),$$

unde patet esse debere $-AB > 0$ et $C > 0$. Deinde notetur primam imaginem cadere post lentem secundam ad intervallum $= -\frac{ABa}{P}$ et ante tertiam intervallo $= -\frac{ABa}{Pk}$, posteriorem vero imaginem cadere post lentem tertiam intervallo $= -\frac{ABCa}{Pk}$ et ante ocularem intervallo $= -\frac{ABCa}{Pkk'}$, praeterea vero imaginis prioris inversae radium esse $= ABz$, posterioris vero erectae $= ABCz$ existente

$$z = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{ma-h}\cdot ah\xi$$

hincque

$$M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{ma-h}\cdot h,$$

ita ut sit $z = Ma\xi$, quae quantitas per hypothesin debet esse positiva; ex hoc autem valore deductae sunt sequentes formulae:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = (P-1)M, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{r} = -(Pk+1)M - \mathfrak{q}.$$

Ob conditionem $C > 0$ autem modo allatam debet esse $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$, ex quo perspicuum est vel $\mathfrak{q}$ vel $\mathfrak{r}$ esse debere negativum. Utrum igitur locum habeat, conveniet $\mathfrak{s}$ sumi positive atque adeo poni $\mathfrak{s} = 1$, ut sit

$$M = \frac{1 + \mathfrak{q} + \mathfrak{r}}{ma - h} \cdot h.$$

Hinc autem oculi distantia post lentem ocularem prodibit

$$O = \frac{\mathfrak{s} s}{M} \cdot \frac{h}{ma};$$

quia igitur $s > 0$, haec distantia fiet positiva ideoque margo coloratus destruetur ope huius aequationis:

$$0 = \frac{\mathfrak{q}}{P} - \frac{\mathfrak{r}}{Pk} + \frac{1}{Pkk'};$$

quae neutiquam subsistere posset, si esset $\mathfrak{r} < 0$, unde necesse est, ut sit $\mathfrak{q} < 0$. Statuatur $\mathfrak{q} = -\omega$ eritque

$$\frac{1}{k'} = k\omega + \mathfrak{r}$$

atque nunc novimus esse debere

$$\mathfrak{B} = \frac{1 - P}{\omega} \cdot M \quad \text{et} \quad \mathfrak{C} = \frac{-(Pk + 1)M + \omega}{\mathfrak{r}};$$

qui valor cum esse debeat positivus, erit

$$(Pk + 1)M < \omega$$

hincque

$$\omega > \frac{(Pk + 1)(1 + \mathfrak{r})h}{ma + Pkh}.$$

Cum autem sit

$$\frac{ma}{h} = Pkk' = \frac{Pk}{k\omega + \mathfrak{r}},$$

orietur haec aequatio:

$$Pk^2\omega^2 + \omega(1 + \mathfrak{r})(P - Pk - 1)k - (Pk + 1)(1 + \mathfrak{r})\mathfrak{r} > 0,$$

quae aequatio conditionem continet, secundum quam littera ω debet definiri. Definitis autem convenienter litteris ω et $\mathfrak{r}$ indeque deductis valoribus $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, saltim quam proxime, reliqua elementa innotescunt; tum vero nihil aliud superest, nisi ut apertura lentis obiectivae ex aequatione pro semidiametro confusionis determinetur.

COROLLARIUM 1

229. Ponamus brevitatis gratia

$$\frac{ma}{h} = \mathfrak{M},$$

ut sit

$$M = \frac{1-\omega+\mathfrak{r}}{\mathfrak{M}-1},$$

et habebimus

$$Pk = \mathfrak{M}(k\omega + \mathfrak{r})$$

et

$$\mathfrak{B}\omega = (1-P)\left(\frac{1-\omega+\mathfrak{r}}{\mathfrak{M}-1}\right)$$

et

$$(Pk+1)\frac{(1-\omega+\mathfrak{r})}{\mathfrak{M}-1} = \frac{(\mathfrak{M}(k\omega+\mathfrak{r})+1)(1-\omega+\mathfrak{r})}{\mathfrak{M}-1} = \omega - \mathfrak{C}\mathfrak{r};$$

ex quo patet fore $\omega > \mathfrak{C}\mathfrak{r}$, ubi constat esse $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$.

COROLLARIUM 2

230. Cum igitur ω notabiliter maius esse debeat quam $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$, videamus, an fieri possit $\omega = \mathfrak{r}$; quem in finem ponamus $\omega = \mathfrak{r}$ et ultima aequatio fiet

$$\mathfrak{r}(1-\mathfrak{C}) = \frac{(\mathfrak{M}(1+k)\mathfrak{r}+1)}{\mathfrak{M}-1};$$

unde concluditur

$$\mathfrak{r} = \frac{-1}{\mathfrak{M}(\mathfrak{C}+k)+1-\mathfrak{C}},$$

quod, cum esse debeat $\mathfrak{r} > 0$, fieri nequit sicque etiam certum est esse debere $\omega > \mathfrak{r}$, ita ut campus ne ad valorem eius simplicem quidem $z = \frac{ah\xi}{ma-h}$ augeri possit ob $1-\omega+\mathfrak{r} < 1$.

COROLLARIUM 3

231. Cum igitur sit $\omega - \mathfrak{r} > 0$, plurimum interest nosse, quomodo isti formulae minimus valor concilietur; quem in finem litteris ω et $\mathfrak{r}$ ut variabilibus spectatis hoc eveniet, si sit $d\omega = d\mathfrak{r}$, cui regulae convenienter differentietur nostra aequatio

$$(\omega - \mathfrak{C}\mathfrak{r})(\mathfrak{M} - 1) = (\mathfrak{M}(k\omega + \mathfrak{r}) + 1)(1 - \omega + \mathfrak{r})$$

ac prodibit

$$(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1) = \mathfrak{M}(1 - \omega + \mathfrak{r})(k + 1),$$

unde colligimus

$$1 - \omega + \mathfrak{r} = \frac{(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1)}{\mathfrak{M}(k + 1)},$$

ita ut sit

$$M = \frac{1 - \mathfrak{C}}{\mathfrak{M}(k + 1)},$$

quae formula praebet maximum campum, quem quidem obtinere licet. Hic autem campus maximus obtinebitur capiendo

$$\omega = \mathfrak{r} + \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{C} + k) + 1 - \mathfrak{C}}{\mathfrak{M}(k + 1)},$$

qui valor in nostra aequatione substitutus dabit

$$\mathfrak{r}(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1) + \frac{(\mathfrak{M} - 1)^2\mathfrak{C} + (\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{M}k + 1)}{\mathfrak{M}(k + 1)}$$
$$= \frac{(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1)}{(k + 1)}\left(\mathfrak{r}(k + 1) + \frac{(\mathfrak{M} - 1)k\mathfrak{C} + \mathfrak{M}k^2 + k}{\mathfrak{M}(k + 1)}\right)^{1)},$$

ubi membra litteram $\mathfrak{r}$ continentia se mutuo tollunt; relinquitur haec aequatio:

$$(1 - \mathfrak{C})(1 + \mathfrak{C}k) + \mathfrak{M}(\mathfrak{C} + k)(\mathfrak{C}k + 1) = 0,$$

quae reducitur ad hanc:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{C} + k) + 1 - \mathfrak{C} = 0;$$

quae cum sit impossibilis, sequitur hunc campum maximum ne quidem obtineri posse.

SCHOLION 1[2])

232. Parum vero refert, utrum campum illum maximum obtinere queamus necne, cum etiam hic non desint remedia campum pro lubitu amplificandi; quare relicta hac investigatione aliquot casus evolvamus, qui ad

1) Hic in principale uncinulo deest tertius terminus $\frac{1}{\mathfrak{M}}$, quamobrem loco aequationis sequentis prodiret aequateo

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{C} + k)(1 + k\mathfrak{C}) - (1 - \mathfrak{C})^2 k = 0 \quad \text{seu} \quad (\mathfrak{M} - 1)(\mathfrak{C} + k)(1 + k\mathfrak{C}) + \mathfrak{C}(1 + k)^2 = 0$$

nihilominus EULERI conclusio evidenter remanet. E. Ch.

2) Scholion 2 invenitur p. 447. E. Ch.

praxin inprimis accommodati videntur, ac primo quidem apparet litteram P unitati non nimis vicinam assumi posse, quia tum secunda lens primae tam esset propinqua, ut ambae tanquam una spectari possent; ex quo casus praecedente problemate tractatus resultaret, quem locum habere non posse vidimus. Quamobrem pro P numerum satis magnum accipi conveniet; deinde etiam, cum semper sit $\omega > \mathfrak{r}$, e re erit $\mathfrak{r}$ quam minimum accipere; denique etiam, ut ad campum maximum, quantum fieri licet, appropinquemus, conveniet litteras k et $\mathfrak{C}$ quam minimas assumi.

CASUS 1

QUO $P = \infty$

[232a][1]). Hoc ergo casu fit intervallum primum $= Aa$ ideoque $A > 0$ et $\mathfrak{A} < 1$ ac secunda lens cadet in ipsam imaginem primam; cuius distantia focalis ne fiat $= 0$, debet esse $\mathfrak{B} = \infty$, ita ut sit

$$\frac{P}{\mathfrak{B}} = -\zeta$$

hincque

$$q = \frac{Aa}{\zeta}.$$

Deinde cum sit $r = -\frac{AB\mathfrak{C}a}{Pk}$, ob $\mathfrak{B} = \infty$ fit $B = -1$ et ob $\mathfrak{C} < 1$ manifestum est esse debere $k = 0$, ut fieri possit Pk quantitas finita; at quia $k = 0$, erit $\frac{1}{k'} = \mathfrak{r}$ hincque $Pk = \mathfrak{M}\mathfrak{r}$ existente $\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}$; ex quo erit

$$r = \frac{A\mathfrak{C}a}{\mathfrak{M}\mathfrak{r}} \quad \text{et} \quad s = AC \cdot \frac{h}{m};$$

unde pro magnis multiplicationibus esse debet C numerus praemagnus hincque $\mathfrak{C}$ ab unitate parum deficere. Reliqua vero intervalla erunt

$$\text{secundum} = \frac{Aa}{\mathfrak{M}\mathfrak{r}} = \frac{r}{\mathfrak{C}}$$

et

$$\text{tertium} = \frac{ACa}{\mathfrak{M}\mathfrak{r}}(1 + \mathfrak{r}) = (1 + C)r + s.$$

Praeterea vero distantia oculi erit

$$O = \frac{s}{M\mathfrak{M}}.$$

---

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

Nunc autem cum sit

$$M = \frac{1 - \omega + \mathfrak{r}}{\mathfrak{M} - 1},$$

hunc valorem in binis formulis $\mathfrak{B}\omega$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$ non substituamus, sed in iis litteram M retineamus, quo eam facilius deinceps definire queamus; tum autem ob $\frac{P}{\mathfrak{B}} = -\zeta$ ex priore invenimus

$$\omega = \zeta M,$$

ex posteriore vero

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = -M - \mathfrak{M}\mathfrak{r}M + \zeta M$$

sive

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{C} + M\mathfrak{M}) = (\zeta - 1)M$$

hincque

$$\mathfrak{r} = \frac{(\zeta - 1)M}{\mathfrak{C} + M\mathfrak{M}};$$

hinc ergo colligimus

$$\omega - \mathfrak{r} = \frac{(\mathfrak{C} + M\mathfrak{M} - 1)\zeta M + M}{\mathfrak{C} + M\mathfrak{M}}$$

vel

$$\omega - \mathfrak{r} = \frac{(\mathfrak{M}M\zeta - (1 - \mathfrak{C})\zeta + 1)M}{\mathfrak{M}M + \mathfrak{C}}$$

et

$$1 - \omega + \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{M}M + \mathfrak{C} - \mathfrak{M}M^2\zeta + (1 - \mathfrak{C})\zeta M - M}{\mathfrak{M}M + \mathfrak{C}};$$

quae expressio aequalis esse debet huic $(\mathfrak{M} - 1)M$; unde nascitur haec aequatio:

$$M^2\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1 + \zeta) - M(1 - \mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1 + \zeta) - \mathfrak{C} = 0,$$

ex qua, cum sit proxime $\mathfrak{C} = 1$, colligimus etiam proxime

$$M = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1 + \zeta)}};$$

adcuratius vero erit

$$M = \frac{1 - \mathfrak{C}}{2\mathfrak{M}} + \sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1 + \zeta)}},$$

revera autem

$$M = \frac{1 - \mathfrak{C}}{2\mathfrak{M}} + \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1 + \zeta)} + \frac{(1 - \mathfrak{C})^2}{4\mathfrak{M}^2}\right)};$$

quo valore invento simul innotescunt litterae ω et $\mathfrak{r}$, unde reliqua omnia determinabuntur. Denique pro apertura lentis obiectivae determinanda, quia

nulla ratio vitri diversitatem suadet, satisfieri debet huic aequationi (§ 31):

$$\frac{1}{k^3}=\frac{\mathfrak{M}\mu x^3}{a^3}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3}+\frac{\nu}{A\mathfrak{A}}-*+\frac{r\lambda''}{A^4a}+*\right),$$

ubi terminus tertius sponte evanuit, quintus vero ob C numerum praemagnum tuto reiici potest; unde, si hic factor posterior ponatur $=\varDelta$, reperitur

$$x=\frac{a}{k}\sqrt[3]{\frac{1}{\mathfrak{M}\mu\varDelta}}.$$

COROLLARIUM 1

233. Quia $\mathfrak{M}$ est numerus praemagnus, loco factoris $\mathfrak{M}-1+\zeta$ scribere licebit $\mathfrak{M}$, siquidem ζ non fuerit numerus valde magnus; nulla autem ratio suadet pro ζ tantum numerum adhibere; sufficit enim, ut capiatur $\zeta>1$, ne $\mathfrak{r}$ vel evanescat vel adeo negativum evadat. Tum igitur erit

$$M=\frac{1-\mathfrak{C}}{2\mathfrak{M}}+\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}^2}+\frac{(1-\mathfrak{C})^2}{4\mathfrak{M}^2}\right)}=\frac{1-\mathfrak{C}}{2\mathfrak{M}}+\frac{1+\mathfrak{C}}{2\mathfrak{M}}=\frac{1}{\mathfrak{M}},$$

unde vicissim colligitur

$$\omega=\frac{\zeta}{\mathfrak{M}}\quad\text{et}\quad\mathfrak{r}=\frac{\zeta-1}{\mathfrak{M}(1+\mathfrak{C})}.$$

COROLLARIUM 2

234. Hinc ergo sequentes adipiscimur determinationes pro ipsa microscopii constructione:

1. Distantiae focales lentium erunt

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=\frac{Aa}{\zeta},\quad r=\frac{A\mathfrak{C}(1+\mathfrak{C})a}{\zeta-1}\quad\text{et}\quad s=AC\cdot\frac{h}{m}=\frac{ACa}{\mathfrak{M}}.$$

2. Lentium intervalla

$$\text{primum}=Aa,\quad\text{secundum}\ \frac{r}{\mathfrak{C}}=\frac{A(1+\mathfrak{C})a}{\zeta-1}$$

et

$$\text{tertium}=(1+C)r+s=\frac{AC(1+\mathfrak{C})a}{\zeta-1}+\frac{ACa}{\mathfrak{M}};$$

tum vero distantia oculi erit $O=s$.

3. Pro apertura invenienda erit

$$\varDelta = \frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{v}{A\mathfrak{A}} - * + \frac{(1+\mathfrak{C})}{A^3(\zeta-1)}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{v}{C\mathfrak{C}}\right) + \frac{\lambda'''}{A^3C^3\mathfrak{M}},$$

ubi membrum ultimum manifesto omitti potest.

SCHOLION

235. Iam innuimus nullam rationem suadere, cur pro ζ numerum satis notabilem accipere velimus; interim tamen tertium intervallum, quod est

$$\frac{AC(1+\mathfrak{C})a}{\zeta-1} + \frac{ACa}{\mathfrak{M}},$$

fieri videtur nimis magnum, nisi ζ unitatem multum superet, quoniam pro C numerum satis magnum assumi convenit atque etiam A numero satis notabili aequari debet. Interim tamen semper praestabit maiorem instrumenti longitudinem tolerare quam campum restringere. Verum etiamsi ζ maius acciperemus, ut mensurae prodeant ad praxin magis accommodatae, nullum aliud incommodum inde esset metuendum, nisi quod campus minor esset revera futurus, quam intendimus; quem vero defectum aliquot insuper lentibus adiungendis facile supplere licebit. At vero plurimum refert, ut numerus A satis notabilis accipiatur, ut $\mathfrak{A}$ satis prope ad unitatem reducatur, id quod necessarium est, ut $\varDelta$ satis exiguum reddatur hincque maior claritatis gradus obtineatur; quem in finem sufficere videtur, dummodo statuatur $A = 6$; hinc enim fit $\mathfrak{A} = \frac{6}{7}$ ideoque $\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} = \frac{343}{216}\lambda$, qui valor sumto $\lambda = 1$ non multum superat $\frac{3}{2}$, qui per $\mu < 1$ multiplicatus certe infra $\frac{3}{2}$ reducitur; unde iam satis notabilis valor pro x resultat. Si igitur statuatur $A = 6$, videamus, quantum sumi oporteat C, ne s fiat nimis parvum etiam pro insigni multiplicatione $m = 960$. Quia itaque tum fit $s = \frac{48\,C}{960}$ dig. $= \frac{C}{20}$ dig., haec distantia non infra $\frac{1}{4}$ dig. deprimetur, dummodo $C = 5$; quare, si statuamus $C = 6$, ut sit $\mathfrak{C} = \frac{6}{7}$, ex hac parte nihil erit metuendum; tum vero tertium intervallum evadit $\frac{36 \cdot 13\,a}{7(\zeta-1)}$ omisso altero membro sive $\frac{2 \cdot 36\,a}{\zeta-1} = \frac{72\,a}{\zeta-1}$; unde, si distantia obiecti sit dimidii digiti, hoc intervallum erit $\frac{36}{\zeta-1}$ dig.; quod ergo sumto $\zeta = 3$ vel $\zeta = 4$ iam fit tam modicum, ut nulla possit esse ratio de eo conquerendi.

CASUS 2
QUO $\mathfrak{r} = 0$

[235a].[1]) Hoc ergo casu erit $\frac{1}{k'} = k\omega$ ideoque $P = \mathfrak{M}\omega$, tum vero $M = \frac{1-\omega}{\mathfrak{M}-1}$. Hinc aequationes ex campo deductae erunt

$$\text{I. } \mathfrak{B}\omega = \frac{(1-\mathfrak{M}\omega)(1-\omega)}{\mathfrak{M}-1},$$

$$\text{II. } \mathfrak{C}\mathfrak{r} = -\frac{(\mathfrak{M}k\omega+1)(1-\omega)}{\mathfrak{M}-1} + \omega = 0.$$

Cum igitur $P = \mathfrak{M}\omega$, erit $\omega = \frac{P}{\mathfrak{M}}$ et $1 - \omega = \frac{\mathfrak{M}-P}{\mathfrak{M}}$; unde patet P minus esse debere quam $\mathfrak{M}$. Hic autem valor in aequatione posteriore substitutus dabit

$$k = \frac{\mathfrak{M}(P-1)}{P(\mathfrak{M}-P)},$$

unde, cum $k > 0$, patet esse debere $P > 1$; hinc autem porro sequitur fore $A > 0$ hincque $\mathfrak{A} < 1$; deinde vero reperitur

$$\mathfrak{B} = -\frac{(P-1)(\mathfrak{M}-P)}{P(\mathfrak{M}-1)}, \quad B = -\frac{(P-1)(\mathfrak{M}-P)}{\mathfrak{M}(2P-1)-P^2};$$

unde B etiam negativum valorem obtinet, uti rei natura postulat. Denique erit

$$k' = \frac{\mathfrak{M}}{Pk} = \frac{\mathfrak{M}-P}{P-1} \quad \text{et} \quad M = \frac{\mathfrak{M}-P}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)},$$

unde campus cognoscitur; hinc igitur patet, quo minus capiatur P, eo maiorem proditurum esse campum, et cum P unitatem superare debeat, semper erit $M < \frac{1}{\mathfrak{M}}$. His igitur valoribus inventis habebimus:

Distantias focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{A(P-1)(\mathfrak{M}-P)a}{P^2(\mathfrak{M}-1)},$$

$$r = \frac{A\mathfrak{C}(\mathfrak{M}-P)^2 a}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(2P-1)-P^2)} \quad \text{et} \quad s = \frac{AC(P-1)(\mathfrak{M}-P)a}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(2P-1)-P^2)}$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = \frac{A(\mathfrak{M}-P)a}{\mathfrak{M}P},$$

$$\text{tertium} = \frac{AC(\mathfrak{M}-P)(\mathfrak{M}-1)a}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(2P-1)-P^2)}.$$

---

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

Tum vero oculi distantia erit

$$O = \frac{s}{M\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}-1}{\mathfrak{M}-P}\cdot s$$

ac denique spatii in obiecto conspicui erit semidiameter

$$z = \frac{\mathfrak{M}-P}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)}\cdot a\xi.$$

Aperturam vero lentis obiectivae ex aequatione nota definire oportet, pro aperturis vero sequentium lentium notetur esse $\omega = \frac{P}{\mathfrak{M}}$ et $\mathfrak{r} = 0$. Unde colligitur semidiameter aperturae

$$\text{lentis secundae} = \frac{1}{P}\cdot x + \frac{Pq}{4\mathfrak{M}},$$

$$\text{lentis tertiae} = \frac{x}{Pk} + 0 = \frac{\mathfrak{M}-P}{\mathfrak{M}(P-1)}\cdot x,$$

$$\text{lentis quartae} = \frac{x}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{4}s.$$

COROLLARIUM 1

236. Quoniam campus postulat, ut P satis parvum accipiatur, pro maioribus multiplicationibus licebit P prae $\mathfrak{M}$ negligere, unde, si P unitatem non multum superet, distantiae focales ita exprimentur:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{A(P-1)}{P^2}\cdot a, \quad r = \frac{A\mathfrak{C}}{2P-1}\cdot a \quad \text{et} \quad s = \frac{AC(P-1)}{\mathfrak{M}(2P-1)}\cdot a;$$

deinde intervalla lentium

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = \frac{Aa}{P}, \quad \text{tertium} = \frac{ACa}{2P-1}$$

et distantia oculi $O = s$.

COROLLARIUM 2

237. Si ergo statuamus $P = 2$, fient distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{1}{4}Aa, \quad r = \frac{1}{3}A\mathfrak{C}a \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{3}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et intervalla

$$\text{primum} = \frac{1}{2}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{Aa}{2}, \quad \text{tertium} = \frac{1}{3}ACa$$

et pro campo

$$z = \frac{a\xi}{\mathfrak{M}}.$$

COROLLARIUM 3

238. Si, ut supra [Lib. II § 314] pro telescopiis fecimus, statuamus $P = \sqrt{\mathfrak{M}}$ (quoniam, quod ibi erat m, hic nobis est $\mathfrak{M}$), distantiae focales ita exprimentur:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{A(\sqrt{\mathfrak{M}} - 1)}{\mathfrak{M} + \sqrt{\mathfrak{M}}} \cdot a,$$

$$r = \frac{A\mathfrak{C}(\sqrt{\mathfrak{M}} - 1)}{2\mathfrak{M}} \cdot a, \quad s = \frac{AC(\sqrt{\mathfrak{M}} - 1)}{2\mathfrak{M}\sqrt{\mathfrak{M}}} \cdot a$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{Aa(\sqrt{\mathfrak{M}} - 1)}{\sqrt{\mathfrak{M}}}, \quad \text{secundum} = \frac{Aa(\sqrt{\mathfrak{M}} - 1)}{\mathfrak{M}},$$

$$\text{tertium} = \frac{ACa(\mathfrak{M} - 1)}{2\mathfrak{M}\sqrt{\mathfrak{M}}}.$$

Pro campo autem apparente erit

$$z = \frac{1}{\mathfrak{M} + \sqrt{\mathfrak{M}}} \cdot a\xi$$

et pro oculi loco

$$O = \frac{\sqrt{\mathfrak{M}} + 1}{\sqrt{\mathfrak{M}}} \cdot s = s\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}}\right).$$

SCHOLION

239. Casus in corollario ultimo evolutus apprime convenit cum eo, quem supra in telescopiis tractavimus, ubi praecedentes casus, in quibus litterae P minores valores sunt tributi, penitus exclusimus idque ob eam rationem, quia intervallum tertium enormiter magnum prodiisset. Cum enim pro telescopiis sit $h = a = \infty$, necesse est, ut sit $\mathfrak{A} = 0 = A$, ita tamen, ut fiat $\mathfrak{A}a = Aa = p$ et $\mathfrak{M} = m$. Tum autem in genere erit tertium intervallum

$$= \frac{C(\mathfrak{M} - P)(\mathfrak{M} - 1)p}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(2P - 1) - P^2)},$$

quod, si P prae $\mathfrak{M}$ quasi evanescat, fiet

$$=\frac{C}{2P-1}\cdot p;$$

quare, cum C debeat esse numerus praemagnus, hoc solum intervallum multis partibus excessurum esset distantiam focalem p ideoque longitudo telescopii prodiret enormiter magna; quos igitur casus merito supra exclusimus. Nunc autem, ubi de microscopiis agitur, haec ratio penitus cessat; neque enim longitudo instrumenti ob tertium intervallum adeo enormiter magna evadit. Si enim, ut ante notavimus, pro magnis etiam multiplicationibus sumatur $A=6$ et $C=6$, tum tertium intervallum erit $=\frac{36a}{2P-1}$, ac si a, ut fieri solet, capiatur $\frac{1}{2}$ dig., hoc intervallum fiet $\frac{18}{2P-1}$ dig.; unde, si modo sit $P=2$, id reducitur ad 6 dig., quod in praxi utique admitti potest. Quocirca in hac de microscopiis tractatione casum in tertio corollario evolutum excludi conveniet servato eo, ubi erat $P=2$, siquidem hoc modo campus multo maior obtinetur; quin etiam, si lubuerit, sumi poterit $P=3$, ut prodeant distantiae focales

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=\frac{2}{9}Aa,\quad r=\frac{1}{5}A\mathfrak{C}a\quad \text{et}\quad s=\frac{2}{5}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} =\frac{2}{3}Aa,$$

$$\text{secundum} =\frac{1}{3}Aa,$$

$$\text{tertium} =\frac{1}{5}ACa$$

manente $O=s$ proxime et

$$z=\frac{\mathfrak{M}-3}{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}-1)}\cdot a\xi.$$

Nunc autem ne s pro magnis multiplicationibus nimis fiat exiguum, litterae C utique maior valor tribui debebit, ita ut iam nulla ratio suadeat, cur litterae P potius valorem 3 quam 2 tribuere velimus, quandoquidem ponendo $P=3$ tertium intervallum vix diminuitur.

SCHOLION 2[1])

240. Evolutione horum duorum casuum attentius considerata poterimus simili modo solutionem generalem instituere; posito enim brevitatis gratia

1) Scholion 1 invenitur p. 439. E. Ch.

$$\frac{P-1}{\mathfrak{B}} = -\zeta \quad \text{sive} \quad \mathfrak{B} = -\frac{(P-1)}{\zeta}$$

habebimus statim $\omega = \zeta M$; deinde cum sit $Pk = \mathfrak{M}(k\omega + \mathfrak{r})$, erit $Pk = \zeta\mathfrak{M}Mk + \mathfrak{M}\mathfrak{r}$, qui valor in altera aequatione, quae est

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \zeta M - M - PkM,$$

substitutus dat

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \zeta M - M - \zeta\mathfrak{M}M^2k - \mathfrak{M}M\mathfrak{r},$$

ex quo reperitur

$$\mathfrak{r} = \frac{(\zeta-1)M - \zeta\mathfrak{M}M^2k}{\mathfrak{M}M + \mathfrak{C}}$$

hincque

$$1 - \omega + \mathfrak{r} = \frac{-\zeta\mathfrak{M}(k+1)M^2 + (\mathfrak{M} - 1 + \zeta(1-\mathfrak{C}))M + \mathfrak{C}}{\mathfrak{M}M + \mathfrak{C}}.$$

Cum igitur sit

$$M = \frac{1-\omega+\mathfrak{r}}{\mathfrak{M}-1},$$

erit

$$1 - \omega + \mathfrak{r} = M(\mathfrak{M} - 1),$$

unde sequens suppeditatur aequatio:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{M} - 1 + \zeta + \zeta k)M^2 - (1-\mathfrak{C})(\mathfrak{M} - 1 + \zeta)M - \mathfrak{C} = 0;$$

ex qua, nisi numeri ζ et k fuerint satis magni, ita ut eos prae $\mathfrak{M}$ tuto negligere liceat, sequitur fore saltim proxime

$$\mathfrak{M}^2M^2 - \mathfrak{M}M(1-\mathfrak{C}) - \mathfrak{C} = 0,$$

quae in hos factores resolvitur:

$$(\mathfrak{M}M - 1)(\mathfrak{M}M + \mathfrak{C}) = 0,$$

unde manifesto colligitur

$$M = \frac{1}{\mathfrak{M}};$$

quo valore, etsi tantum prope vero, uti poterimus, quoniam parum refert, utrum campus aliquanto sit maior minorve, quam calculus indicat. Probe autem haec conditio observetur, quod tam ζ quam k sint numeri satis exigui, saltim multo minores quam $\mathfrak{M}$. Si enim ζk tantus sit numerus, ut eum prae $\mathfrak{M}$ reiicere non liceat, tum littera M multo minorem nanciscetur valorem quam $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ sicque campus insignem pateretur diminutionem, quae sola causa sufficit, ut maiores valores pro litteris ζ et k penitus exclu-

dantur haecque regula stabiliatur, ut nunquam litteris ζ et k valores tribuantur, qui binarium superent, vel ut saltim ζk quaternarium non superet. Cum igitur sit $Pkk' = \mathfrak{M}$ et k numerus ab unitate non multum discrepans, evidens est vel P vel k' esse debere numerum satis magnum vel adeo utrumque. His ergo observatis, ita ut sit $M = \frac{1}{\mathfrak{M}}$, habebimus

$$\omega = \frac{\xi}{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = \frac{\xi - \xi k - 1}{\mathfrak{M}(1 + \mathfrak{C})};$$

quibus valoribus substitutis fit

$$Pk = k\zeta + \frac{\xi - \xi k - 1}{1 + \mathfrak{C}}$$

hincque

$$P = \zeta + \frac{\xi - \xi k - 1}{(1 + \mathfrak{C})k} = \frac{\xi \mathfrak{C} k + \xi - 1}{(1 + \mathfrak{C})k}\text{[1]};$$

hoc igitur valore ipsius P notato erunt distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{A(P-1)a}{P\xi}, \quad r = \frac{A(P-1)\mathfrak{C}a}{(\xi + P - 1)Pk}, \quad s = \frac{A(P-1)Ca}{(\xi + P - 1)\mathfrak{M}}$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = \frac{A(P-1)a}{(\xi + P - 1)Pk}(k + 1)$$

et

$$\text{tertium} = \frac{A(P-1)Ca}{(\xi + P - 1)}\left(\frac{1}{Pk} + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)$$

et distantia oculi $O = s$ ac denique

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{\mathfrak{M}}.$$

Datis ergo distantia obiecti $= a$ et multiplicatione $= m$ sive $\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}$ arbitrio nostro relinquuntur sequentes quantitates:

1. $\mathfrak{A}$, quam unitate non multo minorem assumi convenit; hanc enim conditionem claritas postulat.

---

1) Editio princeps: $Pk = k + \frac{\xi - \xi k - 1}{1 + \mathfrak{C}}$ *hincque*

$$P = 1 + \frac{\xi - \xi k - 1}{(1 + \mathfrak{C})k} = \frac{(\xi - 1)(1 - k) + \mathfrak{C}k}{(1 + \mathfrak{C})k}.$$

Correxit E. Ch.

2. Numerus ζ, qui esse debet positivus ac tantus, ut $\zeta + P - 1$ fiat numerus positivus.

3. Littera C, quam autem ita definiri convenit, ut distantia focalis ne fiat nimis exigua; sin autem haec littera sit valde magna, evidens est litteram $\mathfrak{C}$ ad unitatem proxime esse accessuram.

4. Littera denique k, quam, ut vidimus, admodum parvam accipi convenit.

Ratione autem valoris P observari oportet semper esse debere

$$\zeta + P - 1 > 0;$$

deinde[1]) haec conditio adhuc implenda erit

$$\zeta \mathfrak{C} k + \zeta - 1 > 0,$$

quae est fere eadem quantitas, quam supra prae $\mathfrak{M}$ neglexims; ex quo cavendum est, ne ea aliquot unitates superet.

PROBLEMA 3

241. *Si nova lens inter imaginem primam et secundam disponatur, omnia momenta ita definire, ut margo coloratus evanescat simulque maximus campus obtineatur.*

SOLUTIO

Quoniam hic iterum quatuor habentur lentes earumque duae intra imaginem primam et secundam cadant, litterarum P, Q, R prima et tertia hic erunt negativae; statuatur igitur $P = -k$ et $R = -k'$; unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A} a, \quad q = \frac{A\mathfrak{B}}{k} \cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{kQ} \cdot a \quad \text{et} \quad s = -\frac{ABC}{kQk'} \cdot a = -\frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a$$

ob

$$kQk' = \mathfrak{M} = \frac{ma}{h}.$$

Intervalla vero lentium erunt

1) Editio princeps: *unde*. Correxit E. Ch.

$$\text{primum} = Aa\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad \text{secundum} = \frac{ABa}{k}\left(1-\frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABCa}{kQ}\left(1+\frac{1}{k'}\right)$$

hincque sequitur

$$A > 0, \quad B\left(1-\frac{1}{Q}\right) > 0 \quad \text{et} \quad BC < 0.$$

Porro erit

$$M = \frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}{\mathfrak{M}-1},$$

ut fiat

$$z = Ma\xi.$$

Hincque distantia oculi

$$O = \frac{\mathfrak{s}s}{M\mathfrak{M}},$$

ubi, ut campus reddatur maximus, sumi conveniet $\mathfrak{s}=1$, si scilicet lens ocularis utrinque aequalis paretur. Tum autem erit

$$\mathfrak{B}\mathfrak{q} = -(1+k)M \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}\mathfrak{r} = -(1+Qk)M - \mathfrak{q}.$$

Si hic ut ante brevitatis gratia scribatur

$$\frac{1+k}{\mathfrak{B}} = \zeta,$$

ut sit

$$\mathfrak{q} = -\zeta M,$$

tum igitur erit

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = -(1+Qk)M + \zeta M \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = \frac{(\zeta - Qk - 1)M}{\mathfrak{C}}$$

hincque

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r} = \frac{(\zeta(1-\mathfrak{C}) - Qk - 1)M}{\mathfrak{C}}$$

et

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+1 = \frac{\mathfrak{C} + (\zeta(1-\mathfrak{C}) - Qk - 1)M}{\mathfrak{C}}.$$

Inde vero est

$$\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+1 = M(\mathfrak{M}-1),$$

unde sequitur

$$M = \frac{\mathfrak{C}}{(\mathfrak{M}-1)\,\mathfrak{C} - \zeta(1-\mathfrak{C}) + Qk + 1};$$

ubi ergo haec quantitas

$$\mathfrak{M} - 1 - \zeta\cdot\frac{(1-\mathfrak{C})}{\mathfrak{C}} + \frac{Qk+1}{\mathfrak{C}}$$

debet esse positiva et tam parva, quam circumstantiae permittunt.

Deinde vero ut margo coloratus evanescat, habetur haec aequatio:

$$0 = \frac{\mathfrak{q}}{P} + \frac{\mathfrak{r}}{PQ} + \frac{1}{PQR},$$

ex qua reperitur

$$\frac{1}{k'} = Q\mathfrak{q} + \mathfrak{r},$$

quae quantitas debet esse positiva. Cum igitur sit $kQk' = \mathfrak{M}$, erit

$$\mathfrak{M} = \frac{kQ}{Q\mathfrak{q} + \mathfrak{r}} \quad \text{hincque} \quad kQ = \mathfrak{M}(Q\mathfrak{q} + \mathfrak{r}).$$

Antequam autem hanc formulam prosequamur, plurimum intererit investigare, num forte $\mathfrak{r}$ possit poni $= 1$. Statuamus igitur $\mathfrak{r} = 1$, ut sit

$$M = \frac{\mathfrak{q} + 2}{\mathfrak{M} - 1},$$

unde ob $\mathfrak{q} = -\zeta M$ fiet

$$\mathfrak{q} = \frac{-2\zeta - \zeta\mathfrak{q}}{\mathfrak{M} - 1}$$

adeoque

$$\mathfrak{q} = -\frac{2\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1}$$

hincque

$$M = +\frac{2}{\mathfrak{M} + \zeta - 1};$$

altera vero aequatio iam dabit

$$\mathfrak{C} = \frac{-2(1 + Qk) + 2\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1} = \frac{2(\zeta - Qk - 1)}{\mathfrak{M} + \zeta - 1}.$$

Deinde cum sit $kQ = \mathfrak{M}Q\mathfrak{q} + \mathfrak{M}$, fiet nunc

$$kQ = \mathfrak{M} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta Q}{\mathfrak{M} + \zeta - 1},$$

unde invenitur k, dummodo sit

$$1 > \frac{2\zeta Q}{\mathfrak{M} + \zeta - 1}, \quad \text{hoc est} \quad Q < \frac{\mathfrak{M} + \zeta - 1}{2\zeta}.$$

Porro autem fiet

$$\mathfrak{B} = \frac{1 + k}{\zeta} \quad \text{et [proxime]} \quad \mathfrak{C} = \frac{4\mathfrak{M}\zeta Q}{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2} - 2;$$

si igitur fuerit $\mathfrak{B} > 1$, ut sit $B < 0$, sumi debet $Q < 1$; tum vero C debet esse positivum ideoque etiam $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$; quocirca debet esse

$$1.\quad 2\mathfrak{M}\zeta Q > (\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2,$$

$$2.\quad 2\mathfrak{M}\zeta Q < \tfrac{3}{2}(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2,$$

quae conditio illi, qua debet esse $Q < 1$, manifesto repugnat. Debet ergo esse $B > 0$ hincque $Q > 1$, tum autem esse debet $C < 0$; quod eveniet, si fuerit $\mathfrak{C}$ etiam negativum, id est, si fuerit

$$Q < \frac{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2}{2\mathfrak{M}\zeta},$$

quae conditio cum praecedente $Q > 1$ facile consistere potest. Tum autem esse debet $\mathfrak{B} < 1$ ideoque $\zeta > 1 + k$. Tantum igitur campum obtinebimus, si capiamus $\zeta > 1 + k$, litteram Q vero intra limites

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2}{2\mathfrak{M}\zeta},$$

dummodo fuerit

$$kQ = \mathfrak{M} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta Q}{\mathfrak{M} + \zeta - 1}$$

adeoque

$$Q < \frac{\mathfrak{M} + \zeta - 1}{2\zeta},$$

quia est kQ positivum; quod sponte fit per conditionem praecedentem, qua est $Q < \frac{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2}{2\mathfrak{M}\zeta}$. Praeterea autem debet esse

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{Q} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1};$$

quia autem esse debet $\zeta > 1 + k$, habebimus nunc

$$\zeta > 1 + \frac{\mathfrak{M}}{Q} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1},$$

unde sequitur haec conditio:

$$Q > \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{M} + \zeta - 1)}{\zeta^2 + \zeta(3\mathfrak{M} - 2)},$$

quae conditio cum illa $Q < \frac{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2}{2\mathfrak{M}\zeta}$ egregie consistit.

Cum autem praeterea esse debeat $\zeta > 1 + k$, loco k substituendo eius valorem fiet

$$\zeta > 1 + \frac{\mathfrak{M}}{Q} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1},$$

unde concluditur esse debere

$$Q > \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{M} + \zeta - 1)}{\zeta^2 + \zeta(3\mathfrak{M} - 2) - \mathfrak{M} + 1};$$

quia autem modo vidimus esse $Q < \frac{(\mathfrak{M} + \zeta - 1)^2}{2\mathfrak{M}\zeta}$, hic limes illo debet esse maior; unde colligitur

$$\zeta^3 + \zeta^2(4\mathfrak{M} - 3) + \zeta(\mathfrak{M}^2 - 6\mathfrak{M} + 3) > (\mathfrak{M} - 1)^2,$$

unde patet, si $\mathfrak{M}$ sit numerus praemagnus, esse debere $\zeta > 1$. Statuamus ergo

$$\zeta = 1 + \frac{\alpha}{\mathfrak{M}},$$

unde fit

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}(\alpha - 2) + 2\alpha + 1 > \mathfrak{M}^2 - 2\mathfrak{M} + 1$$

hincque porro

$$\alpha(\mathfrak{M} + 2) > 0;$$

quod cum semper eveniat, patet, dummodo $\zeta > 1$, solutionem semper locum habere; ac si in illis formulis $\mathfrak{M}$ ut numerus praemagnus spectetur, limites pro Q erunt

$$Q > \frac{\mathfrak{M}}{3\zeta - 1} \quad \text{et} \quad Q < \frac{\mathfrak{M}}{2\zeta}$$

sumtaque Q his limitibus convenienter erit porro

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{Q} - \frac{2\mathfrak{M}\zeta}{\mathfrak{M} + \zeta - 1}$$

hincque reliqua elementa omnia facillime definientur. Ceterum in evolutione sequentium casuum haec clariora reddentur. Quod denique ad lentium aperturas attinet, eas pro quovis casu ex cognitis formulis facile definire licet.

COROLLARIUM 1

242. Videamus vero, quomodo omnes hae conditiones clarius evolvi queant. Ac primo quidem, statim ac statuimus $\mathfrak{r} = 1$, fit

$$M = \frac{2 + \mathfrak{q}}{\mathfrak{M} - 1} \quad \text{ideoque} \quad 2 + \mathfrak{q} = M(\mathfrak{M} - 1).$$

Posito autem

$$\frac{1+k}{\mathfrak{B}}=\zeta,$$

ut sit

$$\mathfrak{B}=\frac{1+k}{\zeta},$$

fiet $\mathfrak{q}=-\zeta M$; qui valor ibi substitutus dat

$$2-\zeta M=M(\mathfrak{M}-1)$$

hincque

$$M=\frac{2}{\mathfrak{M}+\zeta-1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{q}=-\frac{2\zeta}{\mathfrak{M}+\zeta-1};$$

deinde vero invenimus

$$kQ=\mathfrak{M}Q\mathfrak{q}+\mathfrak{M},$$

ubi valor ipsius $\mathfrak{q}$ substitutus dat

$$kQ=\mathfrak{M}-\frac{2\mathfrak{M}Q\zeta}{\mathfrak{M}+\zeta-1}$$

sive

$$kQ(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}Q\zeta=\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+\zeta-1),$$

unde commode deducitur

$$Q=\frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+\zeta-1)}{k(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta},$$

unde fit

$$1+kQ=\frac{k(\mathfrak{M}+1)(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta}{k(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta}.$$

Cum igitur sit

$$\mathfrak{C}=M(\zeta-Qk-1),$$

erit

$$\mathfrak{C}=\frac{2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)-k(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)}{k(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta}\cdot M$$

seu

$$\mathfrak{C}=\frac{4\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)-2k(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)}{(k(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta)(\mathfrak{M}+\zeta-1)}.$$

COROLLARIUM 2

243. Iam ratione litterae $\mathfrak{B}$ duo casus sunt considerandi, alter, quo $\mathfrak{B}>1$ ideoque $B<0$, alter vero, quo $\mathfrak{B}<1$ ideoque $B>0$. Priori casu erit $\zeta<1+k$, et quia B est minus nihilo, ob secundum intervallum debet

esse $Q<1$; unde fit

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+\zeta-1)<k(\mathfrak{M}+\zeta-1)+2\mathfrak{M}\zeta,$$

id quod fieri nequit, cum sit $\mathfrak{M}$ numerus valde magnus.

COROLLARIUM 3

243[a][1]). Cum igitur esse nequeat $\mathfrak{B}>1$, statuamus $\mathfrak{B}<1$ sive $\zeta>1+k$, et quia iam $B>0$, debebit esse $Q>1$; id quod sponte evenit pro maioribus scilicet multiplicationibus, ad quas hic solas attendimus. Tum autem esse debet $C<0$, id quod evenit, vel si fuerit $\mathfrak{C}<0$ vel $\mathfrak{C}>1$. Priori casu, si $\mathfrak{C}<0$, debebit esse

$$k(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)>2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)$$

sive

$$k>\frac{2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)}{(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)}.$$

Ex illa vero conditione $\zeta>1+k$ debet esse $k<\zeta-1$; unde porro colligitur esse debere

$$\zeta-1>\frac{2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)}{(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)}$$

seu

$$(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)>2\mathfrak{M}\zeta,$$

quod etiam semper evenit, ita ut littera ζ arbitrio nostro relinquatur, dummodo unitate maior accipiatur. Cum autem sit $M=\frac{2}{\mathfrak{M}+\zeta-1}$ campi magnitudo postulat, ut ζ quam minime unitatem superet.

COROLLARIUM 4

244. Examinandus restat alter casus, quo debet esse $\mathfrak{C}>1$; tum ergo esse deberet ante omnia numerator positivus seu

$$2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)>k(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)$$

ideoque

$$k<\frac{2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)}{(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)};$$

1) Editio princeps falso iterat numerum 243. E. Ch.

deinde, ut etiam unitatem superet, debet esse

$$4\mathfrak{M}\zeta(\zeta-1)-2k(\mathfrak{M}+\zeta-1)(\mathfrak{M}-\zeta+1)>k(\mathfrak{M}+\zeta-1)^2+2\mathfrak{M}\zeta(\mathfrak{M}+\zeta-1)$$

ideoque

$$k<\frac{2\mathfrak{M}\zeta(\zeta-\mathfrak{M}-1)}{(\mathfrak{M}+\zeta-1)(3\mathfrak{M}-\zeta+1)},$$

quod cum sit absurdum ob $k>0$, indicio est hunc casum locum habere non posse, ita ut nobis solus casus in corollario praecedente evolutus relinquatur.

EXEMPLUM 1

245. Quoniam positio $\mathfrak{x}=1$ ad campum maxime est accommodata simulque solutionem tam facilem suppeditat, ea utique sola meretur, ut ad praxin adplicetur. Hic autem primum observari convenit nequaquam sumi posse $\zeta=1$, quia tum foret $k=0$ statimque primum intervallum $=\infty$, ut reliqua incommoda taceamus, dum scilicet tam secunda quam tertia lens haberent distantias focales infinitas. Ex quo necesse est pro ζ sumi numerum unitate maiorem, ita ut excessus non sit nimis parvus, quia alioquin ad eadem incommoda appropinquaremus. Quamobrem, quo clarius appareat, quomodo in hoc negotio sit procedendum, sumamus $\zeta=2$, ut fiat $M=\frac{2}{\mathfrak{M}+1}$. Tum vero k contineri debet intra hos limites

$$1 \text{ et } \frac{4\mathfrak{M}}{(\mathfrak{M}+1)(\mathfrak{M}-1)} \quad \text{vel} \quad 1 \text{ et } \frac{4}{\mathfrak{M}}.$$

Neque autem k ad unitatem nimis prope accedere debet, quod alioquin B hincque secundum intervallum nimis evaderet magnum. Sumamus igitur $k=\frac{1}{2}$; hinc erit

$$Q=\frac{2\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+1)}{9\mathfrak{M}+1}=\frac{2}{9}\mathfrak{M} \text{ proxime.}$$

Deinde vero erit

$$\mathfrak{B}=\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad B=3$$

ac denique

$$\mathfrak{C}=\frac{16\mathfrak{M}-2(\mathfrak{M}+1)(\mathfrak{M}-1)}{(9\mathfrak{M}+1)(\mathfrak{M}+1)}=-\frac{2}{9}+\frac{16}{9\mathfrak{M}}=-\frac{2}{9} \text{ proxime}$$

hincque $C=-\frac{2}{11}$; unde pro microscopii constructione habebimus has distan-

tias focales:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{3}{2}Aa, \quad r = \frac{6}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad s = \frac{6}{11}\cdot\frac{Aa}{\mathfrak{M}}$$

et intervalla

$$\text{primum} = 3Aa, \quad \text{secundum} = 6Aa\left(1 - \frac{9}{2\mathfrak{M}}\right), \quad \text{tertium} = \frac{60}{11}\cdot\frac{Aa}{\mathfrak{M}};$$

tum vero distantia oculi

$$O = \frac{s}{\mathfrak{M}M} = \frac{s(\mathfrak{M}+1)}{2\mathfrak{M}} = \frac{1}{2}s\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right) = \frac{1}{2}s \text{ proxime.}$$

Pro campo autem apparente

$$z = Ma\xi = \frac{2a\xi}{\mathfrak{M}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\mathfrak{M}+1} \quad \text{ob} \quad \xi = \frac{1}{4}.$$

Quod vero ad litteram A attinet, quae ad primam lentem refertur, curandum est, ut A tantus fiat numerus, ut lens ocularis non fiat nimis exigua; unde sequitur $\mathfrak{A}$ esse debere fractionem parum ab unitate deficientem; cuius valore stabilito apertura primae lentis definiri debet ex aequatione nota

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu\mathfrak{M}x^3}{a^3}\left(\frac{\lambda}{\mathfrak{A}^3} + \frac{\nu}{A\mathfrak{A}} + \text{etc.}\right)$$

sicque obtinemus microscopium satis notatu dignum, quod instar primi exempli spectari potest.

EXEMPLUM 2

246. Consideremus etiam casum $\zeta = 3$, ut sit $M = \frac{2}{\mathfrak{M}+2}$, et pro k habebuntur hi limites 2 et $\frac{12}{\mathfrak{M}}$. Statuamus ergo $k = 1$, ut fiat $\mathfrak{B} = \frac{2}{3}$ et $B = 2$. Tum vero erit $Q = \frac{\mathfrak{M}}{7}$ et $k' = 7$. Porro vero erit $\mathfrak{C} = -\frac{2}{7}$ et $C = -\frac{2}{9}$, unde pro his microscopiis erunt distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{2}{3}Aa, \quad r = 4\frac{Aa}{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad s = \frac{4}{9}\cdot\frac{Aa}{\mathfrak{M}}$$

et intervalla

$$\text{primum} = 2Aa, \quad \text{secundum} = 2Aa\left(1 - \frac{7}{\mathfrak{M}}\right) \quad \text{et} \quad \text{tertium} = \frac{32}{9}\cdot\frac{Aa}{\mathfrak{M}}$$

et distantia oculi

$$O = s\cdot\frac{\mathfrak{M}+2}{2\mathfrak{M}} = \frac{1}{2}s\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{M}}\right) = \frac{1}{2}s \text{ proxime.}$$

Pro campo vero

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\mathfrak{M} + 2}.$$

Circa aperturam modo allegata valent. Ratione autem litterae $\mathfrak{q}$ erit casu exempli praecedentis $\mathfrak{q} = -\frac{4}{\mathfrak{M}+1}$ et casu huius exempli $\mathfrak{q} = -\frac{6}{\mathfrak{M}+2}$; unde patet secundae lentis semidiametrum aperturae esse debere $= \frac{x}{P} = \frac{x}{k}$ ideoque priori casu $= 2x$, hoc vero $= x$. Binae postremae lentes autem fieri debent utrinque aeque convexae.

SCHOLION 1

247. Si haec ad telescopia referamus, quod nunc eo magis est necessarium, quoniam supra huius generis casum tantum maxime particularem evolvimus, qui ne campum quidem maximum, ut hic fecimus, praebebat, tantum faciamus $a = \infty$ et $\mathfrak{M} = m$ ob $h = a$. Tum autem capi debet tam $\mathfrak{A} = 0$ quam $A = 0$, ita ut fiat $\mathfrak{A}a = Aa = p$; quare, cum reliqua omnia maneant ut ante, ex exemplo priore posita lentis obiectivae distantia focali $= p$ erunt reliquarum lentium distantiae focales

$$q = \frac{3}{2}p, \quad r = \frac{6}{m}p \quad \text{et} \quad s = \frac{6}{11} \cdot \frac{p}{m},$$

intervalla vero

$$\text{primum} = 3p, \quad \text{secundum} = 6p\left(1 - \frac{9}{2m}\right) \quad \text{et} \quad \text{tertium} = \frac{60}{11m} \cdot p$$

et

$$O = \frac{1}{2}s.$$

Tum vero campi semidiameter

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{1718}{m+1} \text{ min.}$$

Deinde vero ob

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{4}, \quad B = 3, \quad \mathfrak{C} = -\frac{2}{9} \quad \text{et} \quad C = -\frac{2}{11}$$

distantia focalis p ex requisita apertura $x = \frac{1}{50}m$ dig. definiri debet ope huius aequationis:

$$p = m\sqrt[3]{m\mu}\left(\lambda + 2\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) - \frac{9}{mB^3}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \frac{\lambda'''}{mB^3C^3}\right).$$

In casu autem alterius exempli erunt distantiae focales

$$q = \frac{2}{3}p, \quad r = \frac{4}{m}p, \quad s = \frac{4}{9m}p$$

et intervalla

$$\text{primum} = 2p, \quad \text{secundum} = 2p\left(1 - \frac{7}{m}\right), \quad \text{tertium} = \frac{32}{9m}p;$$

tum vero p ita definietur, ut sit

$$p = m\sqrt[3]{m}\mu\left(\lambda + \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}} - \frac{7}{mB^3}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) - \frac{\lambda'''}{mB^3C^3}\right),$$

reliqua vero erunt ut ante.

Hinc igitur loco communium telescopiorum terrestrium nanciscimur ex casu posteriore sequentem constructionem, siquidem omnes quatuor lentes ex vitro communi, cuius refractio sit $n = 1{,}55$, conficere velimus.

CONSTRUCTIO TELESCOPIORUM LOCO VULGARIUM TERRESTRIUM SUBSTITUENDORUM

248. Pro data multiplicatione m quaeratur primo lentis obiectivae distantia focalis $= p$, ex hac nempe formula, ad quam praecedens proxime reducitur:

$$p = \frac{8}{5}m\sqrt[3]{m}\ \text{dig.};$$

deinde constructrio ita se habebit:

I. Pro prima lente, cuius distantia focalis est $\frac{8}{5}m\sqrt[3]{m}$ dig., capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\,p \\ \text{posterioris} & = 5{,}2438\,p, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $x = \frac{1}{50}m$ dig.

et distantia ad lentem sequentem $= 2p$.

II. Pro secunda lente, cuius distantia focalis est $q = \frac{2}{3}p$ et numeri $\mathfrak{B} = \frac{2}{3}$ et $\lambda' = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{0{,}6696} = 0{,}99562\,p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{1{,}1485} = 0{,}58047\,p, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= x = \frac{1}{50} m$ dig.
et intervallum ad tertiam lentem $= 2p\left(1 - \frac{7}{m}\right)$.

III. Pro tertia lente, cuius distantia focalis est $r = \frac{4}{m} p$, quoniam ea debet esse utrinque aequaliter convexa, capiatur

eius uterque radius $= 1{,}1\, r = 4{,}4 \cdot \frac{p}{m}$,
eius aperturae semidiameter $= \frac{p}{m}$
et distantia ad quartam lentem $= \frac{32}{9m} p$.

IV. Pro quarta lente, cuius distantia focalis est $s = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$, capiatur itidem uterque radius $= \frac{22}{45} \cdot \frac{p}{m}$,

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{9} \cdot \frac{p}{m}$
et distantia ad oculum $= \frac{1}{2} s$.

V. Tum vero erit semidiameter campi $\Phi = \frac{1718}{m+2}$ min.

SCHOLION 2

249. Telescopia haec utique insigni vitio laborant, propterea quod eorum longitudo fit plane enormis, maior scilicet quam $3p$. Huic autem vitio medela afferri poterit litterae k maiorem valorem tribuendo; tum vero etiam littera ζ maior accipi debebit; unde quidem campus aliquantillum diminuitur, qui tamen defectus in maioribus multiplicationibus vix percipietur. Sumamus igitur $\zeta = 6$, ut fiat $M = \frac{2}{\mathfrak{M} + 5}$, et cum limites pro k sint 5 et $\frac{60}{m}$, sumamus $k = 4$, ut fiat $\mathfrak{B} = \frac{5}{6}$ et $B = 5$; tum vero erit $Q = \frac{m}{16}$ et $k' = 4$[1]) tandemque $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2}$ et $C = -\frac{1}{3}$; hinc autem erit intervallum

$$\text{primum} = \frac{5}{4} p, \quad \text{secundum} = \frac{5}{4} p \left(1 - \frac{16}{m}\right), \quad \text{tertium} = \frac{25}{3} \cdot \frac{p}{m}{}^{2)};$$

unde longitudo prodiret quasi $2\frac{1}{2} p$, quae adhuc nimis magna videri potest.

---

1) Editio princeps: $Q = \frac{m}{6}$ *et* $k' = \frac{3}{2}$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: $2^{dum} = \frac{5}{4} p \left(1 - \frac{6}{m}\right)$ $3^{tium} = \frac{25}{6} \cdot \frac{p}{m}$. Correxit E. Ch.

Hanc longitudinem autem non mediocriter diminuere poterimus sumendo $\zeta = 12$ et $k = 9$; hinc enim fit $\mathfrak{B} = \frac{5}{6}$ et $B = 5$ ut ante; unde sequitur intervallum

$$\text{primum} = \frac{10}{9}p \quad \text{et} \quad \text{secundum} = \frac{5}{9}p,$$

ita ut tota longitudo quasi fiat $1\frac{2}{3}p$, quae non excedit telescopia huius generis vulgaria. Si sumsissemus $\zeta = 12$ et $k = 8$, ut fiat $\mathfrak{B} = \frac{3}{4}$ et $B = 3$, foret intervallum

$$\text{primum} = \frac{9}{8}p \quad \text{et} \quad \text{secundum} = \frac{3}{8}p,$$

ita ut tota longitudo quasi sit $1\frac{1}{2}p$, quae utique admitti poterit. Hic ergo casus meretur, ut plenius evolvatur.

Fiet autem porro $Q = \frac{m}{32}$ hincque $k' = 4$. Porro $\mathfrak{C} = -\frac{1}{2}$ et $C = -\frac{1}{3}$; unde

$$q = \frac{3}{32}p, \quad r = 6\frac{p}{m} \quad \text{et} \quad s = \frac{p}{m};$$

tum vero intervalla

$$\text{primum} = \frac{9}{8}p, \quad \text{secundum} = \frac{3}{8}p\left(1 - \frac{32}{m}\right), \quad \text{tertium} = 5\frac{p}{m}$$

et pro loco oculi $O = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{11}{m}\right)$,
semidiameter campi $= \frac{1718}{m+11}$ min.

Sumto igitur pro apertura lentis obiectivae $x = \frac{m}{50}$ dig. et $k = 50$ capi debebit circiter

$$p = m\sqrt[3]{m\frac{4}{3}} = \frac{11}{10}m\sqrt[3]{m} \text{ dig.};$$

unde conficitur sequens

CONSTRUCTIO TELESCOPII COMMUNIS EX VITRO COMMUNI

I. Pro data multiplicatione m sumatur

$$p = \frac{11}{10}m\sqrt[3]{m} \text{ circiter} \quad \text{sive etiam} \quad p = m\sqrt[3]{m} \text{ dig.}$$

II. Pro prima lente, cuius distantia focalis $= p$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 0{,}6145\,p \\ \text{posterioris} & = 5{,}2438\,p, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{m}{50}$ dig.
et distantia ad lentem secundam $= 1\frac{1}{8}p$.

III. Pro lente secunda, cuius distantia focalis est $q = \frac{3}{32}p$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = \dfrac{q}{0,5499} = 0,17053\,p \\ \text{posterioris} & = \dfrac{q}{1,2682} = 0,07388\,p, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $= \frac{1}{8}x = \frac{m}{400}$ dig.
et distantia ad lentem tertiam $= \frac{3}{8}p\left(1 - \frac{32}{m}\right)$.

IV. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est $r = 6\frac{p}{m}$, capiatur

$$\text{uterque radius} = 6,6\frac{p}{m}$$

eique apertura maxima tribuatur,
distantia vero a lente quarta erit $= 5\frac{p}{m}$.

V. Pro lente quarta, cuius distantia focalis $s = \frac{p}{m}$, capiatur

$$\text{uterque radius} = 1,1\frac{p}{m}$$

eiusque ab oculo distantia $= \frac{s}{2}\left(1 + \frac{11}{m}\right)$.

VI. Longitudo erit $1\frac{1}{2}p - 6\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{m}$.
Campi vero apparentis semidiameter erit $= \frac{1718}{m + 11}$ min.

Hoc ergo telescopium vulgaribus terrestribus merito anteferendum videtur; notetur vero id in praxi locum habere non posse, nisi sit m notabiliter maius quam 32.

Hic autem istud caput finimus ad sequens progressuri, ubi microscopia magis composita huius generis investigabimus.

*

CAPUT II

DE MICROSCOPIIS HUIUS GENERIS MAGIS COMPOSITIS

PROBLEMA 1

250. *Microscopium huius generis ex quinque lentibus construere, quae ita sint dispositae, ut prior imago realis inter lentem secundam et tertiam, posterior vero inter tertiam et quartam cadat.*

SOLUTIO

Cum igitur prior imago in intervallum secundum, posterior vero in tertium cadere debeat, litterarum P, Q, R, S secunda et tertia Q et R debent esse negativae. Statuatur ergo $Q = -k$ et $R = -k'$, ut sit $Pkk'S = \mathfrak{M}$ existente

$$\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}.$$

Deinde vero sit

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \mathfrak{t}}{\mathfrak{M} - 1},$$

ut fiat spatii in obiecto conspicui semidiameter

$$z = Ma\xi.$$

Quare, ut campus evadat maximus, efficiendum est, ut litterarum $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ tot fiant unitati aequales, quam reliquae circumstantiae permittunt; quod cum de omnibus statui nequeat, saltem pro postremis ponamus $\mathfrak{s} = 1$ et $\mathfrak{t} = 1$, ut sit

$$M = \frac{\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + 2}{\mathfrak{M} - 1}.$$

Tum vero habebuntur sequentes aequationes:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q}=(P-1)M,$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}=-(Pk+1)M-\mathfrak{q},$$

$$3.\quad \mathfrak{D}=(Pkk'-1)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r},$$

quibus adiungatur aequatio, qua margo coloratus destruitur,

$$0=\frac{\mathfrak{q}}{P}-\frac{\mathfrak{r}}{Pk}+\frac{1}{Pkk'}+\frac{1}{Pkk'S},$$

ex qua deducitur

$$k'=\frac{1+\frac{1}{S}}{\mathfrak{r}-k\mathfrak{q}},$$

unde patet esse debere $\mathfrak{r}>k\mathfrak{q}$. Antequam autem hinc quidquam definire valeamus, lentium intervalla considerare debemus, quae sunt

$$\text{primum } =Aa\Big(1-\frac{1}{P}\Big),\quad \text{secundum } =-\frac{AB}{P}\cdot a\Big(1+\frac{1}{k}\Big),$$

$$\text{tertium } =-\frac{ABC}{Pk}\cdot a\Big(1+\frac{1}{k'}\Big),\quad \text{quartum } =-\frac{ABCD}{Pkk'}\cdot a\Big(1-\frac{1}{S}\Big),$$

quae omnia debent esse positiva; quibus adiungatur distantia focalis ultimae lentis

$$t=\frac{ABCD}{Pkk'S}\cdot a=\frac{ABCD}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

quae etiam debet esse positiva, ut prodeat distantia oculi post eam,

$$O=\frac{t\mathfrak{t}}{M\mathfrak{M}},$$

positiva; unde ob $\mathfrak{t}=1$ evidens est esse debere t positivum ideoque $ABCD>0$. Quocirca, ut quartum intervallum etiam fiat positivum, necesse est, ut sit $1-\frac{1}{S}<0$ sive $S<1$, unde evidens est productum Pkk' fore $>\mathfrak{M}$ ideoque numerum praemagnum; unde tertia illa aequatio, si loco M eius valor substituatur, dabit

$$\mathfrak{D}=\frac{(Pkk'-1)(\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+2)}{\mathfrak{M}-1}-\mathfrak{q}-\mathfrak{r};$$

ubi cum Pkk' et $\mathfrak{M}$ sint numeri praemagni et $Pkk' > \mathfrak{M}$, fiet proxime

$$\mathfrak{D} = \frac{Pkk'}{\mathfrak{M}}(\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + 2) - \mathfrak{q} - \mathfrak{r} = \frac{2Pkk'}{\mathfrak{M}} + (\mathfrak{q} + \mathfrak{r})\left(\frac{Pkk'}{\mathfrak{M}} - 1\right)$$

sive ob $Pkk' = \frac{\mathfrak{M}}{S}$ erit

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{S} + (\mathfrak{q} + \mathfrak{r})\left(\frac{1}{S} - 1\right);$$

unde, cum $\mathfrak{q} + \mathfrak{r}$ certe sit < 2, evidens est fore $\mathfrak{D} > 1$ ideoque D negativum. Erit ergo $ABC < 0$; hinc tertium intervallum sponte fit positivum. Quare, cum ob secundum intervallum esse debeat $AB < 0$, oportet esse $C > 0$ hincque $\mathfrak{C} > 0$ et $\mathfrak{C} < 1$. Unde, si fuerit $A > 0$ ideoque $P > 1$ ob intervallum primum, debebit esse $B < 0$ hincque vel $\mathfrak{B} < 0$ vel $\mathfrak{B} > 1$; unde sequitur fore priori casu $\mathfrak{q} < 0$, altero casu $\mathfrak{q} > 0$; unde ob $\mathfrak{q} + \mathfrak{C}\mathfrak{r} < 0$ fieret $\mathfrak{r} < 0$ ideoque $k' < 0$, quod est absurdum. Sin autem esset $A < 0$ hincque $P < 1$, deberent esse $B > 0$ ideoque $\mathfrak{B} > 0$ et $\mathfrak{B} < 1$, unde iterum fieret $\mathfrak{q} < 0$. Neque igitur etiamnum constat, utrum ambo isti casus consistere queant. Quia vero in utroque fit $\mathfrak{q} < 0$, statuamus ut ante $\mathfrak{q} = -\omega$, ut sit

$$\omega = \frac{(1-P)M}{\mathfrak{B}},$$

et ob secundam aequationem esse debet $\omega - \mathfrak{C}\mathfrak{r} > 0$; tum vero erit

$$k' = \frac{1 + \frac{1}{S}}{\mathfrak{r} + k\omega};$$

unde ob $Pkk' = \frac{\mathfrak{M}}{S}$ fiet

$$Pk = \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{r} + k\omega)}{1 + S}.$$

Nunc igitur litteras ω et $\mathfrak{r}$ ex calculo eliminemus, et cum sit $\omega = \frac{1-P}{\mathfrak{B}}M$, ponamus brevitatis gratia

$$\frac{1-P}{\mathfrak{B}} = \zeta,$$

ut sit

$$\omega = \zeta M;$$

deinde sit etiam brevitatis gratia

$$1 + Pk = \eta$$

fietque

$$\mathfrak{r} = \frac{(\zeta - \eta)M}{\mathfrak{C}}.$$

Ergo porro

$$\mathfrak{r} - \omega = \frac{(\zeta(1 - \mathfrak{C}) - \eta)M}{\mathfrak{C}}$$

et

$$2 - \omega + \mathfrak{r} = \frac{2\mathfrak{C} + (\zeta(1 - \mathfrak{C}) - \eta)M}{\mathfrak{C}};$$

at cum sit $M = \frac{2 + \mathfrak{r} - \omega}{\mathfrak{M} - 1}$, erit

$$2 + \mathfrak{r} - \omega = M(\mathfrak{M} - 1),$$

unde concludimus fore

$$M = \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta};$$

quo valore invento erit

$$\omega = \frac{2\mathfrak{C}\zeta}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = \frac{2(\zeta - \eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta},$$

ex quibus valoribus porro conficitur

$$\mathfrak{r} + k\omega = \frac{2(\zeta - \eta) + 2k\mathfrak{C}\zeta}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta}$$

hincque

$$Pk = \frac{2\mathfrak{M}(\zeta - \eta + k\mathfrak{C}\zeta)}{(1+S)(\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta)} = \eta - 1,$$

ex quo definitur

$$k = \frac{(\eta - 1)(1 + S)\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - 2\mathfrak{M}(\zeta - \eta) - (\eta - 1)(1 + S)(\zeta - \eta)}{2\mathfrak{M}\mathfrak{C}\zeta},$$

unde porro invenitur

$$P = \frac{\eta - 1}{k}.$$

Quia autem k debet esse positivum, in eius numeratore coefficiens ipsius $\mathfrak{M}$ debet esse positivus, unde sequitur

$$\mathfrak{C} > \frac{2(\zeta - \eta)}{(\eta - 1)(1 + S)};$$

at vero vidimus esse $\mathfrak{C} < 1$ sicque necesse est, ut sit

$$\frac{2(\zeta-\eta)}{(\eta-1)(1+S)} < 1 \quad \text{seu} \quad 2(\zeta-\eta) < (\eta-1)(1+S);$$

ex qua conditione concludimus

$$\zeta < \eta + \frac{(\eta-1)(1+S)}{2}.$$

Novimus autem esse debere $\zeta > \eta$; unde littera ζ capi debebit intra limites

$$\eta \quad \text{et} \quad \eta + \frac{(\eta-1)(1+S)}{2},$$

ubi manifestum est esse debere $\eta > 1$. Nostrum igitur problema sequenti modo resolvi conveniet.

Pro lubitu capi possunt litterae S et η, dummodo observetur esse debere $S < 1$ et $\eta > 1$, quia $Pk = \eta - 1$. Deinde littera ζ capiatur intra limites η et $\eta + \frac{(\eta-1)(1+S)}{2}$. At $\mathfrak{C}$ capiatur intra hos limites

$$\mathfrak{C} < 1 \quad \text{simulque} \quad \mathfrak{C} > \frac{2(\zeta-\eta)}{(\eta-1)(1+S)},$$

unde simul C definitur. Tum vero capiatur

$$k = \frac{(\eta-1)(1+S)\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1) - 2\mathfrak{M}(\zeta-\eta) - (\eta-1)(1+S)(\zeta-\eta)}{2\mathfrak{M}\mathfrak{C}\zeta},$$

ex quo habebitur

$$P = \frac{\eta-1}{k} \quad \text{et} \quad k' = \frac{\mathfrak{M}}{(\eta-1)S}.$$

Postea capiatur $\mathfrak{B} = \frac{1-P}{\zeta}$, unde definitur B. Denique ob $Pkk' = \frac{\mathfrak{M}}{S}$ formula supra pro $\mathfrak{D}$ inventa dabit

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{\mathfrak{M}}{S} - 1\right)M - (\mathfrak{M}-1)M + 2 = M\mathfrak{M}\left(\frac{1}{S} - 1\right) + 2;$$

ubi substituto valore ipsius M prodit

$$\mathfrak{D} = \frac{\frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{C}}{S} + 2\mathfrak{C}(\zeta-1) - 2(\zeta-\eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1) - \zeta + \eta},$$

qui valor, cum sit $\mathfrak{M}$ numerus praemagnus, erit proxime $\mathfrak{D} = \frac{2}{S}$ hincque adcuratius

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{S} + \frac{\frac{2}{S}(\zeta - \eta - \mathfrak{C}(\zeta - 1)) + 2\mathfrak{C}(\zeta - 1) - 2(\zeta - \eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta}$$

sive

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{S} + \frac{2\left(\frac{1}{S} - 1\right)(\zeta - \eta - \mathfrak{C}(\zeta - 1))}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta}$$

vel

$$\mathfrak{D} = \frac{2}{S} - \frac{2\left(\frac{1}{S} - 1\right)(\mathfrak{C}(\zeta - 1) - \zeta + \eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - \zeta + \eta},$$

unde saltem patet certe fore $\mathfrak{D} > 1$ ideoque D negativum, ut supra iam notavimus. Iam prouti fuerit P sive > 1 sive < 1, capi debebit vel $A > 0$ vel $A < 0$, ita ut nunc omnia elementa sint determinata; habebuntur enim distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{Pk}\cdot a, \quad s = -\frac{ABC\mathfrak{D}}{Pkk'}\cdot a \quad \text{et} \quad t = \frac{ABCD}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

deinde intervalla

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -\frac{ABa}{P}\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABCa}{Pk}\left(1 + \frac{1}{k'}\right), \quad \text{quartum} = -\frac{ABCDa}{Pkk'}\left(1 - \frac{1}{S}\right);$$

tum vero erit

$$M = 2 : \left(\mathfrak{M} + \zeta - 1 - \frac{(\zeta - \eta)}{\mathfrak{C}}\right)$$

et

$$O = \frac{t}{\mathfrak{M}M}$$

et apertura primae lentis ex aequatione notissima $\frac{1}{k^3} = \cdots$ definietur.

COROLLARIUM 1

251. Conditio, quam invenimus, $\zeta > \eta$ hic plus non involvit, quam ne ζ minus quam η accipiatur. Nihil ergo impedit, quominus statuamus $\zeta = \eta$; etsi enim hic valor campum aliquantillum diminuit, tamen is adhuc satis prodit notabilis. Tum autem fiet $\mathfrak{r} = 0$ sicque tertia lens quam minimam requiret aperturam, ita ut simul officium diaphragmatis angustissimi praestet.

COROLLARIUM 2

252. Quodsi vero statuamus $\zeta=\eta$, sufficit capere $\mathfrak{C}$ intra limites 0 et 1, unde simul C fit positivum. Tum vero capiatur

$$k=\frac{(\eta-1)(1+S)(\mathfrak{M}+\eta-1)}{2\,\mathfrak{M}\eta},$$

ex quo habebitur

$$P=\frac{2\,\mathfrak{M}\eta}{(1+S)(\mathfrak{M}+\eta-1)},$$

ita ut pro maioribus multiplicationibus sit proxime

$$k=\frac{(\eta-1)(1+S)}{2\eta} \quad \text{et} \quad P=\frac{2\eta}{1+S};$$

unde patet esse $P>1$ ideoque A positivum. Tum vero erit porro

$$\mathfrak{B}=-\frac{(P-1)}{\eta},$$

ita ut sit tam $\mathfrak{B}<0$ quam $B<0$. Denique hoc casu fiet

$$\mathfrak{D}=\frac{2\,\mathfrak{M}+2S(\eta-1)}{S(\mathfrak{M}+\eta-1)}$$

hincque

$$D=-\frac{2\,\mathfrak{M}+2S(\eta-1)}{\mathfrak{M}(2-S)+S(\eta-1)}$$

atque

$$M=\frac{2}{\mathfrak{M}+\eta-1}.$$

SCHOLION

253. Praeterquam quod hic casus $\zeta=\eta$ ad praxin inprimis est accommodatus, etiam hanc praerogativam complectitur, ut a littera $\mathfrak{C}$ reliqua elementa prorsus non pendeant, ita ut, quomodocunque $\mathfrak{C}$ accipiamus intra limites scilicet 0 et 1, reliqua elementa nullam inde mutationem patiantur. Hoc autem modo facillime evitari poterit, ne lens obiectiva nimis fiat exigua, quod vero insuper commodius per litteram A praestatur, nisi forte de telescopiis sit sermo, ubi $Aa=p$; superfluum igitur foret hic alios casus praeter istum $\zeta=\eta$ evolvere, atque nunc inprimis operae pretium erit aliquot

valores pro η considerare, ut inde intelligere queamus, quinam inde ad praxin maxime futuri sint idonei. Pro littera vero S, quam unitate minorem esse debere vidimus, statuamus semper $S=\frac{1}{2}$, quia hinc satis idoneum intervallum inter binas lentes postremas oritur. Tum autem nostrae conditiones sequenti modo exprimentur:

$$1.\quad k=\frac{3(\eta-1)(\mathfrak{M}+\eta-1)}{4\mathfrak{M}\eta},$$

$$2.\quad P=\frac{4\mathfrak{M}\eta}{3(\mathfrak{M}+\eta-1)},$$

$$3.\quad \mathfrak{B}=\frac{-(4\eta-3)\mathfrak{M}+3(\eta-1)}{3\eta(\mathfrak{M}+\eta-1)},$$

4. $\mathfrak{C}$, ut iam notavimus, arbitrio nostro permittitur, dummodo sit intra 0 et 1,

$$5.\quad \mathfrak{D}=\frac{4\mathfrak{M}+2(\eta-1)}{\mathfrak{M}+\eta-1} \quad \text{et} \quad D=\frac{-4\mathfrak{M}-2(\eta-1)}{3\mathfrak{M}+\eta-1}.$$

Hinc itaque distantiae focales erunt

$$p=\mathfrak{A}a, \quad q=-\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a=\frac{(4\eta-3)\mathfrak{M}-3(\eta-1)}{4\mathfrak{M}\eta^2}\cdot Aa,$$

$$r=-\frac{B\mathfrak{C}}{Pk}\cdot Aa=-\frac{B\mathfrak{C}}{\eta-1}\cdot Aa, \quad s=-\frac{BC\mathfrak{D}}{2\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{et} \quad t=\frac{BCD}{\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Deinde lentium intervalla

$$\text{primum} =Aa\left(1-\frac{1}{P}\right)=\frac{(4\eta-3)\mathfrak{M}-3(\eta-1)}{4\mathfrak{M}\eta}\cdot Aa,$$

$$\text{secundum} =-B\left(\frac{\mathfrak{M}(7\eta-3)+3\eta(\eta-2)+3}{4\mathfrak{M}\eta(\eta-1)}\right)Aa,$$

$$\text{tertium} =-BC\left(\frac{1}{\eta-1}+\frac{1}{2\mathfrak{M}}\right)Aa,$$

$$\text{quartum} =\frac{BCD}{2\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Deinde ob $M=\frac{2}{\mathfrak{M}+\eta+1}$ erit

$$O=\frac{1}{2}t\left(1+\frac{\eta-1}{\mathfrak{M}}\right).$$

Pro prima lente semidiameter aperturae erit $=x$ ex aequatione notissima definienda;

pro secunda autem ob

$$\omega = \frac{2\eta}{\mathfrak{M} + \eta - 1}$$

erit semidiameter aperturae

$$= \frac{\eta}{2(\mathfrak{M} + \eta - 1)} q + \frac{x}{P}$$

et ob $\mathfrak{r} = 0$ semidiameter aperturae tertiae lentis

$$= \frac{x}{Pk} = \frac{x}{\eta - 1};$$

duabus autem reliquis lentibus apertura maxima tribuitur.

EXEMPLUM 1

254. Sumamus $\eta = 2$ eritque $k = \frac{3(\mathfrak{M}+1)}{8\mathfrak{M}}$, et quia tantum de maioribus multiplicationibus agitur, sumi poterit $k = \frac{3}{8}$, hinc

$$P = \frac{8\mathfrak{M}}{3(\mathfrak{M}+1)} = \frac{8}{3} \text{ proxime.}$$

Porro

$$\mathfrak{B} = -\frac{5}{6} \quad \text{et} \quad B = -\frac{5}{11}, \quad \mathfrak{D} = 4 \quad \text{et} \quad D = -\frac{4}{3},$$

unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{5}{16} Aa, \quad r = \frac{5}{11} \mathfrak{C} Aa, \quad s = \frac{10}{11} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa, \quad t = \frac{20}{33} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{5}{8} Aa, \quad \text{secundum} = \frac{5}{8} Aa\,^{1)},$$

$$\text{tertium} = \frac{5}{11} C\left(1 + \frac{1}{2\mathfrak{M}}\right) Aa, \quad \text{quartum} = \frac{10}{33} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa$$

et

$$M = \frac{2}{\mathfrak{M}+1}, \quad \text{hinc} \quad z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\mathfrak{M}+1}$$

et

$$O = \frac{1}{2} t\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right);$$

1) Editio princeps: $\frac{5}{11} \cdot Aa$. Correxit E. Ch.

tum vero semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{q}{\mathfrak{M}+1} + \frac{3}{8}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = x.$$

Pro x autem inveniendo satisfiat huic aequationi:

$$\frac{1}{k^3} = \frac{\mu\mathfrak{M}x^3}{\mathfrak{A}^3a^3}\left\{\begin{array}{c} \lambda + \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A}) - \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{\mathfrak{B}^3P}(\lambda' + \nu\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B})) \\ - \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{B^3\mathfrak{C}^3Pk}(\lambda'' + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})) \\ - \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{B^3C^3\mathfrak{D}^3Pkk'}(\lambda''' + \nu\mathfrak{D}(1-\mathfrak{D})) + \frac{(1-\mathfrak{A})^3}{B^3C^3D^3}\cdot\frac{\lambda''''}{Pkk'S} \end{array}\right\}$$

quae aequatio commodius ita repraesentabitur:

$$\frac{1}{k^3} = \mu\mathfrak{M}x^3\left\{\begin{array}{c} \frac{\lambda + \nu\mathfrak{A}(1-\mathfrak{A})}{p^3} + \frac{1}{P^4q^3}(\lambda' + \nu\mathfrak{B}(1-\mathfrak{B})) \\ + \frac{1}{(Pk)^4r^3}(\lambda'' + \nu\mathfrak{C}(1-\mathfrak{C})) \\ + \frac{1}{(Pkk')^4s^3}(\lambda''' + \nu\mathfrak{D}(1-\mathfrak{D})) + \frac{\lambda''''}{(Pkk'S)^4t^3} \end{array}\right\}$$

COROLLARIUM

255. Si haec ad telescopia transferantur ponendo $\mathfrak{A}a = Aa = p$ et $\mathfrak{M} = m$, fient distantiae focales

$$q = \frac{5}{16}p, \quad r = \frac{5}{11}\mathfrak{C}p, \quad s = \frac{10}{11}\cdot\frac{C}{m}\cdot p \quad \text{et} \quad t = \frac{20}{33}\cdot\frac{C}{m}\cdot p,$$

intervalla

$$\text{primum} = \frac{5}{8}p, \quad \text{secundum} = \frac{5}{8}p,$$

$$\text{tertium} = \frac{5}{11}C\left(1+\frac{1}{2m}\right)p \quad \text{et} \quad \text{quartum} = \frac{10}{33}\cdot\frac{C}{m}\cdot p$$

et semidiameter campi $\Phi = \frac{1718}{\mathfrak{M}+1}$ min.

Longitudo ergo erit propemodum $= \frac{110}{88}p + \frac{5}{11}Cp$ [1]). Nunc autem p ex aequatione ante data definiri poterit, ubi erit $\mathfrak{A} = 0$ ob $a = \infty$.

1) Editio princeps: $\frac{95}{88}p + \frac{5}{11}C\cdot p$. Correxit E. Ch.

EXEMPLUM 2

256. Sit nunc $\eta = 3$; erit

$$k = \frac{\mathfrak{M} + 2}{2\mathfrak{M}},$$

sumi ergo poterit

$$k = \frac{1}{2}, \quad P = \frac{4\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} + 2} = 4,$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{3\mathfrak{M} + 2}{3(\mathfrak{M} + 2)} = -1, \quad \text{ergo} \quad B = -\frac{1}{2},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{4\mathfrak{M} + 4}{\mathfrak{M} + 2} = 4, \quad \text{ergo} \quad D = -\frac{4}{3}.$$

Hinc ergo fient distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{1}{4}Aa, \quad r = \frac{1}{4}\mathfrak{C}Aa, \quad s = \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{3} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{3}{4}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{3}{8}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{1}{4}C\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)Aa, \quad \text{quartum} = \frac{1}{3} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa;$$

hinc porro erit

$$M = \frac{2}{\mathfrak{M} + 2},$$

hinc

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\mathfrak{M} + 2}$$

et

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{M}}\right);$$

tum vero semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3q}{2(\mathfrak{M} + 2)} + \frac{1}{4}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{1}{2}x.$$

Cetera se habent ut ante.

COROLLARIUM

257. Facta applicatione ad telescopia, ubi fit $Aa = p$, omnia elementa facile determinantur ut ante; tum vero longitudo instrumenti omissis partibus per $\mathfrak{M}$ divisis erit $= \frac{9}{8}p + \frac{1}{4}Cp$, quae minor est quam casu praecedente.

EXEMPLUM 3

258. Statuamus $\eta = 6$, ut fiat $M = \frac{2}{\mathfrak{M} + 5}$, eritque

$$k = \frac{5(\mathfrak{M} + 5)}{8\mathfrak{M}} = \frac{5}{8} \text{ proxime,}$$

$$P = 8, \quad \mathfrak{B} = \frac{-7\mathfrak{M} + 5}{6(\mathfrak{M} + 5)} = -\frac{7}{6} \text{ proxime,}$$

unde fit

$$B = -\frac{7}{13}, \quad \mathfrak{D} = 4 \quad \text{et} \quad D = -\frac{4}{3};$$

unde distantiae focales prodibunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{7}{48}Aa, \quad r = \frac{7}{65}\mathfrak{C}Aa, \quad s = \frac{14}{13}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad t = \frac{28}{39}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{7}{8}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{7}{40}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{7}{13}C\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2\mathfrak{M}}\right)Aa, \quad \text{quartum} = \frac{14}{39}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Praeterea

$$z = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\mathfrak{M} + 5} \quad \text{et} \quad O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{5}{\mathfrak{M}}\right);$$

tum vero semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3q}{\mathfrak{M} + 5} + \frac{1}{8}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{1}{5}x.$$

COROLLARIUM

259. Translatione igitur ad telescopia facta prodiret hoc casu eorum longitudo $= \frac{21}{20}p + \frac{7}{65}Cp$, quae longitudo satis est exigua, ut etiam in aliis generibus vix minor sperari queat.

SCHOLION

260. Etsi iste casus $\zeta = \eta$ in praxi summum usum praestare videtur, tamen etiam considerari conveniet quempiam casum, quo $\zeta > \eta$, quandoquidem

hoc modo campo quodpiam augmentum adfertur. Manente autem $S = \frac{1}{2}$ alter limes pro ζ erat

$$\zeta < \eta + \frac{3(\eta - 1)}{4} \quad \text{sive} \quad \zeta < \frac{7}{4}\eta - \frac{3}{4}.$$

Huic autem limiti ipsi aequari nequit, quia alioquin $\mathfrak{C}$ deberet esse $= 1$ hincque $C = \infty$. Sumamus igitur

$$\zeta = \eta + \frac{2}{4}(\eta - 1) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}$$

ac reperietur $\mathfrak{C} > \frac{2}{3}$ et $\mathfrak{C} < 1$. Sumatur igitur $\mathfrak{C} = \frac{3}{4}$, ut fiat $C = 3$, hincque fiet

$$k = \frac{(\eta - 1)(2\mathfrak{M} + 15(\eta - 1))}{12\mathfrak{M}(3\eta - 1)} \quad \text{et} \quad P = \frac{12\mathfrak{M}(3\eta - 1)}{2\mathfrak{M} + 15(\eta - 1)}$$

hincque porro

$$\mathfrak{B} = \frac{-4\mathfrak{M}(18\eta - 7) + 30(\eta - 1)}{(3\eta - 1)(2\mathfrak{M} + 15(\eta - 1))}$$

et

$$\mathfrak{D} = \frac{24\mathfrak{M} + 10(\eta - 1)}{6\mathfrak{M} + 5(\eta - 1)} \quad \text{seu proxime} \quad \mathfrak{D} = 4.$$

Tum vero prodibit

$$M = \frac{12}{6\mathfrak{M} + 5(\eta - 1)} = \frac{2}{\mathfrak{M} + \frac{5}{6}(\eta - 1)},$$

cum antea fuisset

$$M = \frac{2}{\mathfrak{M} + \eta - 1}.$$

Quodsi iam sumamus ut in exemplo secundo $\eta = 3$, fient haec elementa

$$k = \frac{\mathfrak{M} + 15}{24\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad P = \frac{48\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} + 15},$$

hinc

$$\mathfrak{B} = \frac{-47\mathfrak{M} + 15}{4(\mathfrak{M} + 15)}, \quad B = \frac{-47\mathfrak{M} + 15}{51\mathfrak{M} + 45},$$

tum

$$\mathfrak{C} = \frac{3}{4}, \quad C = 3, \quad \mathfrak{D} = 4 \quad \text{et} \quad D = -\frac{4}{3};$$

unde singula momenta pro constructione definiri possunt. Quia vero hic tanti occurrunt numeri, quos prae $\mathfrak{M}$ negligere non amplius licet, in adplicatione ad exempla statim quoque pro $\mathfrak{M}$ determinatum valorem assumi con-

veniet. Praeterea vero hic ad specialiora non progredimur, quia adhuc lente obiectiva simplice utimur, ita ut confusio aliter tolli nequeat nisi aperturam lentis obiectivae diminuendo; quod remedium cum praxis sponte offerat, non opus erit litteram x molesto illo calculo definire; siquis enim microscopium secundum huiusmodi mensuras construxerit, ipse usus aperturam declarabit; quando autem in sequente capite per multiplicationem lentis obiectivae omnem confusionem ad nihilum redigemus, tum demum necesse erit completas determinationes pro singulis momentis, uti hactenus fecimus, exhibere.

PROBLEMA 2

261. *Microscopium huius generis ex quinque lentibus construere, quae ita sint dispositae, ut prior imago realis in intervallum secundum, posterior vero in intervallum quartum incidat.*

SOLUTIO

Quatuor ergo litterarum P, Q, R, S secunda et quarta erunt negativae; unde ponatur $Q = -k$ et $S = -k'$, ut sit $PkRk' = \frac{ma}{h} = \mathfrak{M}$; hinc erit ultimae lentis distantia focalis

$$t = \frac{ABCD}{PkRk'} \cdot a = \frac{ABCD}{\mathfrak{M}} \cdot a,$$

quae debet esse positiva aeque ac lentium intervalla, quae sunt

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -\frac{AB}{P} \cdot a\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABC}{Pk} \cdot a\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad \text{quartum} = +\frac{ABCD}{PkR} \cdot a\left(1 + \frac{1}{k'}\right);$$

ergo ut tam ultima lens quam ultimum intervallum fiant positiva, debet esse $ABCD > 0$. Hinc ut tertium quoque fiat positivum, debet esse

$$-D\left(1 - \frac{1}{R}\right) > 0$$

sicque circa D nihil definitur. Ob secundum autem intervallum debet esse

$-AB>0$ et ob primum $A\left(1-\frac{1}{P}\right)>0$. Tum ergo debebit esse $CD<0$. Statuatur nunc

$$M=\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}+\mathfrak{t}}{\mathfrak{M}-1},$$

et quia campus maximus desideratur, statim sumi poterit $\mathfrak{s}=1$ et $\mathfrak{t}=1$, ut fiat

$$M=\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+2}{\mathfrak{M}-1}$$

hincque distantia oculi

$$O=\frac{t}{M\mathfrak{M}};$$

quae cum sit positiva, destructio marginis praebet

$$0=\frac{\mathfrak{q}}{P}-\frac{\mathfrak{r}}{Pk}-\frac{1}{PkR}+\frac{1}{PkRk'},$$

unde colligitur

$$\frac{1}{k'}=-\mathfrak{q}kR+\mathfrak{r}R+1;$$

hinc erit

$$PkR=\mathfrak{M}(1+\mathfrak{r}R-\mathfrak{q}kR)$$

sicque patet esse $1+\mathfrak{r}R>\mathfrak{q}kR$. Praeterea vero considerare debemus sequentes aequationes:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q}=(P-1)M,$$

$$2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}=-(1+Pk)M-\mathfrak{q},$$

$$3.\quad \mathfrak{D}=-(1+PkR)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r}.$$

Ponatur hic ut ante brevitatis gratia

$$\frac{1-P}{\mathfrak{B}}=\zeta \quad \text{et} \quad 1+Pk=\eta$$

fietque

$$\mathfrak{q}=-\zeta M \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}=\frac{(\zeta-\eta)M}{\mathfrak{C}},$$

unde colligitur

$$2+\mathfrak{q}+\mathfrak{r}=\frac{2\mathfrak{C}+(\zeta(1-\mathfrak{C})-\eta)M}{\mathfrak{C}}=(\mathfrak{M}-1)M;$$

ex qua aequatione deducitur

$$M=\frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}-1)-\zeta(1-\mathfrak{C})+\eta}=\frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta},$$

ex quo valore vicissim erit

$$\mathfrak{q} = -\frac{2\zeta\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta}$$

et

$$\mathfrak{r} = \frac{2(\zeta-\eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta}.$$

Nunc ut marginis colorati rationem habeamus, erit statim

$$1+\mathfrak{r}R-\mathfrak{q}kR = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta+2(\zeta-\eta)R+2\zeta\mathfrak{C}kR}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta}.$$

Et cum ob $Pk=\eta-1$ sit $PkR=(\eta-1)R$, erit

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(\eta-1)R(\mathfrak{M}+\zeta-1)-(\eta-1)(\zeta-\eta)R-\mathfrak{M}\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)\\ +\mathfrak{M}(\zeta-\eta)-2\mathfrak{M}(\zeta-\eta)R-2\mathfrak{M}\zeta\mathfrak{C}kR=0.\end{aligned}$$

Antequam autem hinc vel k vel R determinemus, considerare debemus rationem litterae $\mathfrak{D}$ ex superiori tertia aequatione; cum igitur PkR sit sine dubio numerus magnus involvens $\mathfrak{M}$, facile intelligitur litteram $\mathfrak{D}$ esse negativam; unde etiam erit D negativum adeoque concludimus fore $C>0$ hincque $\mathfrak{C}<1$. Ob eandem vero rationem debebit esse $R>1$, ita ut haec littera aliquatenus tanquam nota spectari possit; quare ex illa aequatione colligimus

$$k=\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{C}(\eta-1)R(\mathfrak{M}+\zeta-1)-(\eta-1)(\zeta-\eta)R\\ -\mathfrak{M}\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)+\mathfrak{M}(\zeta-\eta)-2\mathfrak{M}(\zeta-\eta)R\end{array}\right\}:2\mathfrak{M}\zeta\mathfrak{C}R$$

hincque $P=\frac{(\eta-1)}{k}$, ita ut sit $\eta>1$. Quare ut valor ipsius k fiat positivus, debet esse

$$\begin{aligned}R(\mathfrak{C}(\eta-1)(\mathfrak{M}+\zeta-1)-(\eta-1)(\zeta-\eta)-2\mathfrak{M}(\zeta-\eta))\\ >\mathfrak{M}(\mathfrak{C}\mathfrak{M}+\mathfrak{C}(\zeta-1)-\zeta+\eta),\end{aligned}$$

ad quod primo requiritur, ut quantitas litteram R multiplicans sit positiva, et quia $\mathfrak{M}$ est numerus praemagnus, ipsius coefficiens ante omnia debet esse positivus, unde colligimus

$$\mathfrak{C}(\eta-1)>2(\zeta-\eta),$$

unde concluditur

$$\mathfrak{C}>\frac{2(\zeta-\eta)}{\eta-1};$$

quia igitur $\mathfrak{C} < 1$, erit

$$2(\zeta - \eta) < \eta - 1 \quad \text{sicque} \quad \zeta < \frac{3\eta - 1}{2}.$$

Qua conditione impleta debet esse

$$R > \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{C}\mathfrak{M} + \mathfrak{C}(\zeta - 1) - \zeta + \eta)}{\mathfrak{C}(\eta - 1)(\mathfrak{M} + \zeta - 1) - 2\mathfrak{M}(\zeta - \eta) - (\eta - 1)(\zeta - \eta)}$$

atque hinc retrogrediendo omnia elementa determinabuntur. Reliqua vero expediuntur ut in praecedente problemate.

COROLLARIUM 1

262. Hic igitur littera R denotabit numerum magnum $\mathfrak{M}$ involventem; deinde conditio $\zeta < \frac{3\eta - 1}{2}$ instituto nostro maxime favet, cum campi conditio inprimis postulet, ne ζ ultra necessitatem augeatur. Quare, cum semper sit $\eta > 1$, commodissime videtur statui posse $\zeta = \eta$ uti in praecedente problemate, ita ut tertiae lentis apertura iterum fiat minima prodeatque

$$M = \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\eta - \mathfrak{C}} = \frac{2}{\mathfrak{M} + \eta - 1}.$$

COROLLARIUM 2

263. Sumto autem $\zeta = \eta$ pro $\mathfrak{C}$ limites erunt $\mathfrak{C} < 1$ et $\mathfrak{C} > 0$. Porro capi debet $R > \frac{\mathfrak{M}}{\eta - 1}$ indeque fiet

$$k = \frac{((\eta - 1)R - \mathfrak{M})(\mathfrak{M} + \eta - 1)}{2\mathfrak{M}\eta R}$$

et

$$P = \frac{2\mathfrak{M}\eta(\eta - 1)R}{((\eta - 1)R - \mathfrak{M})(\mathfrak{M} + \eta - 1)}.$$

Praeterea vero erit

$$\mathfrak{B} = \frac{-(\eta - 1)R((2\eta - 1)\mathfrak{M} - \eta + 1) - \mathfrak{M}(\mathfrak{M} + \eta - 1)}{\eta((\eta - 1)R - \mathfrak{M})(\mathfrak{M} + \eta - 1)}.$$

Denique vero reperietur

$$\mathfrak{D} = -\frac{2(1 + (\eta - 1)R - \eta)}{\mathfrak{M} + \eta - 1}$$

sive, cum $\mathfrak{M}$ et R sint numeri praemagni, erit proxime

$$\mathfrak{D} = -\frac{2(\eta-1)R}{\mathfrak{M}},$$

qui valor certo est negativus, ut supra iam posuimus.

COROLLARIUM 3

264. Quin etiam statui poterit $\zeta = 0$; unde pro $\mathfrak{C}$ limites erunt $\mathfrak{C} < 1$ et $\mathfrak{C} > -\frac{2\eta}{\eta-1}$; cui satisfit, dummodo $\mathfrak{C}$ intra limites 1 et 0 contineatur. Tum vero sumi debebit

$$R > \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{C}\mathfrak{M} - \mathfrak{C} + \eta)}{\mathfrak{C}(\eta-1)(\mathfrak{M}-1) + 2\mathfrak{M}\eta + \eta(\eta-1)}$$

sive ob $\mathfrak{M}$ numerum praemagnum

$$R > \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}{\mathfrak{C}(\eta-1) + 2\eta}.$$

Verum hinc sequitur porro $k = \infty$ et $P = 0$, ita ut sit $Pk = \eta - 1$. Praeterea vero prodit

$$\mathfrak{B} = \infty \quad \text{et} \quad B = -1.$$

Denique vero ob

$$\mathfrak{q} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = -\frac{\eta M}{\mathfrak{C}}$$

erit

$$\mathfrak{D} = -\left(1 + (\eta-1)R - \frac{\eta}{\mathfrak{C}}\right)M$$

ideoque ob

$$M = \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}-1) + \eta},$$

qui valor ipsius M aliquanto minor est quam casu praecedente, fiet

$$\mathfrak{D} = -\frac{2(\eta-1)R}{\mathfrak{M}}.$$

SCHOLION

265. Quantumvis hic casus paradoxus videatur cum ob $\mathfrak{B} = \infty$ tum vero ob $P = 0$, tamen revera est realis et ad casum in praecedente capite expositum reducitur; quia enim $\mathfrak{B} = \infty$, secundae lentis distantia focalis est

infinita sicque res eodem redit, ac si secunda lens plane abesset, ita ut non amplius quaestio sit de eius loco; quare, etsi primum intervallum prodeat

$$= Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) = -\infty$$

et secundum

$$= Aa\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{\eta - 1}\right) = +\infty,$$

tamen horum summa, quae sola nunc est spectanda, fit finita

$$= Aa\left(1 + \frac{1}{\eta - 1}\right) = \frac{\eta}{\eta - 1}\cdot Aa.$$

Cum igitur tantum quatuor lentes hic habeantur, hic casus ad praecedens caput est referendus. Interim tamen hinc incommodum nasci debebit, quando ζ prope ad 0 accedit, quia tum P etiam erit unitate minus, ita ut A debeat esse numerus negativus et $B > 0$. Cum autem sit $\mathfrak{B} = \frac{1-P}{\zeta}$, erit quidem $\mathfrak{B} > 0$, verum insuper necesse est, ut sit $1 - P < \zeta$ vel $P > 1 - \zeta$, sive P contineri debebit intra limites 1 et $1 - \zeta$ seu esse debet $k < \frac{\eta - 1}{1 - \zeta}$; quare, cum $\mathfrak{M}$ et R sint numeri praemagni, debebit esse

$$R\left(\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{1-\zeta} - 2(\zeta - \eta)\right) < \mathfrak{C}\mathfrak{M},$$

quod sponte evenit ob $\zeta < \eta$, si fuerit

$$\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{(1-\zeta)(\zeta-\eta)} > 2 \quad \text{sive} \quad \mathfrak{C} > \frac{2(1-\zeta)(\zeta-\eta)}{(\eta-1)(1-3\zeta)}.$$

Sin autem sit $\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{(1-\zeta)(\zeta-\eta)} < 2$, debet esse

$$R < \frac{(1-\zeta)\mathfrak{C}\mathfrak{M}}{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta) - 2(\zeta-\eta)(1-\zeta)},$$ [1]

quibus observatis aliquot casus fusius evolvamus.

1) Editio princeps: *quare cum $\mathfrak{M}$ et R sint numeri praemagni, debebit esse*

$$R\left(\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{1-\zeta} - 2\right) < \mathfrak{C}\mathfrak{M}$$

quod sponte evenit, si fuerit

$$\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{1-\zeta} < 2 \quad \textit{sive} \quad \mathfrak{C} < \frac{2(1-\zeta)}{(\eta-1)(1-3\zeta)}.$$

Sin autem sit

$$\frac{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta)}{1-\zeta} > 2 \ \textit{debet esse}\ R < \frac{(1-\zeta)\mathfrak{C}\mathfrak{M}}{\mathfrak{C}(\eta-1)(1-3\zeta) - 2(1-\zeta)} \cdots$$

Correxit E. Ch.

CASUS 1
QUO $\zeta = \eta$

266. Hoc casu iam vidimus lentem tertiam nostro arbitrio relinqui, dummodo pro ea capiatur $\mathfrak{C} < 1$ et $\mathfrak{C} > 0$, ut C fiat numerus positivus; unde, si circumstantiae postulent, ut C sit numerus satis magnus, tum $\mathfrak{C}$ parum ab unitate deficere debebit; deinde etiam notavimus capi debere $R > \frac{\mathfrak{M}}{\eta - 1}$; unde, cum semper sit $\eta > 1$, si etiam fuerit > 2, tunc commode sumi poterit $R = \mathfrak{M}$. Notetur autem litteram η non nimis magnam sumi convenire, quia pro campo fit

$$M = \frac{2}{\mathfrak{M} + \eta - 1}.$$

Deinde vero prodit

$$k = \frac{((\eta - 1)R - \mathfrak{M})(\mathfrak{M} + \eta - 1)}{2\mathfrak{M}\eta R},$$

quare pro maioribus multiplicationibus tuto sumi poterit

$$k = \frac{(\eta - 1)R - \mathfrak{M}}{2\eta R};$$

unde patet litteram k eo fore minorem, quo minus R limitem praescriptum $\frac{\mathfrak{M}}{\eta - 1}$ superet; unde fit

$$P = \frac{\eta - 1}{k} = \frac{2\eta(\eta - 1)R}{(\eta - 1)R - \mathfrak{M}}.$$

Pro reliquis elementis primo prodit

$$\mathfrak{B} = \frac{-(\eta - 1)R((2\eta - 1)\mathfrak{M} - \eta + 1) - \mathfrak{M}(\mathfrak{M} + \eta - 1)}{\eta((\eta - 1)R - \mathfrak{M})(\mathfrak{M} + \eta - 1)}$$

hincque proxime

$$\mathfrak{B} = \frac{-(\eta - 1)(2\eta - 1)R - \mathfrak{M}}{\eta(\eta - 1)R - \eta\mathfrak{M}},$$

qui valor manifesto est negativus, ex quo etiam B erit negativum. Deinde cum sit $P > 1$, ob eandem rationem littera A debebit esse positiva; ex quo productum AB ob

$$B = \frac{-(\eta - 1)(2\eta - 1)R - \mathfrak{M}}{(\eta - 1)(3\eta - 1)R - (\eta - 1)\mathfrak{M}}$$

sponte fit negativum, prorsus uti conditiones praescriptae postulant. Denique

vero reperitur

$$\mathfrak{D} = -\frac{2(1+(\eta-1)R-\eta)}{\mathfrak{M}+\eta-1}$$

ideoque proxime

$$\mathfrak{D} = -\frac{2(\eta-1)R}{\mathfrak{M}};$$

unde fit

$$D = -\frac{2(\eta-1)R}{\mathfrak{M}+2(\eta-1)R}.$$

His definitis erunt primo distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a = \frac{(\eta-1)(2\eta-1)R+\mathfrak{M}}{2\eta^2(\eta-1)R}\cdot Aa,$$

$$r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{\eta-1}\cdot a, \quad s = \frac{ABC\mathfrak{D}}{(\eta-1)R}\cdot a \quad \text{et} \quad t = \frac{ABCD}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

deinde vero intervalla

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{\eta-1}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABCa}{\eta-1}\left(1-\frac{1}{R}\right), \quad \text{quartum} = ABCDa\left(\frac{1}{(\eta-1)R}+\frac{1}{\mathfrak{M}}\right).$$

Distantia vero oculi fiet

$$O = \frac{t}{M\mathfrak{M}} = \frac{t}{2}\cdot\frac{\mathfrak{M}+\eta-1}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2}t\left(1+\frac{\eta-1}{\mathfrak{M}}\right) = \frac{1}{2}t \text{ proxime.}$$

Pro aperturis vero lentium primae quidem apertura tutissime per experientiam definitur; unde reperitur littera x ex eaque mensura claritatis $=\frac{20x}{\mathfrak{M}}$, si scilicet x in digitis exprimatur.

Pro secunda vero lente cum sit

$$\mathfrak{q} = -\eta M = -\frac{2\eta}{\mathfrak{M}+\eta-1} = -\frac{2\eta}{\mathfrak{M}},$$

erit eius aperturae semidiameter

$$= \frac{1}{4}\mathfrak{q}q + \frac{x}{P} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta}{\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{x}{P}.$$

Pro tertia vero lente ob $\mathfrak{r}=0$ sufficit aperturae semidiameter $=\frac{x}{\eta-1}$; reliquas vero lentes utrinque aeque convexas confici convenit.

COROLLARIUM

267. Si sumatur $R=\frac{\mathfrak{M}}{\eta-1}$, ut fiat $k=0$ et $P=\infty$ existente $Pk=\eta-1$, tum fiet $\mathfrak{B}=\frac{1-P}{\eta}=-\infty$ et $B=-1$. Tum igitur secunda lens in ipsam imaginem realem priorem incidet ob primum intervallum $=Aa=\alpha$ eiusque distantia focalis erit $q=\frac{Aa}{\eta}$. At vero secundum intervallum hoc casu evadet $=-\frac{ABa}{\eta-1}=\frac{Aa}{\eta-1}$. Reliqua vero definiuntur ut in genere, si modo notetur fore $\mathfrak{D}=-2$ et $D=-\frac{2}{3}$.

EXEMPLUM 1

[267a].[1]) Ponamus $\eta=2$ et capi debebit $R>\mathfrak{M}$. Nihil vero impedit, quominus secundum praecedens corollarium sumamus $R=\mathfrak{M}$, ita ut tum fiat $k=0$ et $P=\infty$; quare primo distantiae focales ita exprimentur:

$$p=\mathfrak{A}a,\quad q=\frac{Aa}{2},\quad r=A\mathfrak{C}a,\quad s=\frac{2AC}{\mathfrak{M}}\cdot a\quad \text{et}\quad t=\frac{2}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa=\frac{1}{3}s.$$

Deinde intervalla ita se habebunt:

$$\text{primum}=Aa,\qquad \text{secundum}=Aa,$$
$$\text{tertium}=C\left(1-\frac{1}{\mathfrak{M}}\right)Aa,\qquad \text{quartum}=\frac{4}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa;$$

distantia vero oculi

$$O=\frac{1}{2}t\left(1+\frac{1}{\mathfrak{M}}\right).$$

Pro valore ipsius x sive per experientiam sive per formulam notam definito fiat secundae lentis semidiameter aperturae $=\frac{q}{\mathfrak{M}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Aa}{\mathfrak{M}}$ et tertiae lentis $=x$; semidiameter spatii conspicui erit $z=\frac{\alpha}{2\mathfrak{M}}$ et mensura claritatis $=\frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

COROLLARIUM

268. Hae formulae quoque ad telescopia accommodari poterunt sumendo $Aa=p$ et $\mathfrak{M}=m$. Tum vero sumi debebit ipsa distantia focalis

$$p=m\sqrt[3]{\mu m\left(\lambda+*+\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3}+\frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)}$$

omissis terminis sequentibus per $\mathfrak{M}$ divisis.

1) Vide notam p. 284. E. Ch.

EXEMPLUM 2

269. Sit nunc $\eta = 3$, ut esse debeat $R > \frac{\mathfrak{M}}{2}$, sumaturque $R = \mathfrak{M}$, unde fiet $k = \frac{1}{6}$ et $P = 12$; quare reliqua elementa fient

$$\mathfrak{B} = -\frac{11}{3} \quad \text{hincque} \quad B = -\frac{11}{14} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} = -4 \quad \text{et} \quad D = -\frac{4}{5},$$

unde distantiae focales evadent

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{11}{36}Aa, \quad r = \frac{11}{28}\mathfrak{C}Aa, \quad s = \frac{11}{7}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{et} \quad t = \frac{22}{35}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa = \frac{2}{5}s$$

atque intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{11}{12}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{11}{24}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{11}{28}C\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)Aa, \quad \text{quartum} = \frac{33}{35}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

oculique distantia

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{M}}\right);$$

spatii vero in obiecto conspicui erit semidiameter

$$z = \frac{a}{2(\mathfrak{M}+2)}.$$

Definito x sive per experientiam sive per formulam notam erit semidiameter aperturae

$$\text{secundae lentis} = \frac{3}{2}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{x}{12} \quad \text{et tertiae} = \frac{x}{2}$$

et gradus claritatis $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

COROLLARIUM

270. Hae formulae etiam ad telescopia accommodari possunt; erit enim $Aa = p$ et $\mathfrak{M} = m$. Tum vero lentis obiectivae distantia focalis definitur per hanc formulam:

$$p = m\sqrt[3]{\mu m}\left(\lambda + \frac{1}{12}\left(\frac{3^3}{11^3}\lambda' - \frac{3\cdot 14\nu}{11^2}\right) + \frac{14^3}{11^3\cdot 2}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)\right).$$

Longitudo huius telescopii erit circiter $= \left(\frac{11}{8} + \frac{11}{28}C\right)p$.

EXEMPLUM 3

271. Sit nunc $\eta = 6$, ut esse debeat $R > \frac{\mathfrak{M}}{5}$, et sumatur $R = \frac{\mathfrak{M}}{2}$ ac reperitur $k = \frac{1}{4}$ et $P = 20$. Hinc porro fiet $\mathfrak{B} = -\frac{19}{6}$ et $B = -\frac{19}{25}$. Tum vero $\mathfrak{D} = -5$ et $D = -\frac{5}{6}$. Distantiae ergo focales ita se habebunt:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{19}{120}Aa, \quad r = \frac{19}{125}\mathfrak{C}Aa, \quad s = \frac{38}{25}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

et

$$t = \frac{19}{30}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{seu} \quad t = \frac{5}{12}s$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{29}{10}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{19}{100}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{19}{125}C\left(1 - \frac{2}{\mathfrak{M}}\right)Aa \quad \text{et} \quad \text{quartum} = \frac{133}{150}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

oculique distantia

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{5}{\mathfrak{M}}\right),$$

spatii conspicui semidiameter

$$z = \frac{a}{2(\mathfrak{M}+5)}.$$

Definito denique x ut ante erit semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3}{\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{x}{20} \quad \text{et tertiae} = \frac{1}{5}x;$$

gradus autem claritatis manet $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

EXEMPLUM 4

272. Sit ut ante $\eta = 6$, sumatur vero $R = \mathfrak{M}$ ac reperitur $k = \frac{1}{8}$ et $P = 15$. Hinc porro fit $\mathfrak{B} = -\frac{7}{8}$ et $B = -\frac{7}{10}$, at $\mathfrak{D} = -10$ et $D = -\frac{10}{11}$. Distantiae ergo focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{7}{45}Aa, \quad r = \frac{7}{50}\mathfrak{C}Aa,$$

$$s = \frac{7}{5}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad t = \frac{7}{11}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{seu} \quad t = \frac{5}{11}s$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{14}{15}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{14}{75}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{7}{50}C\left(1-\frac{1}{\mathfrak{M}}\right)Aa, \quad \text{quartum} = \frac{42}{55}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

et distantia oculi

$$O = \frac{1}{2}t\left(1+\frac{5}{\mathfrak{M}}\right)$$

pariter ac reliqua momenta se habet ut ante.

COROLLARIUM

273. Si haec ad telescopia transferantur ponendo $Aa = p$ et $\mathfrak{M} = m$, casus hic posterior antecedenti praeferendus videtur, siquidem praebet longitudinem parumper minorem, quippe quae neglectis terminis per $\mathfrak{M}$ divisis erit $= \left(1\frac{3}{25}+\frac{7}{50}C\right)p$, cum ex exemplo praecedente fuerit $= \left(1\frac{7}{50}+\frac{19}{125}C\right)p$. Casu ergo ultimi exempli lentis obiectivae distantia focalis ita definietur, ut sit

$$p = m\sqrt[3]{\mu m}\left(\lambda + \frac{1}{15}\left(\frac{3^3}{7^3}\lambda' - \frac{30\nu}{7^2}\right) + \frac{200}{343}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3}+\frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right)\right).$$

CASUS 2
QUO $\zeta = 1$

274. Cum sit $\zeta = 1$, limites pro $\mathfrak{C}$ erunt $\mathfrak{C} < 1$ et $\mathfrak{C} > -2$, ita ut $\mathfrak{C}$ aeque arbitrio nostro permittatur ac ante. Tum vero esse debebit

$$R > \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{C}\mathfrak{M}+\eta-1)}{(\eta-1)(\mathfrak{C}\mathfrak{M}+2\mathfrak{M}+\eta-1)}$$

seu neglectis minoribus partibus

$$R > \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}{(\eta-1)(2+\mathfrak{C})}.$$

Statuatur ergo $R = i\mathfrak{M}$ sumendo scilicet

$$i > \frac{\mathfrak{C}}{(\eta-1)(2+\mathfrak{C})}.$$

Tum ergo fiet

$$k = \frac{\mathfrak{C}(\eta i - i - 1) + 2i(\eta - 1)}{2i\mathfrak{C}} \quad \text{et} \quad P = \frac{2i(\eta - 1)\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(i(\eta - 1) - 1) + 2i(\eta - 1)}.$$

Hinc ergo fiet

$$P - 1 = \frac{\mathfrak{C}(i(\eta - 1) + 1) - 2i(\eta - 1)}{\mathfrak{C}(i(\eta - 1) - 1) + 2i(\eta - 1)},$$

qui valor erit positivus seu $P > 1$, si fuerit

$$i < \frac{\mathfrak{C}}{(\eta - 1)(2 - \mathfrak{C})}.$$

Hoc ergo casu prodit

$$\mathfrak{B} = \frac{-\mathfrak{C}(i(\eta - 1) + 1) + 2i(\eta - 1)}{\mathfrak{C}(i(\eta - 1) - 1) + 2i(\eta - 1)};$$

qui valor cum sit negativus, etiam B erit negativum et ob $P > 1$ debebit A esse positivum, ut superiores conditiones postulant; sin autem esset

$$i > \frac{\mathfrak{C}}{(\eta - 1)(2 - \mathfrak{C})},$$

tum foret $P < 1$ sumique deberet A negative ac prodiret $\mathfrak{B} > 0$; unde, ut etiam B fiat positivum, insuper necesse est, ut sit $\mathfrak{B} < 1$, quod manifestum est, cum sit $\mathfrak{B} = 1 - P$. Postea vero pro $\mathfrak{D}$ inveniendo notetur esse

$$M = \frac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\mathfrak{M} + \eta - 1}$$

et

$$\mathfrak{q} = -M \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = -\frac{(\eta - 1)M}{\mathfrak{C}},$$

ex quibus prodit

$$\mathfrak{D} = -i(\eta - 1)M\mathfrak{M} = -2i(\eta - 1);$$

illi vero valores abibunt in hos:

$$\mathfrak{q} = -\frac{2}{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r} = -\frac{2(\eta - 1)}{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}.$$

His valoribus inventis considerentur primo distantiae focales, quae sunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{\eta - 1}\cdot a, \quad s = \frac{ABC\mathfrak{D}}{i(\eta - 1)\mathfrak{M}}\cdot a \quad \text{et} \quad t = \frac{ABCD}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Tum vero intervalla

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{\eta-1}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABCa}{\eta-1}\left(1-\frac{1}{i\mathfrak{M}}\right), \quad \text{quartum} = \frac{ABCDa}{\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{i(\eta-1)}+1\right),$$

distantia vero oculi

$$O = \frac{t}{\mathfrak{M}M} = \frac{1}{2}t\left(1+\frac{\eta-1}{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}\right).$$

Deinde simili modo, ut iam ante notavimus, littera x sive per experientiam sive ex formula nota definiri poterit. Tum vero erit lentis secundae semidiameter aperturae

$$= \frac{1}{4}\mathfrak{q}q + \frac{x}{P} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{x}{P},$$

tertiae vero lentis

$$= \frac{1}{4}\mathfrak{r}r + \frac{x}{\eta-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\eta-1)r}{\mathfrak{C}\mathfrak{M}} + \frac{x}{\eta-1},$$

reliquae vero lentes, quia sunt utrinque aeque convexae, maximam aperturam admittunt. Pro spatio denique conspicuo erit

$$z = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{C}a}{\mathfrak{C}\mathfrak{M}+\eta-1} = \frac{a}{2\mathfrak{M}} \text{ proxime}$$

et mensura claritatis $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

COROLLARIUM 1

275. Si littera i contineatur intra hos limites, scilicet

$$i > \frac{\mathfrak{C}}{(\eta-1)(2+\mathfrak{C})} \quad \text{et} \quad i < \frac{\mathfrak{C}}{(\eta-1)(2-\mathfrak{C})},$$

tum fit $P > 1$ et litterae $\mathfrak{B}$ et B negativae, littera vero A sumi debet positive; unde omnia elementa eiusdem sunt naturae uti in casu praecedente.

COROLLARIUM 2

276. Sin autem adeo fuerit $i > \frac{\mathfrak{C}}{(\eta-1)(2-\mathfrak{C})}$, tum littera P unitate fit minor hincque tam littera $\mathfrak{B}$ quam B fiunt positivae; at vero littera A esse

debebit negativa, id quod duplici modo evenire potest, altero, quo $\mathfrak{A} > 1$, altero vero, quo $\mathfrak{A} < 0$; quo posteriore casu lens prima evaderet concava et instrumentum multis incommodis foret obnoxium.

COROLLARIUM 3

277. Sin autem fuerit $i = \frac{\mathfrak{C}}{(\eta - 1)(2 - \mathfrak{C})}$, tum fiet $P = 1$ hincque $\mathfrak{B} = 0$ et $B = 0$. Tum igitur, ne fiat $q = 0$, necesse erit sumi $A = \infty$, ita tamen, ut sit

$$AB = A\mathfrak{B} = -\frac{q}{a}.$$

Unde, cum sit $1 - P = \mathfrak{B}$, erit primum intervallum

$$= Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) = -A\mathfrak{B}a = q;$$

quare ob $\mathfrak{A} = 1$ fient distantiae focales

$$p = a, \quad q = q, \quad r = \frac{\mathfrak{C}q}{\eta - 1}, \quad s = -\frac{C\mathfrak{D}}{i(\eta - 1)\mathfrak{M}} \cdot q \quad \text{seu} \quad s = \frac{2C}{\mathfrak{M}} \cdot q$$

et

$$t = -\frac{CD}{\mathfrak{M}} \cdot q \quad \text{seu} \quad t = \frac{2i(\eta - 1)C}{2i(\eta - 1) + 1} \cdot \frac{q}{\mathfrak{M}}.$$

Intervalla vero lentium

$$\text{primum} = q, \quad \text{secundum} = \frac{\eta}{\eta - 1} \cdot q, \quad \text{tertium} = \frac{C}{\eta - 1}\left(1 - \frac{1}{i\mathfrak{M}}\right)q,$$

$$\text{quartum} = -\frac{CD}{\mathfrak{M}}\left(1 + \frac{1}{i(\eta - 1)}\right)q = \frac{2i(\eta - 1) + 2}{2i(\eta - 1) + 1} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q.$$

In reliquis vero momentis nihil mutandum occurrit.

SCHOLION

278. Probe autem hic est notandum casus in his duobus postremis corollariis contentos neutiquam ad telescopia transferri posse. Pro telescopiis enim ob $a = \infty$ necessario sumi debet $\mathfrak{A} = 0$ et $A = 0$, cum in his casibus debeat esse A vel infinitum vel negativum.

EXEMPLUM 1

279. Sumamus $\eta = 2$, et quia C in iis tantum terminis occurrit, qui per $\mathfrak{M}$ sunt divisi, ideoque semper numerum praemagnum significare debet, pro $\mathfrak{C}$ recte unitatem assumere poterimus; hinc ergo pro littera R primus limes erit $i > \frac{1}{3}$; ut nostra instrumenta ad casum corollarii primi pertineant, sumi quoque debet $i < 1$; hinc ergo capiatur $i = \frac{1}{2}$, ut sit $R = \frac{1}{2}\mathfrak{M}$; unde colligemus $k = \frac{1}{2}$ et $P = 2$, deinde $\mathfrak{B} = -1$ et $B = -\frac{1}{2}$ et $\mathfrak{D} = -1$, hinc $D = -\frac{1}{2}$. Hinc distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{1}{2}Aa, \quad r = \frac{\mathfrak{C}}{2}\cdot Aa,$$

$$s = \frac{CAa}{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{4}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{seu} \quad t = \frac{1}{4}s.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$\text{primum} = \frac{1}{2}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{3}{4}Aa,$$

$$\text{tertium} = \frac{C}{2}\left(1 - \frac{2}{\mathfrak{M}}\right)Aa, \quad \text{quartum} = \frac{3}{4}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

ac distantia oculi

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right),$$

semidiametri denique aperturarum lentis

$$\text{primae} = x, \quad \text{secundae} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{2}x, \quad \text{tertiae} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + x.$$

EXEMPLUM 2

280. Maneat $\eta = 2$, sumatur vero $i = 1$ sive $R = \mathfrak{M}$ atque erit $k = 1$ et $P = 1$, tum vero $\mathfrak{B} = 0 = B$ et $\mathfrak{D} = -2$ et $D = -\frac{2}{3}$; unde ex corollario tertio nanciscimur

$$p = a, \quad q = q, \quad r = q, \quad s = \frac{2C}{\mathfrak{M}}\cdot q, \quad t = \frac{2}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q \quad \text{seu} \quad t = \frac{1}{3}s.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$\text{primum} = q, \quad \text{secundum} = 2q, \quad \text{tertium} = C\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)q, \quad \text{quartum} = \frac{4}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q;$$

reliqua vero momenta perinde ac in praecedente exemplo se habebunt.

EXEMPLUM 3

281. Maneat $\eta = 2$ et sumatur $i = 2$, ut sit $R = 2\mathfrak{M}$; erit ergo $k = \frac{5}{4}$ et $P = \frac{4}{5}$, unde $\mathfrak{B} = \frac{1}{5}$, hinc $B = \frac{1}{4}$; tum vero $\mathfrak{D} = -4$ et $D = -\frac{4}{5}$. Hinc, cum A debeat esse negativum, statuatur

$$A = -\alpha, \quad \text{ut sit} \quad \mathfrak{A} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1};$$

ex quo distantiae focales erunt

$$p = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot a, \quad q = \frac{1}{4}\alpha a, \quad r = \frac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha a,$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{5} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a \quad \text{sive} \quad t = \frac{2}{5}s.$$

Intervalla vero erunt

$$\text{primum} = \frac{1}{4}\alpha a, \quad \text{secundum} = \frac{9}{16}\alpha a, \quad \text{tertium} = \frac{1}{4}C\left(1 - \frac{1}{2\mathfrak{M}}\right)\alpha a,$$

$$\text{quartum} = \frac{3}{10} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a.$$

Reliqua vero momenta sunt iterum ut in exemplo primo. Hic autem probe notandum est, si capiatur $\alpha = 1$, prodire $p = \infty$ ideoque primam lentem plane reiici posse, ita ut microscopium ex solis lentibus posterioribus componatur. Quia autem tum confusio prodiret enormis, cum in formulis capitis praecedentis sumi deberet $\mathfrak{A} = \frac{1}{0}$, hoc instrumentum merito reiicimus multoque magis ea, quae prodirent, si esset $\alpha < 1$. At si α unitatem haud parum superet, haec instrumenta in praxi usum habere posse videntur.

EXEMPLUM 4

282. Sit nunc $\eta = 4$, et cum primus limes sit $i > \frac{1}{9}$, pro casu corollarii primi sumamus $i < \frac{1}{8}$; sit igitur $i = \frac{1}{6}$ sumto $\mathfrak{C} = 1$ eritque $k = \frac{3}{2}$, $P = 2$, hinc $\mathfrak{B} = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, $\mathfrak{D} = -1$, $D = -\frac{1}{2}$; unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{1}{2}Aa, \quad r = \frac{1}{6}Aa,$$

$$s = \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa \quad \text{et} \quad t = \frac{1}{4} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot Aa \quad \text{seu} \quad t = \frac{1}{4}s.$$

Intervalla vero lentium

$$\text{primum} = \frac{1}{2}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{5}{12}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{C}{6}\left(1 - \frac{6}{\mathfrak{M}}\right)Aa,$$

$$\text{quartum} = \frac{3}{4}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Oculi distantia

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{3}{\mathfrak{M}}\right).$$

Porro

$$z = \frac{a}{2(\mathfrak{M}+3)}.$$

Semidiametri porro aperturarum erunt lentis

$$\text{primae} = x, \quad \text{secundae} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{2}x, \quad \text{tertiae} = \frac{3}{2}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 5

283. Maneat $\eta = 4$, at sumatur $i = \frac{1}{3}$ secundum corollarium tertium eritque $k = 3$ et $P = 1$; unde colliguntur distantiae focales

$$p = a, \quad q = q, \quad r = \frac{1}{3}q, \quad s = \frac{2C}{\mathfrak{M}}\cdot q \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q = \frac{1}{3}s$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = q, \quad \text{secundum} = \frac{4}{3}q, \quad \text{tertium} = \frac{C}{3}\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{M}}\right)q,$$

$$\text{quartum} = \frac{4}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q = 2t.$$

Distantia oculi

$$O = \frac{1}{2}t\left(1 + \frac{3}{\mathfrak{M}}\right)$$

et reliqua momenta omnia sunt ut ante.

EXEMPLUM 6

284. Manente $\eta = 4$ sumatur $i = 1$ eritque $k = 4$ et $P = \frac{3}{4}$, tum vero $\mathfrak{B} = \frac{1}{4}$ et $B = \frac{1}{3}$ et $\mathfrak{D} = -6$, $D = -\frac{6}{7}$. Cum igitur B sit positivum,

littera A negativa esse debet. Sit igitur $A = -\alpha$ fietque $\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$; unde prodibunt distantiae focales

$$p = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot a, \quad q = \frac{1}{3} \alpha a, \quad r = \frac{1}{9} \mathfrak{C} \alpha a,$$

$$s = \frac{2}{3} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a \quad \text{et} \quad t = \frac{2}{7} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a = \frac{3}{7} s$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{1}{3} \alpha a, \quad \text{secundum} = \frac{5}{9} \alpha a, \quad \text{tertium} = \frac{1}{9} C\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right) \alpha a,$$

$$\text{quartum} = \frac{8}{21} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a.$$

Distantia oculi O cum reliquis momentis eadem ac ante manet.

PROBLEMA 3

285. *Microscopium ex sex lentibus construere, quae ita sint dispositae, ut prior imago realis in intervallum secundum, posterior vero in quartum incidat.*

SOLUTIO

Quinque igitur litterarum P, Q, R, S, T secunda et quarta debent esse negativae; quare ponatur $Q = -k$ et $S = -k'$, ut sit

$$PkRk'T = \mathfrak{M} = \frac{ma}{h}.$$

Hinc erit ultimae lentis distantia focalis

$$u = -\frac{ABCDE}{\mathfrak{M}} \cdot a,$$

quae debet esse positiva aeque ac lentium intervalla, quae sunt

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -\frac{AB}{P} \cdot a\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABC}{Pk} \cdot a\left(1 - \frac{1}{R}\right), \quad \text{quartum} = \frac{ABCD}{PkR} \, a\left(1 + \frac{1}{k'}\right),$$

$$\text{quintum} = \frac{ABCDE}{PkRk'} \cdot a\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

Ob quintum ergo debet esse $T<1$, ob quartum vero $E<0$ hincque $ABCD>0$. Ob secundum vero esse debet $AB<0$ hincque etiam CD negativum. Statuatur nunc

$$M=\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+\mathfrak{s}+\mathfrak{t}+\mathfrak{u}}{\mathfrak{M}-1},$$

et quia campus maximus desideratur, sumi poterit $\mathfrak{s}=1$, $\mathfrak{t}=1$ et $\mathfrak{u}=1$, ut fiat

$$M=\frac{\mathfrak{q}+\mathfrak{r}+3}{\mathfrak{M}-1}$$

hincque

$$z=Ma\xi=\frac{1}{4}Ma$$

et distantia oculi

$$O=\frac{u}{\mathfrak{M}M};$$

quae cum sit positiva, destructio marginis colorati praebet

$$0=\frac{\mathfrak{q}}{P}-\frac{\mathfrak{r}}{Pk}-\frac{1}{PkR}+\frac{1}{PkRk'}+\frac{1}{PkRk'T},$$

unde colligitur

$$\frac{1}{k'}\left(1+\frac{1}{T}\right)=-\mathfrak{q}kR+\mathfrak{r}R+1,$$

et quia constat esse $T<1$, statuatur brevitatis gratia

$$1+\frac{1}{T}=\theta,$$

ut sit $\theta>2$, hincque

$$T=\frac{1}{\theta-1},$$

ex quo habebitur

$$\frac{1}{k'}=\frac{-\mathfrak{q}kR+\mathfrak{r}R+1}{\theta};$$

ergo ob

$$\frac{PkRk'}{\theta-1}=\mathfrak{M}$$

fiet statim

$$PkR=\frac{(\theta-1)\mathfrak{M}}{k'}=\frac{\mathfrak{M}(\theta-1)(1+\mathfrak{r}R-\mathfrak{q}kR)}{\theta}.$$

Praeterea iam considerandae sunt aequationes sequentes:

$$1.\quad \mathfrak{B}\mathfrak{q}=(P-1)M,$$
$$2.\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}=-(1+Pk)M-\mathfrak{q},$$
$$3.\quad \mathfrak{D}=-(1+PkR)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r},$$
$$4.\quad \mathfrak{E}=(PkRk'-1)M-\mathfrak{q}-\mathfrak{r}-1;$$

pro quarum resolutione statuamus brevitatis gratia

$$\frac{1-P}{\mathfrak{B}}=\zeta \quad \text{et} \quad 1+Pk=\eta,$$

ut fiat

$$\mathfrak{q}=-\zeta M \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}=\frac{(\zeta-\eta)M}{\mathfrak{C}};$$

ergo

$$3+\mathfrak{q}+\mathfrak{r}=\frac{3\mathfrak{C}+(\zeta(1-\mathfrak{C})-\eta)M}{\mathfrak{C}}=M(\mathfrak{M}-1);$$

unde concluditur

$$M=\frac{3\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta};$$

unde vicissim

$$\mathfrak{q}=\frac{-3\zeta\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta} \quad \text{et} \quad \mathfrak{r}=\frac{3(\zeta-\eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta}.$$

Nunc ergo habebimus $PkR=(\eta-1)R$ seu

$$(\eta-1)R=\mathfrak{M}\cdot\frac{\theta-1}{\theta}\left(1+\frac{3R(\zeta+\zeta\mathfrak{C}k-\eta)}{\mathfrak{C}(\mathfrak{M}+\zeta-1)-\zeta+\eta}\right),$$

unde ob rationes ante allegatas litteram k definire convenit; quem in finem notasse iuvabit litteras ζ et η una cum $\mathfrak{C}$ semper prae multiplicatione $\mathfrak{M}$ fore valde exiguas; alioquin enim campus praeter necessitatem diminueretur; contra vero R etiam fore numerum praemagnum; unde superior illa aequatio induet hanc formam:

$$(\eta-1)R=\frac{\theta-1}{\theta}\left(\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{M}+3R(\zeta-\eta)+3R\zeta\mathfrak{C}k}{\mathfrak{C}}\right),$$

ex qua sequitur

$$k=\frac{(\eta-1)\mathfrak{C}\theta R-(\theta-1)\mathfrak{C}\mathfrak{M}-3(\theta-1)(\zeta-\eta)R}{3(\theta-1)\zeta\mathfrak{C}R};$$

qui valor cum debeat esse positivus, debebit esse

$$R > \frac{(\theta-1)\mathfrak{C}\mathfrak{M}}{(\eta-1)\mathfrak{C}\theta - 3(\theta-1)(\zeta-\eta)}$$

existente

$$(\eta-1)\mathfrak{C}\theta > 3(\theta-1)(\zeta-\eta) \quad \text{seu} \quad \mathfrak{C} > \frac{3(\theta-1)(\zeta-\eta)}{(\eta-1)\theta}.$$

Cum vero ut in problemate praecedente esse debeat $\mathfrak{C} < 1$, numerator illius limitis minor esse debet suo denominatore hincque

$$\zeta < \frac{\theta(4\eta-1)-3\eta}{3(\theta-1)}.$$

His ergo conditionibus observatis ponamus brevitatis gratia iterum ut ante $R = i\mathfrak{M}$, ita ut esse debeat

$$i > \frac{(\theta-1)\mathfrak{C}}{(\eta-1)\mathfrak{C}\theta - 3(\theta-1)(\zeta-\eta)};$$

habebimus inde

$$k = \frac{i(\eta-1)\mathfrak{C}\theta - (\theta-1)\mathfrak{C} - 3i(\theta-1)(\zeta-\eta)}{3i(\theta-1)\zeta\mathfrak{C}} \quad \text{et} \quad P = \frac{\eta-1}{k};$$

pro quo valore duos casus considerari convenit.

Si $P > 1$, tum debet esse $A > 0$ ideoque $B < 0$, quod quidem sponte evenit, cum prodeat $\mathfrak{B} < 0$. Hoc ergo evenit, quando $k < \eta - 1$; ex quo concluditur

$$i < \frac{(\theta-1)\mathfrak{C}}{(\eta-1)\mathfrak{C}\theta - 3(\theta-1)((\eta-1)\zeta\mathfrak{C} + \zeta - \eta)};$$

qui limes manifesto maior est superiore. Sin autem littera i adeo hunc limitem superet, tunc fiet $P < 1$ ideoque A negative sumi debebit, et quia $\mathfrak{B}$ prodit positivum, B eatenus tantum erit positivum, uti requiritur, quatenus fit $\mathfrak{B} < 1$. Fit vero semper $\mathfrak{B} < 1$, nisi fuerit $\zeta < 1$; atque si etiam fuerit $\zeta < 1 - P$, casus erit impossibilis. Deinde cum sit

$$PkR = (\eta-1)i\mathfrak{M},$$

neglectis terminis prae $\mathfrak{M}$ valde parvis ob $\mathfrak{M}M = 3$ proxime erit

$$\mathfrak{D} = -3i(\eta-1), \quad \text{hinc} \quad D = -\frac{3i(\eta-1)}{3i(\eta-1)+1}.$$

Porro cum sit

$$PkRK = \frac{\mathfrak{M}}{T} = \mathfrak{M}(\theta-1),$$

fiet eodem modo

$$\mathfrak{E} = 3\theta - 4 \quad \text{et} \quad E = \frac{3\theta - 4}{5 - 3\theta} \quad \text{seu} \quad E = -\frac{3\theta - 4}{3\theta - 5}.$$

Hinc ergo distantiae focales ita se habebunt:

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{\eta - 1}\cdot a,$$

$$s = -\frac{ABC3i(\eta-1)}{(\eta-1)i\mathfrak{M}}\cdot a = -\frac{3ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

$$t = -\frac{3i(\eta-1)(3\theta-4)}{(3i(\eta-1)+1)(\theta-1)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

$$u = -\frac{3i(\eta-1)(3\theta-4)}{(3i(\eta-1)+1)(3\theta-5)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a;$$

ubi notetur esse quoque

$$q = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{1}{P}\right)Aa,$$

ita ut sit q ad primum intervallum ut $1:\zeta$. Intervalla autem erunt

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \zeta q,$$

$$\text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{\eta - 1}\right),$$

$$\text{tertium} = -ABCa\left(\frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{i(\eta-1)\mathfrak{M}}\right) = -\frac{ABC}{\eta-1}\cdot a\left(1 - \frac{1}{i\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{ABCDa}{\mathfrak{M}}\left(\frac{1}{i(\eta-1)} + \frac{1}{\theta-1}\right) = -\frac{3(i(\eta-1)+\theta-1)}{(3i(\eta-1)+1)(\theta-1)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

$$\text{quintum} = -\frac{3i(\eta-1)(3\theta-4)(\theta-2)}{(3i(\eta-1)+1)(\theta-1)(3\theta-5)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Distantia vero oculi erit

$$O = \frac{u}{\mathfrak{M}M} = \frac{1}{3}u \text{ proxime.}$$

Spatii vero conspicui semidiameter erit

$$z = \frac{1}{4}aM = \frac{3a}{4\mathfrak{M}}.$$

Tum vero semidiameter aperturae lentis primae est $= x$ sive per formulam notam sive per experientiam definienda, lentis vero

$$\text{secundae} = \frac{1}{4}\mathfrak{q}q + \frac{x}{P} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\zeta}{\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{x}{P},$$

$$\text{tertiae} = \frac{1}{4}\mathfrak{r}r + \frac{x}{Pk} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\zeta-\eta}{\mathfrak{C}\mathfrak{M}}\cdot r + \frac{x}{\eta-1};$$

reliquarum vero lentium, quae debent esse utrinque aeque convexae, semidiametri aperturarum erunt respective $\frac{1}{4}s$, $\frac{1}{4}t$ et $\frac{1}{4}u$. Denique autem mensura claritatis fiet $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

COROLLARIUM 1

286. Si statuatur $\zeta = 0$, pro secunda lente erit $q = \infty$, qui casus eodem redit, ac si haec lens plane abesset; tum autem erit $k = \infty$ et $P = 0$, $\mathfrak{B} = \infty$ et $B = -1$; unde, etsi primum intervallum fit $= -\infty$, ob secundam lentem deficientem intervallum primae et tertiae lentis fiet nihilominus finitum

$$= \frac{\eta}{\eta-1}\cdot Aa.$$

Deinde vero capi debebit

$$i > \frac{(\theta-1)\mathfrak{C}}{(\eta-1)\mathfrak{C}\theta + 3\eta(\theta-1)}.$$

Pro $\mathfrak{C}$ vero sufficit, ut capiatur intra limites 1 et 0, quandoquidem C debet esse numerus positivus ob $D < 0$. Reliquae vero determinationes manent ut ante, si modo notetur esse $B = -1$.

COROLLARIUM 2

287. Quia hoc casu lens secunda tollitur, hoc modo solutio habebitur problematis, quo microscopium ex quinque lentibus constructum quaeritur, quae ita sint dispositae, ut prima imago realis in primum intervallum, posterior vero in tertium incidat; cuius ergo problematis solutio etiam suppeditat campum triplicatum.

COROLLARIUM 3

288. Quia in genere ob rationes ante allegatas littera C semper designare debet numerum satis magnum, ne scilicet lentes posteriores fiant nimis exiguae,

satis prope erit $\mathfrak{C} = 1$ atque adeo in praxi tuto statuere licebit $\mathfrak{C} = 1$. Tum igitur sumi debebit

$$i > \frac{\theta - 1}{(\eta - 1)\theta - 3(\theta - 1)(\zeta - \eta)},$$

deinde vero

$$k = \frac{i(\eta - 1)\theta - 3i(\theta - 1)(\zeta - \eta) - \theta + 1}{3i(\theta - 1)\zeta}.$$

CASUS 1
QUO $i = \infty$ ET $\theta = 3$

289. Hoc ergo casu esse debet

$$\zeta < \frac{3\eta - 1}{2};$$

tum vero erit

$$k = \frac{3\eta - 2\zeta - 1}{2\zeta} \quad \text{et} \quad P = \frac{2(\eta - 1)\zeta}{3\eta - 2\zeta - 1}.$$

Ut igitur fiat $P > 1$, debebit esse $\zeta > \frac{3\eta - 1}{2\eta}$. Quare fiet $P > 1$, si capiatur ζ intra limites $\frac{3\eta - 1}{2}$ et $\frac{3\eta - 1}{2\eta}$; quo ergo casu A sumi debet positive, et quia reperitur $\mathfrak{B} < 0$, sponte fit $B < 0$. Sin autem sit $\zeta < \frac{3\eta - 1}{2\eta}$, tunc erit $P < 1$ hincque $A < 0$, ita ut debeat esse $B > 0$ hincque $\mathfrak{B} < 1$; erit vero $\mathfrak{B} < 1$, si $1 - P < \zeta$ sive $P > 1 - \zeta$, quod quidem semper evenit, nisi sit $\zeta < 1$. Superest ergo examinare casum $\zeta < 1$, et quia tum esse debet $P > 1 - \zeta$, oritur inde haec relatio:

$$\zeta(5\eta - 1) - 2\zeta^2 > 3\eta - 1;$$

unde patet esse debere

$$\zeta = \frac{5\eta - 1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{25\eta^2 - 34\eta + 9} - \alpha$$

denotante α numerum quempiam positivum sive

$$\zeta > \frac{5\eta - 1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{25\eta^2 - 34\eta + 9};$$

qui ergo limes pro ζ pendet ab η, ita ut sumto $\eta = 2$ debeat esse

$$\zeta > \frac{9 - \sqrt{41}}{4} \quad \text{seu} \quad \zeta > \frac{5}{8};$$

sin autem fuerit $\eta = 4$, debet esse

$$\zeta > \frac{19 - \sqrt{273}}{4} \quad \text{seu proxime} \quad \zeta > \frac{5}{8}.$$

At si sit $\eta = 6$, prodit

$$\zeta > \frac{29 - \sqrt{705}}{4} \quad \text{seu proxime} \quad \zeta > \frac{5}{8}$$

ut ante sicque patet ζ nunquam infra $\frac{5}{8}$ accipi posse. Nunc igitur pronuntiare poterimus limites, intra quos ζ capi debeat, esse $\frac{5}{8}$ et $\frac{3\eta - 1}{2}$. His notatis distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P} \cdot a = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{1}{P}\right)Aa, \quad r = -\frac{AB\mathfrak{C}}{\eta - 1} \cdot a,$$

$$s = -3 \cdot \frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad t = -\frac{5}{2} \cdot \frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad u = -\frac{5}{4} \cdot \frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -AB\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{\eta - 1}\right)a,$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABC}{\eta - 1} \cdot a, \quad \text{quartum} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad \text{quintum} = -\frac{5}{8} \cdot \frac{ABC}{\mathfrak{M}} \cdot a.$$

Reliqua momenta se habent uti in problemate, quippe quae ab u non pendent.

SCHOLION

290. Mirum hic videbitur, quod hoc casu tam P maius unitate quam minus unitate fieri possit, cum in solutione problematis ostenderimus tum solum P fieri >1, quando littera i contineatur intra limites

$$\frac{(\theta - 1)\mathfrak{C}}{(\eta - 1)\mathfrak{C}\theta - 3(\theta - 1)(\zeta - \eta)} \quad \text{et} \quad \frac{(\theta - 1)\mathfrak{C}}{(\eta - 1)\mathfrak{C}\theta - 3(\theta - 1)(\zeta - \eta + (\eta - 1)\zeta\mathfrak{C})},$$

quando vero i etiam posteriorem limitem superaverit, tum semper fore $P < 1$. Quare, cum hic adeo sumserimus $i = \infty$, hinc utique sequi videtur semper esse debere $P < 1$, quod tamen, ut vidimus, secus evenit. Ad quod dubium solvendum natura posterioris limitis accuratius perpendi debet; si enim is

ipse iam fieret infinitus, tum certe mirari desinemus, si etiam sumto $i = \infty$ reperiatur $P > 1$. Sin autem in hoc limite posteriore denominator non solum evanescat, sed adeo negativus evadat, tum ipse limes non tam negativus quam infinito maior spectari debebit, ita ut positio $i = \infty$ adhuc inter illos limites contineri sit censenda. Nunc igitur manifestum est limitem posteriorem fieri $= \infty$, si sumto $\mathfrak{C} = 1$ fuerit

$$\zeta = \frac{(4\eta - 1)\theta - 3\eta}{3\eta(\theta - 1)},$$

sumtoque $\theta = 3$, uti fecimus, si fuerit $\zeta = \frac{3\eta - 1}{2\eta}$. Sin autem sit $\zeta > \frac{3\eta - 1}{2\eta}$ $\left(\text{semper autem esse debet } \zeta < \frac{3\eta - 1}{2}\right)$, tum ille limes fit quasi infinito maior hincque $i = \infty$ ipso minor; unde necessario fieri debebit $P > 1$. Sin autem sit $\zeta < \frac{3\eta - 1}{2\eta}$, tum ille limes adhuc erit finitus ideoque valor $i = \infty$ illo erit sine dubio maior; unde etiam his tantum casibus fiet $P < 1$. Hoc notato istum casum aliquot exemplis illustremus.

EXEMPLUM 1

291. Sumamus $\eta = 2$, et cum pro ζ prior limes sit $\zeta < \frac{5}{2}$, posterior vero limes $\frac{5}{4}$, sumamus $\zeta = 2$, ut cadat intra hos limites; unde fiet $k = \frac{1}{4}$ et $P = 4$, hinc $\mathfrak{B} = \frac{3}{2}$ et $B = -\frac{3}{5}$; unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{1}{4}\mathfrak{B}Aa = \frac{3}{8}Aa, \quad r = \frac{3}{5}Aa,$$

$$s = \frac{9}{5}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad t = \frac{3}{2}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad u = \frac{3}{4}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{3}{4}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{3}{4}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{3}{5}CAa,$$

$$\text{quartum} = \frac{3}{10}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa \quad \text{et} \quad \text{quintum} = \frac{3}{8}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Distantia oculi $O = \frac{1}{3}u$ proxime, $z = \frac{8a}{4\mathfrak{M}}$,
semidiameter aperturae lentis

$$\text{primae} = x, \quad \text{secundae} = \frac{3}{2\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{x}{4}, \quad \text{tertiae} = x$$

ac denique mensura claritatis $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$ uti semper.

EXEMPLUM 2

292. Manente $\eta = 2$ aequetur ζ ipsi alteri limiti, scilicet $\zeta = \frac{5}{4}$, fietque $k = 1$ et $P = 1$; hinc ergo prodit $\mathfrak{B} = 0$ et $B = 0$. Quare, ne tam secunda lens quam intervalla evanescant, sumi debet $A = \infty$ ideoque $\mathfrak{A} = 1$, ita ut sit $A\mathfrak{B}$ sive $AB = -\frac{q}{a}$, et cum sit $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}(1 - P)$, erit revera $1 - P = \frac{5}{4}\mathfrak{B}$ hincque

$$Aa\left(1 - \frac{1}{P}\right) = \frac{5}{4}q.$$

Quare distantiae focales erunt

$$p = a, \quad q = q, \quad r = \mathfrak{C}q, \quad s = 3 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q, \quad t = \frac{5}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q, \quad u = \frac{5}{4} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q,$$

ubi secunda q arbitrio nostro relinquitur. Tum vero lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{5}{4}q, \quad \text{secundum} = 2q, \quad \text{tertium} = Cq,$$

$$\text{quartum} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q, \quad \text{quintum} = \frac{5}{8} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q.$$

Valores O et x erunt ut ante, at semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{15}{16\mathfrak{M}} \cdot q + x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{9}{16\mathfrak{M}} \cdot r + x.$$

EXEMPLUM 3

293. Manente $\eta = 2$ sumatur $\zeta < \frac{5}{4}$, et cum esse debeat $\zeta > \frac{5}{8}$, uti ostendimus, sumatur $\zeta = \frac{3}{4}$ eritque $k = \frac{7}{3}$ et $P = \frac{8}{7}$; unde fit $\mathfrak{B} = \frac{16}{21}$ hincque $B = \frac{16}{5}$; qui valor cum sit positivus, littera A negative capi debet, uti etiam primum intervallum postulat ob $P < 1$. Sit igitur $A = -\alpha$ ideoque

$$\mathfrak{A} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

eruntque distantiae focales

$$p = \frac{\alpha a}{\alpha - 1}, \quad q = \frac{16}{9}\alpha a, \quad r = \frac{16}{5}\mathfrak{C}\alpha a,$$

$$s = \frac{48}{5} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad t = 8 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad u = 4 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a.$$

Intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{4}{3}\alpha a, \quad \text{secundum} = \frac{32}{3}\alpha a, \quad \text{tertium} = \frac{16}{5}C\alpha a,$$

$$\text{quartum} = \frac{8}{5}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot\alpha a, \quad \text{quintum} = 2\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot\alpha a.$$

Reliqua se habebunt ut ante, ac si qua differentia in aperturis deprehenditur, ea in praxi attendi non meretur; interim tamen semidiameter

$$\text{secundae lentis} = \frac{9}{16}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{7}{3}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{15}{16}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + x.$$

EXEMPLUM 4

294. Statuatur nunc $\eta = 4$, et cum esse debeat $\zeta < \frac{11}{2}$, posterior vero limes sit $\frac{11}{8}$, quo scilicet casus $P > 1$ et $P < 1$ distinguuntur, sumatur $\zeta = 3$ et erit $k = \frac{5}{6}$ et $P = \frac{18}{5}$. Unde fit $\mathfrak{B} = -\frac{13}{15}$ et $B = -\frac{13}{28}$. Distantiae ergo focales lentium erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{13}{54}Aa, \quad r = \frac{13}{84}\mathfrak{C}Aa, \quad s = \frac{39}{28}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa,$$

$$t = \frac{65}{56}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad u = \frac{65}{112}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{M}}\cdot Aa = \frac{1}{2}t.$$

Intervalla vero lentium

$$\text{primum} = \frac{13}{18}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{143}{504}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{13}{84}\cdot CAa,$$

$$\text{quartum} = \frac{13}{56}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa, \quad \text{quintum} = \frac{65}{224}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot Aa.$$

Denique semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{9}{4\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{5}{18}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{3}{4\mathfrak{M}}\cdot r + \frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 5

295. Manente $\eta = 4$ sit $\zeta = \frac{11}{8}$ ac erit $k = 3$ et $P = 1$, unde

$$\mathfrak{B} = \frac{1-P}{\zeta} = \frac{8}{11}(1-P) = 0 \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Unde assumi debet $A = \infty$, ita ut fiat $\mathfrak{A} = 1$; tum igitur introducto q in calculum fiet

$$A\mathfrak{B} = AB = -\frac{q}{a};$$

unde fit

$$Aa \cdot \frac{(1-P)}{P} = -\frac{11}{8}q$$

sicque distantiae focales erunt

$$p = a, \quad q = q, \quad r = \frac{1}{3}\mathfrak{C}q,$$

$$s = 3 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q, \quad t = \frac{5}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q \quad \text{et} \quad u = \frac{5}{4} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{11}{8}q, \quad \text{secundum} = \frac{4}{3}q, \quad \text{tertium} = \frac{1}{3}Cq,$$

$$\text{quartum} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q \quad \text{et} \quad \text{quintum} = \frac{5}{8} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q.$$

Semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{33}{32} \cdot \frac{q}{\mathfrak{M}} + x, \quad \text{tertiae} = \frac{63}{32} \cdot \frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 6

296. Manente adhuc $\eta = 4$ sit $\zeta = \frac{2}{8}$ ac reperitur $k = \frac{29}{4}$ et $P = \frac{12}{29}$; unde fit $\mathfrak{B} = \frac{51}{58}$ et $B = \frac{51}{7}$, ex quo tanto valore iam perspicuum est huiusmodi microscopiis in praxi locum concedi non posse.

CASUS 2
QUO $\eta = 4$ ET $\theta = 3$

297. Quoniam debet esse $\eta > 1$ eiusque valor nimis parvus quibusdam incommodis est obnoxius, nimis magnus vero campo nocet, mediocri semper valore uti conveniet, cuiusmodi est $\eta = 4$; tum vero valor $\theta = 3$ seu $T = \frac{1}{2}$ idoneum intervallum inter ultimas lentes praebet; littera autem $\mathfrak{C}$ tam parum

ab unitate deficere debet, ut in nostris formulis liceat sumere $\mathfrak{C}=1$. His praemissis pro ζ limes erit $\zeta<\frac{11}{2}$. Pro $\mathfrak{C}$ vero habebimus

$$\mathfrak{C}<1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}>\frac{2}{3}(\zeta-4);$$

unde patet, etiamsi sit $\zeta=\frac{11}{2}$, tamen fore $\mathfrak{C}=1$, ita ut certe sumi possit $\mathfrak{C}=1$. Porro pro littera i fiet

$$i>\frac{2}{33-6\zeta}.$$

Deinde obtinebimus

$$k=\frac{(33-6\zeta)i-2}{6\zeta i},$$

unde fit

$$P=\frac{18\zeta i}{(33-6\zeta)i-2}.$$

Hinc oritur

$$\mathfrak{B}=\frac{(33-24\zeta)i-2}{((33-6\zeta)i-2)\zeta}.$$

Hic duos casus distingui oportet. Prior est, quo fit $P>1$; hincque A valorem positivum habere debet, quod evenit, si $\mathfrak{B}$ fiat <0 ideoque

$$i<\frac{2}{33-24\zeta},$$

sive quando i continetur intra limites $\frac{2}{33-6\zeta}$ et $\frac{2}{33-24\zeta}$, atque hoc casu etiam B fit negativum, ita ut sit $AB<0$. Alter casus, quo $P<1$, locum habet, si fuerit $i>\frac{2}{33-24\zeta}$, quo casu A valorem habebit negativum; quo igitur B nanciscatur valorem positivum, debet esse $\mathfrak{B}<1$ hincque

$$i<\frac{2(1-\zeta)}{6\zeta^2-57\zeta+33}.$$

Cum igitur sit $i>\frac{2}{33-24\zeta}$, id evenit, si fuerit

$$\frac{1-\zeta}{6\zeta^2-57\zeta+33}>\frac{1}{33-24\zeta},$$

unde sequeretur $\zeta>0$. His igitur notatis distantiae focales erunt

64*

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = -\frac{A\mathfrak{B}}{P}\cdot a, \quad r = -\frac{1}{3}AB\mathfrak{C}a, \quad s = -3\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

$$t = -\frac{45i}{18i+2}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a \quad \text{et} \quad u = -\frac{45i}{36i+4}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

sive etiam erit

$$q = +\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1}{P}\right)Aa$$

et intervalla lentium sunt

$$\text{primum} = Aa\left(1-\frac{1}{P}\right), \quad \text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{3}\right),$$

$$\text{tertium} = -\frac{ABC}{3}\cdot a\left(1-\frac{1}{i\mathfrak{M}}\right), \quad \text{quartum} = -\frac{3(3i+2)}{2(9i+1)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a,$$

$$\text{quintum} = -\frac{45i}{8(9i+1)}\cdot\frac{ABC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Deinde cum sit

$$M = \frac{3}{\mathfrak{M}+3},$$

fiet

$$z = \frac{1}{4}\cdot\frac{3a}{\mathfrak{M}+3}$$

et distantia oculi

$$O = \frac{1}{3}u\left(1+\frac{3}{\mathfrak{M}}\right).$$

Semidiameter porro aperturae

$$\text{lentis secundae erit} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\zeta}{\mathfrak{M}}\cdot q + \frac{x}{P} \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{3}{4}\cdot\frac{(\zeta-4)r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

Denique definito x erit mensura claritatis $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$.

EXEMPLUM 1

298. Sit $\zeta = 0$, et cum esse debeat $i > \frac{2}{33}$, praeterea vero pro $P > 1$ sit $i < \frac{2}{33}$, statuamus $i = \frac{2}{33}$ eritque $P = \frac{0}{0}$ sive P non determinatur, modo non sit minus unitate, adeoque $\mathfrak{B} = -\frac{(P-1)}{\zeta}$, ita ut $\mathfrak{B}$ semper sit ∞, nisi capiatur $P = 1$. Primo igitur non sit $P = 1$; erit $\mathfrak{B} = \infty$ et $B = -1$, ita ut A sit maius nihilo; hinc igitur distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \infty \text{ (seu, quod idem est, secunda lens tollitur)},$$

$$r = \frac{1}{3}A\mathfrak{C}a, \quad s = \frac{3AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad t = \frac{15}{17}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a \quad \text{et} \quad u = \frac{15}{34}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} + \text{secundum} = \frac{4}{3}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{AC}{3}\left(1 - \frac{33}{2\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{72}{34}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a \quad \text{et} \quad \text{quintum} = \frac{15}{68}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Reliqua manent, nisi quod sit semidiameter aperturae

$$\text{lentis tertiae} = 3\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

Sin autem caperetur $P = 1$, utcunque calculus instituatur, primum intervallum semper evanesceret; verum superfluum est ad hunc casum attendere, cum in prioribus formulis littera P plane ex calculo evanuerit, ita ut illae formulae subsistant, quicunque valor ipsi P tribuatur atque adeo non solum, si ponatur $P = 1$, sed etiam, si P unitate minus sumeretur; quod etsi nostrae hypothesi repugnat, tamen ob lentem secundam prorsus deficientem haec anomalia admitti debet.

EXEMPLUM 2

299. Maneat $\zeta = 0$, sed capiatur $i > \frac{2}{33}$, si fieri queat, quo casu fiet $P < 1$; quia autem hoc ipso casu iterum esse debet $i < \frac{2}{33}$, hic casus ad praecedentem redigitur, quem quidem iam notavimus aeque ad valores $P < 1$ quam ad $P > 1$ patere. Interim tamen cum secunda lens plane deficiat, posterior limes $i < \frac{2}{33}$ sponte cessat, ita ut nunc liceat assumere $i > \frac{2}{33}$, uti iam observavimus in corollario 1 problemati subnexo. Tum igitur erit

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \infty \quad \text{(seu lens secunda deest)},$$

$$r = \frac{A\mathfrak{C}}{3}\cdot a, \quad s = \frac{3AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad t = \frac{45i}{18i+2}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad u = \frac{45i}{36i+4}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Intervalla vero lentium

$$\text{primum} + \text{secundum} = \frac{4}{3}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{1}{3}ACa\left(1 - \frac{1}{i\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{3(3i+2)}{2(9i+1)}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad \text{quintum} = \frac{45i}{8(9i+1)}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Quod autem ad litteram i attinet, quoniam k non amplius in calculum ingreditur, ex aequatione, unde k definivimus, iam i definiatur eritque

$$i = \frac{2}{33 - 6\zeta} = \frac{2}{33}.$$

Proprie autem hae formulae continent solutionem problematis, quo quinque tantum lentes postulantur ita disponendae, ut ambae imagines reales in primum et tertium intervallum incidant.

EXEMPLUM 3

300. Sit $\zeta = \frac{1}{2}$ sumique debebit $i > \frac{1}{15}$ fietque $P > 1$, si fuerit $i < \frac{2}{21}$; sin autem sit $i > \frac{2}{21}$, simul fiet $P < 1$. Hic vero sumamus $i = \frac{1}{12}$ fietque $P = \frac{3}{2}$, hinc $\mathfrak{B} = -1$ et $B = -\frac{1}{2}$; unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{2}{3}Aa, \quad r = \frac{1}{6}A\mathfrak{C}a,$$

$$s = \frac{3}{2}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad t = \frac{45}{84}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad u = \frac{15}{56}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{1}{3}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{1}{2}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{1}{6}ACa\left(1 - \frac{12}{\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{27}{28}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad \text{quintum} = \frac{15}{112}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a.$$

Reliqua momenta sunt ut ante, nisi quod sit semidiameter aperturae

$$\text{secundae lentis} = \frac{3}{8}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{2}{3}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{21}{8}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

Has formulas commode ad telescopia adplicare licet, quia posito $Aa = p$ longitudo tantum fit

$$= \frac{5}{6}p + \frac{1}{6}Cp,$$

ita ut ea non multum superet p, etiamsi pro C numerus satis magnus capiatur.

EXEMPLUM 4

301. Maneat $\zeta = \frac{1}{2}$, sed sumatur $i > \frac{2}{21}$, et quia hinc fit $P = \frac{9i}{30i-2}$ ideoque $\mathfrak{B} = \frac{21i-2}{15i-1}$, ut fiat $\mathfrak{B} < 1$, debet esse $21i - 2 < 15i - 1$ sive $i < \frac{1}{6}$. Capiatur ergo $i = \frac{1}{8}$ fietque $P = \frac{9}{14}$ et $\mathfrak{B} = \frac{5}{7}$, hinc $B = \frac{5}{2}$; ergo A debet esse negativum. Statuatur ergo $A = -\alpha$ et distantiae focales erunt

$$p = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot a, \quad q = \frac{10}{9} \alpha a, \quad r = \frac{5}{6} \mathfrak{C} \alpha a,$$

$$s = \frac{15}{2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad t = \frac{225}{68} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a \quad \text{et} \quad u = \frac{225}{136} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{5}{9} \alpha a, \quad \text{secundum} = \frac{85}{18} \alpha a, \quad \text{tertium} = \frac{5}{6} C \alpha a \left(1 - \frac{8}{\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{285}{68} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a\,^{1)}, \quad \text{quintum} = \frac{225}{272} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a.$$

Tum vero semidiameter aperturae lentis secundae et tertiae

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{14}{9} x \quad \text{et} \quad \frac{21}{8} r + \frac{1}{3} x.$$

Has autem formulas ad telescopia adplicare non licet, quia A erat negativum.

EXEMPLUM 5

302. Sit $\zeta = 1$, et cum sumi debeat $i > \frac{2}{27}$ atque, ut prodeat $P > 1$, $i < \frac{2}{9}$, capiatur $i = \frac{1}{10}$ fietque $P = \frac{18}{7}$ et $\mathfrak{B} = -\frac{11}{7}$ et $B = -\frac{11}{18}$; unde distantiae focales erunt

$$p = \mathfrak{A} a, \quad q = \frac{11}{18} A a, \quad r = \frac{11}{54} \mathfrak{C} A a,$$

$$s = \frac{11}{6} \cdot \frac{AC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad t = \frac{55}{76} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot A a, \quad u = \frac{55}{152} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot A a$$

1) Editio princeps: $\frac{57}{34} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \alpha a$. Correxit E. Ch.

et lentium intervalla

$$\text{primum} = \frac{11}{18}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{143}{324}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{11}{54}ACa\left(1-\frac{10}{\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{253}{228}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad \text{quintum} = \frac{55}{304}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3}{4}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}}+\frac{7}{18}x, \quad \text{tertiae} = \frac{9}{4}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}}+\frac{1}{3}x;$$

quas formulas etiam commode ad telescopia transferre licet.

EXEMPLUM 6

303. Maneat $\zeta = 1$, sed sumatur $i = \frac{2}{9}$ fictque $P = 1$ et $\mathfrak{B} = 0$, hinc $B = 0$; hinc A capi debet $= \infty$ ideoque $\mathfrak{A} = 1$; tum autem esse debet

$$A\mathfrak{B} = AB = -\frac{q}{a},$$

unde fit

$$Aa\left(1-\frac{1}{P}\right) = Aa(P-1) = -A\mathfrak{B}a = q;$$

hinc distantiae focales erunt

$$p = a, \quad q = q, \quad r = \frac{1}{3}\mathfrak{C}q,$$

$$s = 3\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q, \quad t = \frac{5}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q, \quad u = \frac{5}{6}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q$$

et lentium intervalla

$$\text{primum} = q, \quad \text{secundum} = \frac{4}{3}q, \quad \text{tertium} = \frac{1}{3}C\left(1-\frac{9}{2\mathfrak{M}}\right)q,$$

$$\text{quartum} = \frac{4}{3}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q, \quad \text{quintum} = \frac{5}{12}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q$$

et semidiametri aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3}{4}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}}+x, \quad \text{tertiae} = \frac{9}{4}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}}+\frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 7

304. Maneat $\zeta = 1$, sed capiatur $i > \frac{2}{9}$, et cum sit

$$P = \frac{18i}{27i-2} \quad \text{hincque} \quad \mathfrak{B} = \frac{9i-2}{27i-2},$$

quae fractio iam sponte unitate est minor, sumamus ergo $i = 1$; erit $P = \frac{18}{25}$ et $\mathfrak{B} = \frac{7}{25}$, $B = \frac{7}{18}$, unde A debet esse negativum; statuatur ergo $= -\alpha$ eruntque distantiae focales

$$p = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot a, \quad q = \frac{7}{18}\alpha a, \quad r = \frac{7}{54}\mathfrak{C}\alpha a,$$

$$s = \frac{7}{6} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad t = \frac{35}{40} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad u = \frac{35}{80} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a$$

et intervalla

$$\text{primum} = \frac{7}{18}\alpha a, \quad \text{secundum} = \frac{217}{324}\alpha a,$$

$$\text{tertium} = \frac{7}{54} C\alpha a\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right), \quad \text{quartum} = \frac{7}{24} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a, \quad \text{quintum} = \frac{7}{32} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot \alpha a$$

et semidiametri aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3}{4} \cdot \frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{25}{18}x, \quad \text{tertiae} = \frac{9}{4} \cdot \frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 8

305. Sit nunc $\zeta = 4 = \eta$, et cum esse debeat $i > \frac{2}{9}$, ut autem fiat $P > 1$, $i < -\frac{2}{63}$ (qui limes ut infinito maior spectari debet; si enim sumsissemus ζ minus, scilicet $\zeta = \frac{11}{8}$, tum prodiisset $i < \frac{2}{0}$, quod indicio fuisset i quantumvis magnum accipi posse semperque fore $P > 1$; quod autem de valore $\zeta = \frac{11}{8}$ valet, multo magis de maioribus valet), sit ergo $i = \frac{1}{3}$ eritque

$$P = 24 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} = -\frac{23}{4} \quad \text{et} \quad B = -\frac{23}{27};$$

unde colliguntur distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{23}{96}Aa, \quad r = \frac{23}{81}A\mathfrak{C}a,$$

$$s = \frac{23}{9} \cdot \frac{AC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad t = \frac{115}{72} \cdot \frac{AC}{\mathfrak{M}} \cdot a, \quad u = \frac{115}{144} \cdot \frac{AC}{\mathfrak{M}} \cdot a$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{23}{24}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{23}{72}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{23}{81}CAa\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{23}{24}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad \text{quintum} = \frac{115}{288}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3q}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{24}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{1}{3}x.$$

EXEMPLUM 9

306. Maneat $\zeta = 4$ et sit $i = 1$; fiet

$$P = \frac{72}{7}, \quad \text{ergo} \quad \mathfrak{B} = -\frac{65}{28}, \quad \text{hinc} \quad B = -\frac{65}{93};$$

unde colliguntur distantiae focales

$$p = \mathfrak{A}a, \quad q = \frac{65}{288}Aa, \quad r = \frac{65}{279}A\mathfrak{C}a,$$

$$s = \frac{65}{31}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad t = \frac{195}{124}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad u = \frac{195}{248}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a = \frac{1}{2}t$$

et intervalla lentium

$$\text{primum} = \frac{65}{72}Aa, \quad \text{secundum} = \frac{65}{216}Aa, \quad \text{tertium} = \frac{65}{279}ACa\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum} = \frac{65}{124}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a, \quad \text{quintum} = \frac{195}{496}\cdot\frac{AC}{\mathfrak{M}}\cdot a$$

et semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae} = \frac{3q}{\mathfrak{M}} + \frac{7}{72}x \quad \text{et} \quad \text{tertiae} = \frac{1}{3}x.$$

SCHOLION

307. Horum exemplorum ea inprimis sunt notatu digna, in quibus fiebat $P = 1$, quia tum littera A abibat in infinitum eratque $\mathfrak{A} = 1$. In casu igitur secundo, quem hactenus sumus contemplati, statuamus in genere $P = 1$ ac sumi debebit $i = \frac{2}{33 - 24\zeta}$. Tum ergo erit $\mathfrak{B} = 0$ simulque $B = 0$; unde sumto

$\mathfrak{A}=1$ et $A=\infty$ fiet $q=-A\mathfrak{B}a$, hinc vicissim $A\mathfrak{B}=AB=-\frac{q}{a}$, ita ut nunc distantia focalis secundae lentis q arbitrio nostro penitus relinquatur; tum autem ad primum intervallum inveniendum ob $\mathfrak{B}=\frac{1-P}{\zeta}$ erit

$$Aa\cdot\frac{P-1}{P}=Aa(P-1)=-A\mathfrak{B}\zeta a=\zeta q$$

atque hinc in genere distantiae focales ita se habebunt:

$$p=a,\quad q=q,\quad r=\frac{1}{3}\mathfrak{C}q,\quad s=\frac{3C}{\mathfrak{M}}\cdot q,$$

$$t=\frac{15}{17-8\zeta}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q,\quad u=\frac{15}{34-16\zeta}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q\quad\text{seu}\quad u=\frac{1}{2}t.$$

Intervalla vero lentium erunt

$$\text{primum}=\zeta q,\quad\text{secundum}=\frac{4}{3}q,$$

$$\text{tertium}=\frac{1}{3}q\left(1-\frac{33-24\zeta}{2\mathfrak{M}}\right)=\frac{1}{3}q\left(1-\frac{3(11-8\zeta)}{2\mathfrak{M}}\right),$$

$$\text{quartum}=\frac{12(3-2\zeta)}{17-8\zeta}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q,\quad\text{quintum}=\frac{15}{4(17-8\zeta)}\cdot\frac{C}{\mathfrak{M}}\cdot q;$$

ubi ergo manifestum est necessario sumi debere $\zeta<\frac{3}{2}$. Tum vero erit semidiameter aperturae lentis

$$\text{secundae}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\zeta}{\mathfrak{M}}\cdot q+x\quad\text{et}\quad\text{tertiae}=\frac{3}{4}\cdot\frac{(\zeta-4)}{\mathfrak{M}}\cdot r+\frac{1}{3}x.$$

Ceterum hic manifestum est istas formulas ad telescopia accommodari neutiquam posse. Cum igitur omnes casus, qui quidem in praxi locum habere possunt, adeo pro sex lentibus evolverimus iisque tantum campum conciliaverimus, quo maior desiderari vix queat, huic capiti finem imponimus ad sequens idque ultimum progressuri, in quo ostendimus, quemadmodum loco lentis obiectivae duas pluresve lentes sive ex eodem sive ex diverso vitri genere factas substituendo omnis plane confusio tolli possit, ut hoc modo microscopia omnibus numeris absoluta nanciscamur.

CAPUT III

DE SUMMA HORUM MICROSCOPIORUM PERFECTIONE DUM EA AB OMNI CONFUSIONE LIBERANTUR

PROBLEMA 1

308. *Si lens obiectiva constet quatuor lentibus convexis proxime inter se iunctis, quales descriptae sunt supra in problemate 4 capitis secundi sectionis praecedentis* [§ 177], *reliquae vero lentes ita sint dispositae, uti in capitibus praecedentibus huius sectionis descripsimus, omnem confusionem a lentium apertura oriundam destruere.*

SOLUTIO

Quatuor illas lentes in loco citato descriptas hic loco lentis obiectivae substitui assumimus easque coniunctim in calculo instar unicae lentis tractamus. Cum igitur littera A hic ad primam lentem pertineat, quatenus ea in determinationes sequentium lentium ingreditur, idem significat, quod in loco citato per productum $-ABCD$ significabatur. At supra hoc productum designavimus littera θ, ex quo ad locum antecedentem regrediendo ibi θ idem erit, quod hic nobis est A. Ibi ergo quatuor illarum lentium distantias focales designemus litteris p', p'', p''', p'''', et cum cuilibet littera germanica conveniat, quae sit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{A}''''$, ex nostro A ob $\theta = A$ habebimus

$$\mathfrak{A}' = \frac{4A}{A+1}, \quad \mathfrak{A}'' = \frac{3A-1}{A+1}, \quad \mathfrak{A}''' = \frac{2A-2}{A+1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'''' = \frac{A-3}{A+1};$$

atque ex his litteris germanicis, quatenus ad singulas quatuor lentes priores referuntur, una cum numeris λ, qui pro singulis unitati aequales sumuntur, singulae hae lentes per formulas notas construi possunt. Antequam autem

has ipsas distantias focales assignare queamus, intervallum minimum inter has lentes spectare debemus; quod cum ibi positum esset $=\zeta p$, ne haec littera ζ in nostris formulis confusionem pariat, statuamus hoc intervallum $=\delta p'$; unde litterae ibi usurpatae P, Q, R, S ita definientur:

$$\frac{1}{P}=1+\frac{(3A-1)\delta}{A+1},\qquad \frac{1}{PQ}=1+\frac{(5A-3)\delta}{A+1},\qquad \frac{1}{PQR}=1+\frac{(6A-6)\delta}{A+1};$$

unde ipsae distantiae focales erunt

$$p'=\frac{4A}{A+1}\cdot a,\quad p''=\frac{4A}{A+1}\cdot a+\frac{4A(3A-1)\delta a}{(A+1)^2},$$

$$p'''=\frac{4A}{A+1}\cdot a+\frac{4A(5A-3)\delta a}{(A+1)^2},\quad p''''=\frac{4A}{A+1}\cdot a+\frac{4A(6A-6)\delta a}{(A+1)^2}.$$

His notatis, quod supra erat $PQRS$, hic nobis sola littera P exprimitur, ita ut iam intervallum a lente obiectiva usque ad nostram lentem secundam sit

$$Aa\left(1+\frac{6(A-1)\delta}{A+1}-\frac{1}{P}\right);$$

quod ergo iam spectatur ut nostrum intervallum primum. Ob multiplicationem ergo lentis obiectivae hoc primum intervallum quandam alterationem patitur a fractione δ natam; si enim prima lens esset simplex, hoc intervallum tantum esset $Aa\left(1-\frac{1}{P}\right)$, nunc autem id erit

$$=Aa\left(1-\frac{1}{P}\right)+\frac{(6A-6)A\delta a}{A+1}.$$

Quia autem hoc augmentum plerumque est valde parvum, id facile negligi poterit. Reliqua autem intervalla ordine stabilito procedent; erit scilicet

$$\text{secundum} = -ABa\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{PQ}\right) \text{ etc.}$$

et perinde ac sequentes distantiae focales, scilicet

$$q=-A\mathfrak{B}\cdot\frac{a}{P},\quad r=AB\mathfrak{C}\cdot\frac{a}{PQ}\text{ etc.}$$

Nunc igitur totum negotium huc redit, ut confusio a lentium apertura orta penitus ad nihilum redigatur, quod fit, uti loco citato invenimus, ope huius aequationis:

$$0 = \frac{(1+A)^3}{16A^3} - \frac{\nu(1+A)(5A^2-6A+5)}{16A^3} + \frac{\delta(1+A)^2(7A-5)}{32A^3}$$
$$- \frac{\delta\nu(A-1)(7A^2-18A+23)}{16A^3} - \frac{1}{A^3P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right)$$
$$+ \frac{1}{A^3B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) \text{ etc.};$$

ex qua aequatione fractio δ, qua exigua intervalla inter lentes obiectivas determinantur, commode definiri potest, si modo littera A numerum satis magnum veluti 60 denotet lentesque obiectivae ex eiusmodi vitri genere parentur, pro quo sit $\nu > \frac{1}{5}$. Supra [§ 182] enim ostendimus, si sit $A = 60$ vitrumque commune adhibeatur, pro quo sit $n = 1{,}55$, tum fieri $\delta = \frac{1}{18}$, quoniam casu $A = 60$ partes a sequentibus lentibus ortae quasi evanescunt. Huiusmodi igitur lens obiectiva composita cum omnibus praecedentibus microscopiorum formis combinari poterit, in quibus scilicet inest littera A, eique valor circiter 60 tribuatur. Quando autem hoc usu venit, ne opus quidem erit in hunc valorem ipsius A anxie inquirere; constructis enim singulis lentibus secundum praecepta cognita, id quod sine notitia litterae δ fieri potest, intervalla quatuor lentium obiectivarum indefinita relinquantur eaque demum per experimenta ita determinentur, ut confusio fiat quam minima, nisi forte plane nulla fieri nequeat. Tum autem ex forma harum lentium sponte innotescit semidiameter aperturarum x, cuius hae lentes sunt capaces, indeque mensura claritatis $= \frac{20x}{\mathfrak{M}}$ existente $\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}$. Reliqua omnia autem momenta prorsus eadem manebunt, uti in praecedentibus capitibus est expositum.

COROLLARIUM 1

309. Quodsi ergo fuerit $A = 60$ et quatuor lentes obiectivae ex vitro communi, pro quo est $n = 1{,}55$, conficiantur, supra [§ 183] sequentem harum lentium constructionem invenimus:

I. Pro prima lente

cuius distantia focalis est $= 3{,}9333a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -\,0{,}97756\,a \\ \text{posterioris} & = +\,0{,}67332\,a, \end{cases}$$

aperturae semidiameter $= 0{,}16833a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis $= 4{,}5740\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -1{,}7682\,a\\ \text{posterioris} & = +1{,}0384\,a.\end{cases}$$

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $r = 4{,}9965\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -4{,}3440\,a\\ \text{posterioris} & = +1{,}6833\,a.\end{cases}$$

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis $s = 5{,}2006\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 18{,}1522\,a\\ \text{posterioris} & = 3{,}3955\,a.\end{cases}$$

Intervalla autem inter has quaternas lentes sumi poterunt $= 0{,}2185\,a$, ea autem praestabit per experientiam definiri. Tum vero semidiameter aperturae capi poterit $x = 0{,}16833\,a$, unde colligitur mensura claritatis

$$= \frac{20\,x}{\mathfrak{M}} = \frac{3{,}3666\,a}{\mathfrak{M}} = \frac{26{,}9328}{\mathfrak{M}},$$

si scilicet distantia a in digitis exprimatur.

COROLLARIUM 2

310. Facile intelligitur, etiamsi littera A sive aliquanto maior sive minor caperetur quam 60, tamen in constructione harum lentium vix ullam orituram esse variationem, quae quidem in praxi observari posset; id tantum hic notari oportet, quod si esset $A < 60$, tum lentes istas non amplius tam prope inter se constitui posse, quam confusionis destructio postulat. Sin autem $A > 60$, tum istud negotium eo felicius succedet.

SCHOLION

311. In genere autem notetur, quo maior fuerit numerus A, eo felicius constructionem succedere, quandoquidem tum intervalla harum lentium non

amplius tantopere exigua reperientur; unde hoc commodi consequimur, si forte sequentes lentes adhuc satis notabilem confusionem pariant, ut etiam ea lentes has magis appropinquando destrui possit. In ultimo autem scholio praecedentis capitis [§ 307] casus occurrit, quo fiebat $A = \infty$ et $\mathfrak{B} = B = 0$, ita ut esset $AB = -\frac{q}{a}$; ad hunc igitur casum nostra lens obiectiva quadruplicata commodissime adplicari poterit; tum enim fieri debebit

$$0 = \frac{1}{16} - \frac{5}{16}\nu + \frac{7}{32}\delta - \frac{7}{16}\delta\nu + \frac{a^3\lambda'}{q^3} + \frac{a^3}{3q^3}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) \text{ etc.},$$

ex qua fractionem δ definiri oportet; tum autem distantiae focales quatuor priorum lentium erunt

$$p' = 4a, \quad p'' = 4a + 12\delta a, \quad p''' = 4a + 20\delta a, \quad p'''' = 4a + 24\delta a;$$

quae ergo utique etiam a fractione δ pendent, et ubi supra diximus lentes construi posse sine notitia ipsius δ, id tantum de eius valore adcurato est intelligendum; in praxi enim sufficit eius valorem proxime nosse. Deinde vero litterae germanicae ad has lentes pertinentes erunt

$$\mathfrak{A}' = 4, \quad \mathfrak{A}'' = 3, \quad \mathfrak{A}''' = 2, \quad \mathfrak{A}'''' = 1;$$

omnes vero litterae λ unitati capiuntur aequales. Si igitur sumamus omnes lentes ex vitro communi confici, pro quo est $n = 1{,}55$, erit $\nu = 0{,}2326$; sique insuper sit $\lambda' = 1$ et $\lambda'' = 1$, ob $\mathfrak{C} = 1$ proxime aequatio nostra resolvenda induet hanc formam:

$$0 = \frac{-0{,}1630 + 1{,}8718\,\delta}{16} + \frac{4a^3}{3q^3},$$

ubi sequentia membra, quae insuper per $\mathfrak{M}$ sunt divisa, tuto reiicere licet; hinc ergo colligimus

$$\delta = 0{,}08708 - 11{,}397 \cdot \frac{a^3}{q^3};$$

unde patet esse debere $\frac{q}{a} > 5{,}0771$. Si ergo sumamus $q = 10a$, fiet

$$\delta = 0{,}07569 = \frac{3}{40} \quad \text{seu proxime} \quad \delta = \frac{1}{13},$$

qui valor satis est ad praxin accommodatus, quem in sequente exemplo fusius evolvemus.

EXEMPLUM

312. Si omnes lentes ex vitro communi parentur, ut omnis confusio tollatur, sumi debet $\delta = \frac{1}{13}$ et $q = 10a$ eruntque distantiae focales nostrarum quatuor lentium obiectivarum

$$p' = 4a, \quad p'' = 4{,}923\,a, \quad p''' = 5{,}538\,a, \quad p'''' = 5{,}846\,a;$$
$$\mathfrak{A}' = 4, \quad \mathfrak{A}'' = 3, \quad \mathfrak{A}''' = 2, \quad \mathfrak{A}'''' = 1.$$

Deinde intervalla inter has quatuor lentes erunt $= \frac{4}{13}a = 0{,}3077\,a$. Deinde vero intervallum ab hac lente obiectiva ad secundam lentem principalem erit proxime $= 10\zeta a$, ubi ζ adhuc nostro arbitrio relinquitur, dummodo sit $\zeta < \frac{3}{2}$. Tum vero reliquae lentes et reliqua momenta manebunt prorsus, uti in scholio ultimo [§ 307] capitis praecedentis sunt exposita. Hinc igitur singulae lentes formari poterunt ac pro secunda ac tertia quidem etiam poni debet $\lambda' = 1$ et $\lambda'' = 1$.

Pro prima igitur harum lentium obiectivarum, cuius distantia focalis est $p' = 4a$ et $\mathfrak{A}' = 4$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p'}{\sigma - \mathfrak{A}'(\sigma - \varrho)} = \dfrac{-p'}{4{,}1194} = -0{,}97101\,a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p'}{\varrho + \mathfrak{A}'(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p'}{5{,}9375} = +0{,}67370\,a. \end{cases}$$

Pro secunda, cuius distantia focalis est $p'' = 4{,}923\,a$ et $\mathfrak{A}'' = 3$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p''}{\sigma - \mathfrak{A}''(\sigma - \varrho)} = \dfrac{-p''}{2{,}6827} = -1{,}8351\,a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p''}{\varrho + \mathfrak{A}''(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p''}{4{,}5008} = +1{,}0938\,a. \end{cases}$$

Pro tertia lente, cuius distantia focalis est $p''' = 5{,}538\,a$ et $\mathfrak{A}''' = 2$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{-p'''}{1{,}2460} = -4{,}4447\,a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p'''}{3{,}0641} = +1{,}8074\,a. \end{cases}$$

Pro quarta lente, cuius distantia focalis est $p'''' = 5{,}846\,a$ et $\mathfrak{A}'''' = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{+p''''}{0{,}1907} = +30{,}6560\,a \\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p''''}{1{,}6274} = +\ 3{,}5922\,a. \end{cases}$$

Pro secunda vero lente principali, cuius distantia [focalis] est arbitraria $= q$, ob $\mathfrak{B} = 0$ et $\lambda' = 1$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{q}{\sigma} = 0{,}61448\, q \\ \text{posterioris} = \dfrac{q}{\varrho} = 5{,}2439\, q. \end{cases}$$

Pro tertia autem lente principali, [cuius distantia focalis] est

$$r = \tfrac{1}{3}\mathfrak{C} q = \tfrac{1}{3} q,$$

ob $\mathfrak{C} = 1$ proxime et $\lambda'' = 1$ erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{r}{\varrho} = 1{,}7479\, q \\ \text{posterioris} = \dfrac{r}{\sigma} = 0{,}20483\, q. \end{cases}$$

Quibus inventis sequitur

CONSTRUCTIO GENERALIS MICROSCOPII EX NOVEM LENTIBUS COMPOSITI EX VITRO COMMUNI PARANDIS

313. Sumta pro lubitu distantia obiecti $= a$ constructio ita se habebit:

I. Pro prima lente

cuius distantia focalis $= 4a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -0{,}97101\, a \\ \text{posterioris} = +0{,}67370\, a; \end{cases}$$

quae ergo aperturam admittit, cuius semidiameter $x = 0{,}1684\, a$.

Distantia ad lentem secundam $= 0{,}3077\, a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis est $= 4{,}923\, a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -1{,}8351\, a \\ \text{posterioris} = +1{,}0938\, a, \end{cases}$$

cuius apertura est ut primae et distantia ad lentem tertiam $= 0{,}3077\, a$.

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $=5{,}538\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =-4{,}4447\,a\\ \text{posterioris} & =+1{,}8074\,a,\end{cases}$$

apertura ut primae et distantia ad quartam $=0{,}3077\,a$.

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis $=5{,}846\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =30{,}6560\,a\\ \text{posterioris} & =\ \ 3{,}5922\,a,\end{cases}$$

apertura ut primae, distantia ad quintam $=\zeta q$, ubi ζ est numerus minor quam $\frac{3}{2}$, at q quantitas arbitrio nostro relicta.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $=q$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =0{,}61448\,q\\ \text{posterioris} & =5{,}2439\,q,\end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $=\frac{3}{4}\cdot\frac{\zeta}{\mathfrak{M}}\cdot q+x$
et distantia ad lentem sextam $=\frac{4}{3}q$.

VI. Pro sexta lente

cuius distantia focalis est $r=\frac{1}{3}q$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & =1{,}7479\,q\\ \text{posterioris} & =0{,}2048\,q,\end{cases}$$

eius aperturae semidiameter

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{(\zeta-4)}{\mathfrak{M}}\cdot r+\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-\zeta)}{\mathfrak{M}}\cdot q+\frac{1}{3}x$$

et distantia ad lentem septimam

$$=\frac{1}{3}q\left(1-\frac{3\,(11-8\,\zeta)}{2\,\mathfrak{M}}\right).$$

VII. Pro septima lente

cuius distantia focalis $s = \frac{3C}{\mathfrak{M}} \cdot q$

et quae debet esse utrinque aeque convexa, capiatur

radius utriusque faciei $= 1{,}1\, s$

et semidiameter aperturae $= \frac{1}{4} s$,
distantia vero ad lentem octavam $= \frac{12(3-2\zeta)}{17-8\zeta} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q$.

VIII. Pro octava lente

cuius distantia focalis $t = \frac{15}{17-8\zeta} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q$, capiatur

radius utriusque faciei $= 1{,}1\, t$

et semidiameter aperturae $= \frac{1}{4} t$,
distantia vero ad lentem nonam $= \frac{15}{4(17-8\zeta)} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q$.

IX. Pro nona lente

cuius distantia focalis $u = \frac{15}{34-16\zeta} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot q$, capiatur

radius faciei utriusque $= 1{,}1\, u$,

aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} u$
atque erit distantia ad oculum $= \frac{1}{3} u$.

X. Tum vero spatii in obiecto conspicui semidiameter erit $z = \frac{3a}{4\mathfrak{M}}$, quod cernetur claritatis gradu, cuius mensura est $= \frac{20x}{\mathfrak{M}} = \frac{3{,}368\, a}{\mathfrak{M}}$.

XI. Hic autem ex multiplicatione proposita $= m$ nascitur $\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}$ sumto $h = 8$ dig.; per m igitur expressa mensura claritatis erit $= \frac{26{,}944}{m}$.

XII. Praeterquam autem, quod litterae ζ et q ab arbitrio nostro pendent, etiam C pro lubitu assumi potest, dummodo sit numerus satis magnus, eique fini inservit, ut ultimae lentes non fiant nimis exiguae, si scilicet multipli-

catio fuerit praemagna. Notetur autem, cum ob sumtum $A = \infty$ hae formulae aliquantum a calculo discrepent, errores evitari posse, si per experientiam tam distantia obiecti quam intervalla quatuor priorum lentium debite determinentur.

SCHOLION

314. Quoniam hic casus, quo erat $A = \infty$, moram facessere posset, applicemus nostram lentem obiectivam quadruplicatam ad casum in exemplo tertio casus secundi [§ 300], ubi erat

$$P = \frac{3}{2}, \quad \mathfrak{B} = -1 \text{ et } B = -\frac{1}{2},$$

quoniam commode litterae A valor satis magnus tribui poterit. Tum ergo sequentium lentium distantiae focales manebunt, uti ibi sunt descriptae, perinde atque earum intervalla, nisi quod primum intervallum nunc debeat esse

$$Aa\left(1 + \frac{6(A-1)\delta}{A+1} - \frac{1}{P}\right) = Aa\left(\frac{1}{3} + \frac{6(A-1)\delta}{A+1}\right) = Aa\left(\frac{1}{3} + 6\delta\right) \text{ [proxime]};$$

ad confusionem autem tollendam iam satisfieri oportet huic aequationi:

$$0 = \frac{(1+A)^3}{16A^3} - \frac{\nu(1+A)(5A^2-6A+5)}{16A^3}$$
$$+ \frac{\delta(1+A)^2(7A-5)}{32A^3} - \frac{\delta\nu(A-1)(7A^2-13A+23)}{16A^3} + \frac{2}{3A^3}(\lambda' - 2\nu) + \frac{8\lambda''}{3A^3},$$

ex qua fractionem δ definiri oportet; quod quo commodius fieri possit, ita ut pro δ fractio non nimis exigua reperiatur, omnes quatuor lentes obiectivam constituentes ex vitro crystallino (Flint Glass) confici sumamus, ita ut nunc sit $\nu = 0{,}2529$, atque nunc etiam pro A non opus erit numerum adeo magnum statuere; si enim statuamus $A = 50$, reperietur ista aequatio, postquam scilicet per $16A^3$ fuerit multiplicata,

$$0 = -24768 + 242679\delta + 48;$$

unde colligitur

$$\delta = \frac{24720}{242679} = \frac{1}{10} \text{ proxime},$$

qui valor ad praxin maxime est accommodatus. Sumto igitur $A = 50$ et

$\delta = \frac{1}{10}$ distantiae focales quatuor priorum lentium erunt

$$p' = 3{,}922\,a, \quad p'' = 5{,}063\,a, \quad p''' = 5{,}821\,a, \quad p'''' = 6{,}183\,a,$$

quibus iungantur numeri

$$\mathfrak{A}' = 3{,}922, \quad \mathfrak{A}'' = 2{,}922, \quad \mathfrak{A}''' = 1{,}922, \quad \mathfrak{A}'''' = 0{,}922.$$

Intervallum vero singularum harum lentium est $\frac{1}{10}p' = 0{,}392\,a$, deinde vero intervallum a lente obiectiva ad lentem principalem secundam $= 46{,}667\,a$. Ex his ergo quatuor lentes obiectivam constituentes sequenti modo construentur:

I. Pro prima lente

cuius distantia focalis est $p' = 3{,}922\,a$ et numerus $\mathfrak{A}' = 3{,}922 = 4 - \frac{1}{13}$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p'}{\sigma - \mathfrak{A}'(\sigma - \varrho)} = -\dfrac{p'}{4{,}0717} = -0{,}9632\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p'}{\varrho + \mathfrak{A}'(\sigma - \varrho)} = +\dfrac{p'}{5{,}7958} = +0{,}6767\,a.\end{cases}$$

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis est $p'' = 5{,}063\,a$ et numerus $\mathfrak{A}'' = 2{,}922 = 3 - \frac{1}{13}$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -\dfrac{p''}{2{,}6304} = -1{,}9248\,a\\[2ex] \text{posterioris} = +\dfrac{p''}{4{,}3545} = +1{,}1628\,a.\end{cases}$$

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis est $p''' = 5{,}821\,a$ et $\mathfrak{A}''' = 1{,}922\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = -\dfrac{p'''}{1{,}1891} = -4{,}8953\,a\\[2ex] \text{posterioris} = +\dfrac{p'''}{2{,}9132} = +1{,}9981\,a.\end{cases}$$

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis $p'''' = 6{,}183\,a$ et $\mathfrak{A}'''' = 0{,}922$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p''''}{0{,}2522} = 24{,}5160\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p''''}{1{,}4719} = 4{,}2007\,a.\end{cases}$$

Quod ad sequentes lentes attinet, nihil interest, ex quonam vitri genere parentur, dummodo tres postremae utrinque fiant aeque convexae. Binis autem prioribus figura adeo quaecunque tribui potest, dummodo distantias focales assignatas adipiscantur. Ex his igitur colligitur sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX QUATUOR LENTIBUS OBIECTIVIS ET QUINQUE OCULARIBUS COMPOSITI

315. Quatuor lentes priores obiectivam constituentes ex vitro crystallino, pro quo est $n = 1{,}58$, parari sumuntur, reliquas autem lentes ex vitro quocunque conficere licebit.

Constructio autem ipsa ita se habebit:

I. Pro lente prima

cuius distantia focalis est $3{,}922\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -\,0{,}9632\,a\\ \text{posterioris} & = +\,0{,}6767\,a;\end{cases}$$

cuius aperturae semidiameter sumi poterit $x = 0{,}169\,a$ et distantia ad lentem secundam $= 0{,}392\,a$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis $= 5{,}063\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = -\,1{,}9248\,a\\ \text{posterioris} & = +\,1{,}1628\,a;\end{cases}$$

cuius apertura est ut primae, distantia ad lentem sequentem quoque $= 0{,}392\,a$.

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $= 5{,}821\,a$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} & = 4{,}8953\,a\\ \text{posterioris} & = 1{,}9981\,a,\end{cases}$$

apertura ut ante et distantia ad quartam denuo $= 0{,}392\,a$.

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis $= 6{,}183\,a$, erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = 24{,}5160\,a \\ \text{posterioris} = 4{,}2007\,a, \end{cases}$$

apertura ut primae, at distantia ad lentem sequentem $= 46{,}667\,a$.

V. Quintae lentis

distantia focalis $q = 33{,}333\,a$
et semidiameter aperturae $= \frac{3q}{8\mathfrak{M}} + \frac{2}{3}x$
et distantia ad lentem sextam $= 25\,a$.

VI. Sextae lentis

distantia focalis sit $r = 8{,}333\,a$,
semidiameter aperturae $= \frac{21r}{8\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x$,
distantia ad lentem septimam $= 8{,}333\,Ca\left(1 - \frac{12}{\mathfrak{M}}\right)$.

VII. Septimae lentis

quae utrinque debet esse aequaliter convexa uti et duae sequentes, distantia focalis est $s = \frac{75\,C}{\mathfrak{M}} \cdot a$ et apertura maxima et distantia ad lentem octavam $= \frac{48{,}21}{\mathfrak{M}} \cdot Ca.$[1])

VIII. Octavae lentis

distantia focalis sit $t = 26{,}80 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$[2])
et distantia ad lentem nonam $= 6{,}70 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$.

IX. Nonae denique lentis

distantia focalis est $u = 13{,}40 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$
et distantia ad oculum $= \frac{1}{3}u$.

1) Editio princeps: $= \frac{1{,}78 \cdot C}{\mathfrak{M}} \cdot a$. Correxit E. Ch.

2) Editio princeps: $t = 35{,}2 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$. Correxit E. Ch.

X. Spatii autem in obiecto conspicui semidiameter erit $= \frac{3a}{4\mathfrak{M}}$, quod apparebit gradu claritatis, cuius mensura est

$$= \frac{3{,}38a}{\mathfrak{M}} = \frac{27{,}04}{,m}.$$

SCHOLION

316. In his microscopiis id desiderari poterit, quod eorum longitudo fiat nimis magna, cuius rei ratio maximam partem in eo est sita, quod erat $P = \frac{3}{2}$. Quamobrem nostram lentem quadruplicatam ad exemplum octavum [§ 305] accommodemus, ubi est

$$P = 24, \quad \mathfrak{B} = -\frac{23}{4} \quad \text{et} \quad B = -\frac{23}{27};$$

unde patet, si iterum capiatur $A = 50$, partes confusionis a lentibus B et C ortas magis evanescere quam casu praecedente; tum vero etiam littera δ eundem quem ante valorem retinebit; hinc ergo formari potest sequens

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX NOVEM LENTIBUS COMPOSITI QUARUM QUATUOR PRIORES LENTEM OBIECTIVAM CONSTITUENTES EX VITRO CRYSTALLINO SINT FACTAE

317. In hac constructione quatuor articuli priores ad lentes obiectivas relati manent iidem ut in genere praecedente, nisi quod statui debeat

IV. Intervallum quartae lentis ad quintam $= 76{,}74a$.

Reliqui porro articuli erunt, ut sequuntur:

V. Quintae lentis

distantia focalis sit $q = 11{,}98a$

et semidiameter aperturae $= \frac{3q}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{24}x$ existente $x = 0{,}169a$,

distantia ad lentem sextam $= 15{,}97a$.

VI. Sextae lentis

distantia focalis sit $r = 14{,}20\,a$
et semidiameter aperturae $= \frac{1}{3}x$,
distantia ad lentem septimam $= 14{,}20\,Ca\left(1 - \frac{3}{\mathfrak{M}}\right)$.

VII. Septimae lentis

quae utrinque debet esse aequaliter convexa ut et duae sequentes, sit distantia focalis $s = 127{,}78 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$; cui lenti apertura tribuitur maxima et distantia ad lentem octavam $= 47{,}92 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$.

VIII. Lentis octavae

distantia focalis sit $t = 79{,}86 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$
et distantia ad lentem nonam $= 19{,}97 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$.

IX. Nonae denique lentis

distantia focalis est $u = 39{,}93 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$
et distantia ad oculum $= \frac{1}{3}u$.

X. Denique ut ante est spatii in obiecto conspicui semidiameter $= \frac{3a}{4\mathfrak{M}}$, quod apparebit gradu claritatis, cuius mensura est $\frac{3{,}88\,a}{\mathfrak{M}} = \frac{27{,}04}{m}$.

SCHOLION 1

318. Tam in his duabus microscopiorum speciebus quam in aliis, quae simili modo in medium afferri possunt, id potissimum inprimis notatu dignum occurrit, quod eaedem lentes ad omnes plane multiplicationes, dummodo satis magnas, aeque adhiberi possunt. Cum enim numerus C plane ab arbitrio nostro pendeat, dummodo sit mediocriter magnus, ita ut $\mathfrak{C} = \frac{C}{1+C}$ in praxi pro unitate haberi queat, fractio $\frac{C}{\mathfrak{M}}$ tanquam data spectari potest veluti $= \frac{1}{10}$ vel $= \frac{1}{20}$, ut postremae lentes non fiant nimis exiguae, ita ut haec fractio multiplicationem non amplius continere sit censenda. Hoc igitur notato solum intervallum lentium sextae et septimae multiplicationem determinabit,

ita ut manentibus tam iisdem lentibus quam reliquis intervallis solum istud intervallum pro varia multiplicatione mutari debeat, quae autem mutatio non adeo erit magna.[1]) Si enim desideretur multiplicatio $m = 400$, sumta distantia obiecti $a = \frac{1}{2}$ dig. erit $\mathfrak{M} = \frac{m}{16} = 25$ hincque istud intervallum

$$= 12{,}48\, Ca = 6{,}24\, C \text{dig.}$$

ob $a = \frac{1}{2}$ dig. Sin autem velimus multiplicationem $m = 800$, hoc intervallum erit

$$= 13{,}35\, Ca = 6{,}67\, C \text{dig.}$$

Atque adeo si hoc intervallum sumeretur

$$= 14{,}20\, Ca = 7{,}10\, C \text{dig.}$$

tunc multiplicatio infinita produceretur. Semper autem consultum erit his instrumentis non nisi ad multiplicationes maximas uti, quoniam, nisi $\mathfrak{M}$ esset numerus valde magnus, littera C tanta non foret, ut $\mathfrak{C}$ pro unitate haberi posset.

SCHOLION 2

319. Videamus nunc etiam, an hae lentes obiectivae quadruplicatae ad eos casus adplicari possent, ubi littera A fit negativa, ad quod investigandum sumamus superius exemplum septimum [§ 304], ubi erat $P = \frac{18}{25}$, atque ut intervallum

$$Aa\left(1 + \frac{6(A-1)\delta}{A+1} - \frac{1}{P}\right)$$

prodeat positivum, posito $A = -\alpha$ debebit esse $\alpha a\left(\frac{7}{18} - \frac{6(\alpha+1)}{\alpha-1}\delta\right)$ positivum hincque

$$\delta < \frac{7(\alpha-1)}{108(\alpha+1)}$$

ideoque multo magis $\delta < \frac{7}{108}$ sive $\delta < \frac{1}{15}$, id quod in praxi locum habere nequit. Quia autem hoc non successit ob valorem $P = \frac{18}{25}$, faciamus adplicationem ad exemplum 3 casus 1 [§ 293], ubi erat $P = \frac{3}{7}$, $\mathfrak{B} = \frac{16}{21}$, $B = \frac{16}{5}$. Hoc casu ergo positivum esse debet intervallum

$$\alpha a\left(\frac{4}{3} - \frac{6(\alpha+1)}{\alpha-1}\delta\right),$$

1) Haec assertio inaccurata est. E. Ch.

unde pro δ valor non nimis exiguus requiritur. Examinari autem oportet aequationem, qua confusio tollitur, quae per $16A^3$ multiplicata erit

$$0 = -(\alpha-1)^3 + \nu(\alpha-1)(5\alpha^2+6\alpha+5)$$
$$-\frac{\delta(\alpha-1)^2(7\alpha+5)}{2} + \delta\nu(\alpha+1)(7\alpha^2+18\alpha+23) - \frac{16}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) - \frac{16}{B^3}\lambda'';$$

cui quidem aequationi satis idoneis valoribus tam pro α quam δ satisfieri posset; sed quia haec microscopiorum species alii incommodo est obnoxia, quandoquidem una lens in ipsa imagine reali posteriori est constituta, unde repraesentationem non mediocriter inquinari iam supra observavimus, non opus esse duco hanc evolutionem suscipere, sed potius formularum inventarum adplicationem ad telescopia ostendi eo magis conveniet, quod earum usus in microscopiis non tantopere desiderari videtur, quoniam perinde est, sive obiecta inverse sive erecte repraesentantur; quae autem supra de telescopiis huius generis sunt allata, ad duos tantum casus nimis particulares sunt referenda. Quare ex hac ulteriori istius generis evolutione non contemnendum supplementum peti potest.

ADPLICATIO HUIUS PROBLEMATIS AD TELESCOPIA

320. Cum distantia obiecti $a = \infty$, litteram A evanescentem sumi oportet, ita tamen, ut Aa distantiam finitam, quae sit $= l$, denotet. Hinc igitur nostrarum quatuor lentium obiectivarum distantiae focales ita se habebunt:

$$p' = 4l, \quad p'' = 4(1-\delta)l,$$
$$p''' = 4(1-3\delta)l, \quad p'''' = 4(1-6\delta)l$$

existente communi intervallo inter has lentes $= 4\delta l$. Litterae autem germanicae ad has lentes construendas adhibendae sunt

$$\mathfrak{A}' = 0, \quad \mathfrak{A}'' = -1, \quad \mathfrak{A}''' = -2, \quad \mathfrak{A}'''' = -3,$$

dum alterae litterae λ, λ' etc. omnes sunt $= 1$. Tum vero intervallum ab hac lente quadruplicata ad lentem sequentem erit $= \left(1 - 6\delta - \frac{1}{P}\right)l$. Verum ad confusionem destruendam nunc ista habebitur aequatio:

$$0 = \frac{1}{16} - \frac{5\nu}{16} - \frac{5\delta}{32} + \frac{23\delta\nu}{16} - \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right) \text{ etc.},$$

quae, si lentes ex vitro crystallino conficiantur, ubi est $\nu = 0{,}2529$, abit in hanc:

$$0 = \frac{-0{,}2645 + 3{,}3167\delta}{16} - \frac{1}{P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{B^3PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu}{C\mathfrak{C}}\right).$$

Hinc ergo si duo postrema membra evanescerent, foret circiter $\delta = \frac{1}{13}$; accedentibus autem istis membris minor evadet, verum tamen haec membra tam debent esse exigua, ut non superent $\frac{0{,}2645}{16}$; inter exempla autem in fine capitis superioris allata nullum occurrit, quod hic locum habere queat, cum confusionis partes ex his lentibus natae multo sint maiores; neque etiam formulae generales ibi datae ad hunc usum accommodari possunt, ita ut huiusmodi lens obiectiva quadruplicata in hoc telescopiorum genere nullum plane usum habere possit.

PROBLEMA 2

321. *Si lens obiectiva constet tribus lentibus, quarum prima sit concava ex vitro crystallino, duae autem reliquae convexae ex vitro coronario confectae, reliquis lentibus omnibus manentibus, uti in capite praecedente sunt descriptae, microscopium construere, quod ab omni confusione sit liberatum.*

SOLUTIO

Hic in subsidium vocetur problema 2 capitis III sectionis praecedentis [§ 194], ubi pro tribus istis lentibus obiectivis in evolutione sequentes sumti sunt valores:

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}, \quad A = -\frac{1}{3}, \quad \mathfrak{B} = 2, \quad B = -2, \quad \mathfrak{C} = 1 \quad \text{et} \quad C = \infty$$

seu potius C indefinitum, dum sit numerus satis magnus. Deinde

$$\frac{1}{P} = \frac{17}{14}, \quad \frac{1}{PQ} = \frac{37}{28};$$

unde trium harum lentium distantiae focales, quas hic litteris p', p'', p''' designemus, ita sunt definitae:

$$p' = -\frac{1}{2}a, \quad p'' = \frac{17}{21}a, \quad p''' = \frac{37}{42}a,$$

intervalla autem harum lentium $= \frac{1}{14}a$.

Ut igitur has determinationes ad praesens institutum accommodemus, quod ibi erat ABC, hic nobis est simpliciter A, ita ut sit $\frac{2}{3}C = A$, seu quod ibi erat C, hic nobis est $\frac{3}{2}A$, et quia ibi C erat indefinitum, etiamnunc hic A denotabit numerum indefinitum, dummodo sit satis magnus. Deinde quod ibi erat PQR, hic nobis simpliciter erit P, quod ideo etiamnum est indefinitum; unde intervallum a lente obiectiva hac triplicata ad lentem usque sequentem nobis hic erit

$$= Aa\left(\frac{37}{28} - \frac{1}{P}\right).$$

Ut vero omnis confusio tollatur, si littera λ referatur ad lentem primam concavam crystallinam, cui respondeant litterae μ et ν, pro sequentibus vero lentibus coronariis litterae λ', λ'' etc. unitati aequales ponantur ac vitro coronario conveniant litterae μ' et ν', littera λ definiri debet ex hac aequatione:

$$8\lambda = 6\nu + \frac{\mu'}{\mu}\mathcal{A}$$

existente

$$\mathcal{A} = \frac{27\cdot 17}{8\cdot 14}(1 - 2\nu') + \frac{27\cdot 37}{8\cdot 28}\left(1 + \frac{2\nu'}{3A}\right)$$

$$- \frac{1}{A^3P}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{A^3B^3PQ}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right).$$

Hic ergo ex supra evolutis exemplis ea eligi poterunt, in quibus A numerum satis magnum denotare potest atque ubi $\frac{1}{P} < \frac{37}{28}$, sicque plures huiusmodi microscopiorum species omni confusione carentes inveniri poterunt. Notetur autem esse

$$\mu = 0{,}8724 \quad \text{et} \quad \nu = 0{,}2529,$$

at vero

$$\mu' = 0{,}9875 \quad \text{et} \quad \nu' = 0{,}2196,$$

ita ut sit

$$\log. \frac{\mu'}{\mu} = 0{,}0538214.$$

Hinc ergo evolutione facta erit

$$\mathcal{A} = 2{,}2983 + 4{,}4598 + \frac{0{,}6529}{A} - \frac{1}{A^3P}\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^3} + \frac{\nu'}{B\mathfrak{B}}\right) + \frac{1}{A^3B^3PQ}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}^3} + \frac{\nu'}{C\mathfrak{C}}\right)$$

hocque valore invento erit

$$\lambda = 0{,}1897 + \frac{\mu'}{8\mu}A$$

existente

$$\log. \frac{\mu'}{8\mu} = 9{,}1507314.$$

COROLLARIUM 1

322. Hinc ergo patet, si modo capiatur $A = 10$ hincque in superioribus formulis $C = 15$, partes huius formulae posteriores tam fieri exiguas, ut tuto negligi queant, dummodo litterae $\mathfrak{B}$ et B, quae sunt negativae, non fiant unitate multo minores, quod facile obtinetur, si modo P unitatem notabiliter superet. Tum igitur habebitur satis exacte

$$\lambda = 0{,}1897 + 0{,}9654 = 1{,}1551.$$

COROLLARIUM 2

323. Quia in hac hypothesi pro superioribus formulis erat $C = 15$, cum tamen ibi sumsissemus $\mathfrak{C} = 1$, quo haec fiant accuratiora, debuissemus ibi sumere $\mathfrak{C} = \frac{15}{16}$, unde pars illa tertia 4,4598 aliquanto maior evasisset in ratione $16^3 : 15^3$; quo facto loco istius numeri substitui debet hic 5,4125, ex quo concluditur $\lambda = 1{,}2807$. Tum vero pro tertia lente obiectiva fiet $p''' = 0{,}826\,a$.

COROLLARIUM 3

324. Ut autem aliquam rationem teneamus sequentium lentium, istum valorem ipsius λ tantillum augeri oportebit eumque ergo sumamus $\lambda = 1{,}29$. Unde pro constructione primae lentis crystallinae fiet $\tau\sqrt{(\lambda - 1)} = 0{,}4725$.

Hinc pro prima lente obiectiva, cuius distantia focalis est $p' = -\frac{1}{2}a$ et numerus $\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}$, erit

$$\text{radius faciei}\begin{cases}\text{anterioris} = \dfrac{p'}{\sigma - \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = + \dfrac{p'}{1{,}8308} = -0{,}273\,a\\[2ex] \text{posterioris} = \dfrac{p'}{\varrho + \mathfrak{A}(\sigma - \varrho) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} = -\dfrac{p'}{0{,}1067} = +4{,}686\,a.\end{cases}$$

Pro secunda vero lente obiectiva ex vitro coronario, cuius distantia focalis est $p'' = \frac{17}{21} a = 0{,}8095\, a$, ob $\mathfrak{B} = 2$ supra inventus est

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = -\, 0{,}6708\, a \\ \text{posterioris} = +\, 0{,}2617\, a. \end{cases}$$

Pro tertia autem lente obiectiva, cuius est distantia focalis $p''' = 0{,}826\, a$, ob $\mathfrak{C} = \frac{15}{16}$ erit

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} = \dfrac{p'''}{\sigma - \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p'''}{0{,}3163} = 2{,}611\, a \\ \text{posterioris} = \dfrac{p'''}{\varrho + \mathfrak{C}(\sigma - \varrho)} = \dfrac{p'''}{1{,}5705} = 0{,}526\, a. \end{cases}$$

Quibus tribus lentibus, quarum intervalla sunt $= \frac{1}{14} a = 0{,}071\, a$, tribui poterit apertura, cuius semidiameter $x = 0{,}065\, a$; unde nascitur claritas, cuius mensura est $= \frac{10{,}4}{m}$.

COROLLARIUM 4

325. Quod ad reliquas lentes attinet, quoniam in calculum confusionis non ingrediuntur, perinde est, ex quonam vitro parentur et quaenam figura ipsis tribuatur, dummodo eae utrinque fiant aeque convexae, quae maximam aperturam habere debent; id tantum notetur intervallum a tertia lente obiectiva ad sequentem lentem esse debere $= 10\, a \left(\frac{37}{28} - \frac{1}{p}\right)$.

EXEMPLUM 1

326. Adplicemus haec ad exemplum 2 postremi casus capitis praecedentis [§ 299], ubi secunda lens plane tollebatur primumque et secundum intervallum in unum coalescebat, quod nunc erit $= 16{,}54\, a$. Hinc ergo sequitur

CONSTRUCTIO MICROSCOPII EX SEPTEM LENTIBUS COMPOSITI

Hic praeter distantiam obiecti $= a$ multiplicatio m ut data assumitur, unde fit $\mathfrak{M} = \frac{ma}{h}$. Tum vero etiam numerus C arbitrio nostro relinquitur, dummodo sit praemagnus, quo effici poterit, ut postremae lentes non fiant nimis exiguae. Constructio igitur ita se habebit:

I. Pro prima lente ex vitro crystallino paranda, cuius distantia focalis est $p' = -\frac{1}{2}a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}273\,a \\ \text{posterioris} & = +4{,}686\,a, \end{cases}$$

eius aperturae semidiameter $x = 0{,}065\,a$ et intervallum ad lentem secundam $= 0{,}071\,a$.

II. Pro secunda lente ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis est $p'' = 0{,}809\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = -0{,}671\,a \\ \text{posterioris} & = +0{,}262\,a, \end{cases}$$

eius apertura ut primae et intervallum ad lentem tertiam etiam $= 0{,}071\,a$.

III. Pro tertia lente itidem ex vitro coronario paranda, cuius distantia focalis est $p''' = 0{,}826\,a$, capiatur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anterioris} & = 2{,}611\,a \\ \text{posterioris} & = 0{,}526\,a, \end{cases}$$

eius apertura etiam ut primae, at intervallum ad lentem quartam $= 16{,}54\,a$.

IV. Pro quarta lente perinde est, ex quonam vitro paretur, dummodo sit eius distantia focalis $r = \frac{10}{3}\mathfrak{C}a$ sive proxime $r = 3a$, neque etiam multum refert, quaenam huic lenti figura tribuatur.

Eius aperturae semidiameter $= \frac{8r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{3}x$ et intervallum ad lentem quintam

$$= \frac{10}{3}Ca\left(1 - \frac{1}{i\mathfrak{M}}\right) = \frac{10}{3}Ca\left(1 - \frac{33}{2\mathfrak{M}}\right)$$

ob $i = \frac{2}{33}$.

V. Pro quinta lente, quam utrinque aeque convexam esse oportet, distantia focalis $s = 30 \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$ eiusque apertura maxima. Intervallum ad lentem sextam

$$= \frac{15(8i+2)}{9i+1} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a = \frac{360}{17} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a.$$

VI. Pro sexta lente pariter utrinque aeque convexa distantia focalis est

$$t = \frac{225i}{9i+1} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a = \frac{150}{17} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$$

et intervallum ad lentem septimam

$$= \frac{225i}{4(9i+1)} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a = \frac{75}{34} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a.$$

VII. Pro septima lente etiam utrinque aeque convexa distantia focalis est

$$u = \frac{225i}{18i+2} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a = \frac{1}{2} t = \frac{75}{17} \cdot \frac{C}{\mathfrak{M}} \cdot a$$

et distantia ad oculum $= \frac{1}{3} u$.

VIII. Spatii in obiecto conspicui erit semidiameter $= \frac{3a}{4\mathfrak{M}}$ et mensura claritatis $= \frac{10,4}{m}$.

Hic igitur quantitas C arbitrio nostro relinquitur, dummodo sit numerus satis magnus, ita ut fractio $\frac{C}{\mathfrak{M}}$ tanquam data spectari possit; deinde patet etiam esse $u = \frac{5}{34} s$ sicque ipsis lentibus iisdem manentibus idem instrumentum ad omnes multiplicationes aptum reddi poterit, dummodo intervallum inter lentem quartam et quintam varietur, cum etiam reliqua intervalla maneant eadem ob fractionem $\frac{C}{\mathfrak{M}}$.

EXEMPLUM 2

327. Lentem nostram obiectivam triplicatam etiam coniungere licebit cum superiori exemplo tertio [§ 300], ubi erat $P = \frac{3}{2}$ et $\mathfrak{B} = -1$. Manebunt igitur tres priores articuli uti in exemplo praecedente, nisi quod in fine tertii scribi debet:

Intervallum a tertia lente ad quartam

$$= \left(\frac{37}{28} - \frac{1}{P}\right) Aa = 6,55\, a.$$

IV. Pro quarta lente perinde est, ex quonam vitro paretur, dummodo sit eius distantia focalis

$$q = \frac{20}{3} a = 6{,}7\, a.$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{3}{8} \cdot \frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{2}{3} x$
et intervallum ad lentem quintam $= 5a$.

V. Pro quinta lente, cuius distantia focalis est

$$r = \frac{5}{3} \mathfrak{C} a = 1{,}667\, \mathfrak{C} a = 1{,}50\, a$$

sumto scilicet $\mathfrak{C} = \frac{9}{10}$, siquidem unitati prorsus aequari non potest,

eius aperturae semidiameter $= \frac{21 r}{8 \mathfrak{M}} + \frac{1}{3} x$,

intervallum ad lentem sextam $= \frac{5}{3} Ca\left(1 - \frac{12}{\mathfrak{M}}\right)$ seu, si ponatur $\frac{C}{\mathfrak{M}} = \gamma$, ut sit $C = \gamma \mathfrak{M}$, hoc intervallum erit $= \frac{5}{3} \gamma a (\mathfrak{M} - 12)$, ubi γ ita sumitur, ut lentes sequentes non fiant nimis exiguae.

VI. Pro sexta lente, quae cum sequentibus debet esse utrinque aeque convexa, distantia focalis sit $s = 15 \gamma a$,

eius apertura maxima seu semidiameter aperturae $= \frac{1}{4} s$
et intervallum ad lentem septimam $= \frac{135}{14} \gamma a = 9{,}643 \gamma a$.

VII. Pro septima lente distantia focalis $t = \frac{150}{28} \gamma a = 5{,}357 \gamma a$,
aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} t$,
intervallum ad lentem octavam $= \frac{75}{56} \gamma a = 1{,}339 \gamma a$.

VIII. Pro lente octava distantia focalis $u = \frac{75}{28} \gamma a = 2{,}679 \gamma a$,
aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} u$,
distantia ad oculum $= \frac{1}{8} u$.

IX. Spatii in obiecto conspicui erit semidiameter $= \frac{8a}{4\mathfrak{M}}$ et mensura claritatis $= \frac{10{,}4}{m}$.

EXEMPLUM 3

328. Superius quartum exemplum huc transferri nequit; ex quinto [§ 302] autem, ubi $P = \frac{18}{7}$ et $\mathfrak{B} = -\frac{11}{7}$, nascitur haec constructio:

Tres articuli priores manent ut in exemplo primo; iis autem subiungatur:

Intervallum a tertia lente ad quartam $= 9{,}325\,a$.

IV. Pro quarta lente

Distantia focalis $q = \frac{55}{9}a = 6{,}11\,a$.

Eius aperturae semidiameter $= \frac{3}{4}\cdot\frac{q}{\mathfrak{M}} + \frac{7}{18}x$.

Distantia ad lentem quintam $= \frac{715}{162}\,a = 4{,}414\,a$.

V. Pro quinta lente

Distantia focalis $r = 1{,}83\,a$.

Eius aperturae semidiameter $= \frac{9}{4}\cdot\frac{r}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{8}x$.

Distantia ad lentem sextam $= 2{,}037\,\gamma a(\mathfrak{M} - 10)$.

VI. Pro sexta lente

Distantia focalis $s = \frac{55}{3}\gamma a = 18{,}33\gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}s$.

Distantia ad lentem septimam $= 11{,}096\gamma a$.

VII. Pro septima lente

Distantia focalis $t = \frac{275}{38}\gamma a = 7{,}237\gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}t$.

Intervallum ad lentem octavam $= \frac{275}{152}\gamma a = 1{,}809\gamma a$.

VIII. Pro octava lente

Distantia focalis $u = \frac{1}{2} t = 3{,}618 \gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} u$

et distantia ad oculum $= \frac{1}{3} u$.

IX. Campus et claritas se habent uti in praecedentibus exemplis.

EXEMPLUM 4

329. Ex superiori exemplo octavo [§ 305], ubi $P = 24$ et $\mathfrak{B} = -\frac{23}{4}$, nascitur haec constructio:

Tribus prioribus articulis manentibus ut ante subiungatur:

Distantia tertiae lentis ad quartam $= 12{,}80\, a$.

IV. Pro quarta lente

Distantia focalis $q = \frac{115}{48} a = 2{,}396\, a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{3q}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{24} x$.

Intervallum ad quintam lentem $= \frac{115}{36} a = 3{,}194\, a$.

V. Pro quinta lente

Distantia focalis $r = \frac{280}{81} \cdot \mathfrak{C} a = 2{,}556\, a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{3} x$.

Intervallum ad sextam lentem $= 2{,}839 \gamma a (\mathfrak{M} - 3)$.

VI. Pro sexta lente

Distantia focalis $s = 25{,}556 \gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} s$.

Intervallum ad septimam lentem $= 9{,}583 \gamma a$.

VII. Pro septima lente

Distantia focalis $t = 15{,}972 \gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} t$.

Intervallum ad lentem octavam $= \frac{1}{4} t = 3{,}993 \gamma a$.

VIII. Pro octava lente

Distantia focalis $u = \frac{1}{2}t = 7{,}986\,\gamma a.$

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}u.$

Intervallum ad oculum $= \frac{1}{3}u.$

IX. Campus et claritas ut in praecedentibus exemplis.

EXEMPLUM 5

330. Facta denique applicatione ad superius exemplum 9 [§ 306] postremo nascitur haec constructio:

Tribus prioribus lentibus manentibus ut hactenus subiungatur tertio articulo:

Intervallum tertiae et quartae lentis $= 12{,}24\,a.$

IV. Pro quarta lente

Distantia focalis $q = \frac{325}{144}a = 2{,}257\,a.$

Aperturae semidiameter $= \frac{3q}{\mathfrak{M}} + \frac{7}{72}x.$

Distantia ad quintam lentem $= 3{,}009\,a.$

V. Pro quinta lente

Distantia focalis $r = 2{,}097\,a.$

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{3}x.$

Intervallum ad sextam lentem $= 2{,}33\,\gamma a(\mathfrak{M} - 1).$

VI. Pro sexta lente

Distantia focalis $s = 20{,}97\,\gamma a.$

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4}s.$

Intervallum ad septimam lentem $= 5{,}242\,\gamma a.$

VII. Pro septima lente

Distantia focalis $t = 15,726\,\gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} t$.

Intervallum ad lentem octavam $= \frac{1}{4} t = 3,931\,\gamma a$.

VIII. Pro octava lente

Distantia focalis $u = 7,863\,\gamma a$.

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{4} u$.

Distantia ad oculum $= \frac{1}{3} u$.

IX. Campus et claritas se habent ut in praecedentibus exemplis.

FINIS OPERIS

Date Due
